

# O CONTROLO ÓPTIMO E AS SUAS MÚLTIPLAS APLICAÇÕES\*

*Cristiana J. Silva*

Departamento de Matemática    Université d'Orléans, UFR Sciences  
Universidade de Aveiro    Fédération Denis Poisson  
3810–183 Aveiro, Portugal    Laboratoire MAPMO, UMR 6628  
45067 Orléans Cedex 2, France  
`cjoaosilva@ua.pt`

*Delfim F. M. Torres*

Departamento de Matemática  
Universidade de Aveiro  
3810–193 Aveiro, Portugal  
`delfim@ua.pt`

*Emmanuel Trélat*

Université d'Orléans, UFR Sciences  
Fédération Denis Poisson  
Laboratoire MAPMO, UMR 6628  
45067 Orléans Cedex 2, France  
`emmanuel.trelat@univ-orleans.fr`

**Resumo:** Neste trabalho são referidas motivações, aplicações e relações da teoria do controlo com outras áreas da matemática. Apresentamos uma breve resenha histórica sobre o controlo óptimo, desde as suas origens no cálculo das variações e na teoria clássica do controlo aos dias de hoje, dando especial destaque ao princípio do máximo de Pontryagin.

**Palavras chave:** controlo óptimo, princípio do máximo de Pontryagin, aplicações da teoria matemática dos sistemas de controlo.

**Abstract:** In this work we refer to motivations, applications, and relations of control theory with other areas of mathematics. We present a brief historical review of optimal control theory, from its roots in the calculus of variations and the classical theory of control to the present time, giving particular emphasis to the Pontryagin maximum principle.

**Keywords:** optimal control, Pontryagin maximum principle, applications of the mathematical theory of control.

---

\*Dedicado a Francis Clarke e a Richard Vinter por ocasião da celebração do sexagésimo aniversário de ambos os matemáticos, *Workshop in Control, Nonsmooth Analysis and Optimization*, Porto, 4 a 8 de Maio de 2009 <<http://ceoc.mat.ua.pt/fc-rv-60>>.

## 1 Introdução

Todos nós já tentámos, numa ou outra ocasião, manter em equilíbrio uma vara sobre o dedo indicador (i.e., resolver o problema do pêndulo invertido). Por outro lado é muito mais difícil, sobretudo se fecharmos os olhos, manter em equilíbrio um pêndulo invertido duplo. A teoria do controlo permite fazê-lo sob a condição de dispormos de um bom modelo matemático.

Um sistema de controlo é um sistema dinâmico, que evolui no tempo, sobre o qual podemos agir através de uma função de comando ou controlo. Um computador, que permite a um utilizador efectuar uma série de comandos, um ecossistema sobre o qual podemos agir favorecendo esta ou aquela espécie, os tecidos nervosos que formam uma rede controlada pelo cérebro e realizam a transformação de estímulos provenientes do exterior em acções do organismo, um robot que deve efectuar uma tarefa bem precisa, uma viatura sobre a qual agimos por intermédio de um pedal de aceleração, de travagem e embraiagem e que conduzimos com a ajuda de um volante, um satélite ou uma nave espacial, são todos eles exemplos de sistemas de controlo, os quais podem ser modelados e estudados pela teoria dos sistemas de controlo.

A teoria do controlo analisa as propriedades de tais sistemas, com o intuito de os «conduzir» de um determinado estado inicial a um dado estado final, respeitando eventualmente certas restrições. A origem de tais sistemas pode ser muito diversa: mecânica, eléctrica, biológica, química, económica, etc. O objectivo pode ser o de estabilizar o sistema tornando-o insensível a certas perturbações (problema de *estabilização*) ou ainda determinar as soluções óptimas relativamente a um determinado critério de optimização (problema do *controlo óptimo*). Para modelar os sistemas de controlo podemos recorrer a equações diferenciais, integrais, funcionais, de diferenças finitas, às derivadas parciais, determinísticas ou estocásticas, etc. Por esta razão a teoria do controlo vai beber e contribuir em numerosos domínios da matemática (vide, e.g., [4, 11, 12, 21, 23, 27]).

A estrutura de um sistema de controlo é representada pela interconexão de certos elementos mais simples que formam sub-sistemas. Neles transita *informação*. A dinâmica de um sistema de controlo define as transformações possíveis do sistema, que ocorrem no tempo de maneira determinista ou aleatória. Os exemplos já dados mostram que a estrutura e a dinâmica de um sistema de controlo podem ter significados muito diferentes. Em particular, o conceito de sistema de controlo pode descrever transformações discretas, contínuas, híbridas ou, de um modo mais geral, numa *time scale* ou *measure chain* [13, 14, 22].

Um sistema de controlo diz-se *controlável* se o podemos «conduzir» (em

tempo finito) de um determinado estado inicial até um estado final prescrito. Em relação ao problema da controlabilidade, Kalman demonstrou em 1949 um resultado importante que caracteriza os sistemas lineares controláveis de dimensão finita (Teorema 7). Para sistemas não lineares o problema matemático da controlabilidade é muito mais difícil e constitui um domínio de investigação ainda activo nos dias de hoje.

Assegurada a propriedade de controlabilidade, podemos desejar passar de um estado inicial a um estado final minimizando ou maximizando um determinado critério. Temos então um problema de controlo óptimo. Por exemplo, um condutor que efectue o trajecto Lisboa-Porto pode querer viajar em tempo mínimo. Nesse caso escolhe o trajecto pela auto-estrada A1. Uma consequência de tal escolha será o pagamento de portagem. Outro problema de controlo óptimo é obtido se tivermos como critério de minimização os custos da viagem. A solução de tal problema envolverá a escolha de estradas nacionais, gratuitas, mas que levam muito mais tempo a chegar ao destino (segundo a informação do sítio da internet <http://www.google.pt/maps> o trajecto pela auto-estrada dura 3h e pela estrada nacional dura 6h45m). Um problema de controlo óptimo pode ser formulado do seguinte modo. Consideremos um sistema de controlo, cujo estado num determinado instante é representado por um vector. Os controlos são funções ou parâmetros, habitualmente sujeitos a restrições, que agem sobre o sistema sob a forma de forças exteriores, de potenciais térmicos ou eléctricos, de programas de investimento, etc. e afectam a dinâmica. Uma equação é dada, ou tipicamente um sistema de equações diferenciais, relacionando as variáveis e modelando a dinâmica do sistema. É depois necessário utilizar a informação presente e as características do problema para construir os controlos adequados que vão permitir realizar um objectivo preciso. Por exemplo, quando nos deslocamos na nossa viatura agimos de acordo com o código da estrada (pelo menos é aconselhável) e concretizamos um plano de viagem para chegar ao nosso destino. São impostas restrições sobre a trajectória ou sobre os controlos, que é imprescindível ter em consideração. Fixamos um critério permitindo medir a qualidade do processo escolhido. Este apresenta-se normalmente sob a forma de uma funcional que depende do estado do sistema e dos controlos. Para além das condições anteriores procuramos ainda minimizar (ou maximizar) esta quantidade. Um exemplo já dado anteriormente é o de deslocarmo-nos em tempo mínimo de um ponto a outro. Notemos que a forma das trajectórias óptimas depende fortemente do critério de optimização. Por exemplo, para estacionar o nosso carro é fácil verificar que a trajectória seguida difere se queremos realizar a operação em tempo mínimo (o que é

arriscado) ou minimizando a quantidade de combustível gasta na operação.

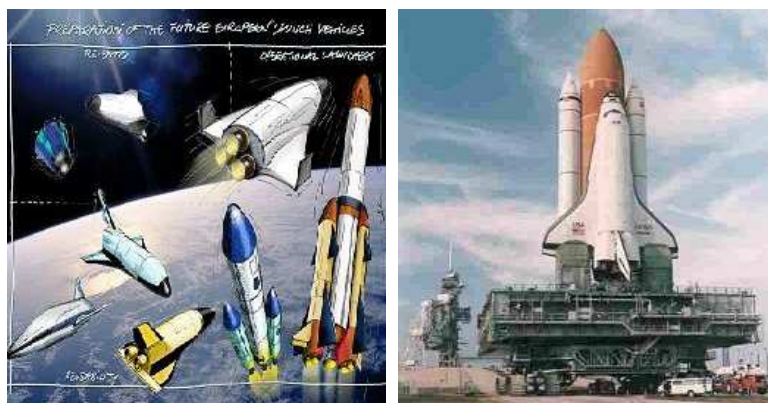


Figura 1: a teoria do controlo óptimo tem um papel importante na engenharia aeroespacial.

A teoria do controlo óptimo tem uma grande importância no domínio aeroespacial, nomeadamente em problemas de condução, transferência de órbitas aero-assistidas, desenvolvimento de lançadores de satélites recuperáveis (o aspecto financeiro é aqui muito importante) e problemas da reentrada atmosférica, como seja o famoso projecto *Mars Sample Return* da Agência Espacial Europeia (ESA), que consiste em enviar uma nave espacial ao planeta Marte com o objectivo de trazer amostras marcianas (Figura 1).

## 2 Breve resenha histórica

O cálculo das variações nasceu no século dezassete com o contributo de Bernoulli, Fermat, Leibniz e Newton. Alguns matemáticos como H.J. Susmann e J.C. Willems defendem a origem do controlo óptimo coincidente com o nascimento do cálculo das variações, em 1697, data de publicação da solução do problema da braquistócrona pelo matemático Johann Bernoulli [28]. Outros vão ainda mais longe, chamando a atenção para o facto do problema da resistência aerodinâmica de Newton, colocado e resolvido por Isaac Newton em 1686, no seu *Principia Mathematica*, ser um verdadeiro problema de Controlo Óptimo [25, 30].

Em 1638 Galileu estudou o seguinte problema: determinar a curva sobre a qual uma pequena esfera rola sob a acção da gravidade, sem velocidade inicial e sem atrito, de um ponto *A* até um ponto *B* com um tempo de percurso mínimo (escorrega de tempo mínimo, ver Figura 2).

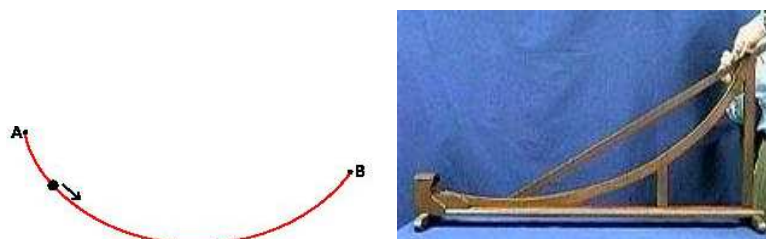


Figura 2: problema da braquistócrona.

Trata-se do problema da braquistócrona (do grego *brakhistos*, «o mais breve», e *chronos*, «tempo»). Galileu pensou (erradamente) que a curva procurada era um arco de círculo. Observou no entanto, correctamente, que o segmento de linha recta não é o caminho de tempo mais curto. Em 1696, Jean Bernoulli colocou este problema como um desafio aos melhores matemáticos da sua época. Ele próprio encontrou a solução, assim como o seu irmão Jacques Bernoulli, Newton, Leibniz e o marquês de l'Hopital. A solução é um arco de cicloide começando com uma tangente vertical [20, 28]. As rampas de skate assim como as descidas mais rápidas dos *aqua-parques*, têm a forma de cicloide (Figura 3).



Figura 3: arcos de cicloide conduzem às descidas mais rápidas e à adrenalina máxima.

A teoria do controlo óptimo surge depois da segunda guerra mundial, respondendo a necessidades práticas de engenharia, nomeadamente no domínio da aeronáutica e da dinâmica de voo. A formalização desta teoria colocou várias questões novas. Por exemplo, a teoria do controlo óptimo motivou a introdução de novos conceitos de soluções generalizadas na teoria das equações

diferenciais e originou novos resultados de existência de trajectórias. Regra geral, considera-se que a teoria do controlo óptimo surgiu em finais dos anos cinquenta na antiga União Soviética, em 1956, com a formulação e demonstração do Princípio do Máximo de Pontryagin por L.S. Pontryagin (Figura 4) e pelo seu grupo de colaboradores: V.G. Boltyanskii, R.V. Gamkrelidze e E.F. Mishchenko [24].

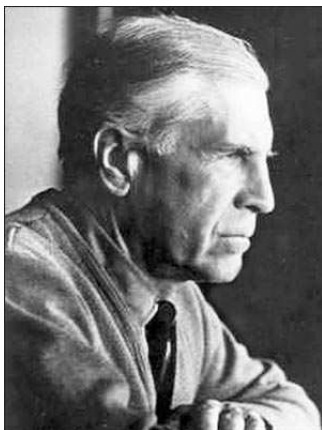


Figura 4: Lev Semenovich Pontryagin (3/Set/1908 – 3/Maio/1988)

Pontryagin e os seus companheiros introduziram um aspecto de importância primordial: generalizaram a teoria do cálculo das variações a curvas que tomam valores em conjuntos fechados (com fronteira). A teoria do controlo óptimo está muito ligada à mecânica clássica, em particular aos princípios variacionais (princípio de Fermat, equações de Euler-Lagrange, etc.) Na verdade o princípio do máximo de Pontryagin é uma generalização das condições necessárias de Euler-Lagrange e de Weierstrass. Alguns pontos fortes da nova teoria foram a descoberta do método de programação dinâmica, a introdução da análise funcional na teoria dos sistemas óptimos e a descoberta de ligações entre as soluções de um problema de controlo óptimo e os resultados da teoria de estabilidade de Lyapunov [31, 32]. Mais tarde apareceram as fundações da teoria do controlo estocástico e da filtragem em sistemas dinâmicos, a teoria dos jogos, o controlo de equações com derivadas parciais e os sistemas de controlo híbrido – algumas de entre as muitas áreas de investigação actual [1, 19, 27].

### 3 Controlo óptimo linear

A teoria do controlo óptimo é muito mais simples quando o sistema de controlo sob consideração é linear. O controlo óptimo não linear será abordado na Secção 4. A teoria linear ainda é, nos dias de hoje, a mais usada e conhecida nas áreas de engenharia e suas aplicações.

#### 3.1 Questões centrais

Seja  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  (denotamos por  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  o conjunto das matrizes  $n \times n$  de entradas reais);  $B, X_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^n$ ;  $I$  um intervalo de  $\mathbb{R}$ ; e  $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função mensurável ( $u \in L^1$ ) tal que  $u(t) \in I \forall t$ .<sup>†</sup> O teorema de existência de solução para equações diferenciais assegura a existência de uma única aplicação  $\mathbb{R} \ni t \mapsto X(t) \in \mathbb{R}^n$  absolutamente contínua ( $X \in AC$ ) tal que

$$\begin{aligned} \dot{X}(t) &= AX(t) + Bu(t) \quad \forall t, \\ X(0) &= X_0. \end{aligned} \tag{1}$$

Esta aplicação depende do controlo  $u$ . Ao mudarmos a função  $u$  obtemos uma outra trajectória  $t \mapsto X(t)$  em  $\mathbb{R}^n$  (Figura 5).

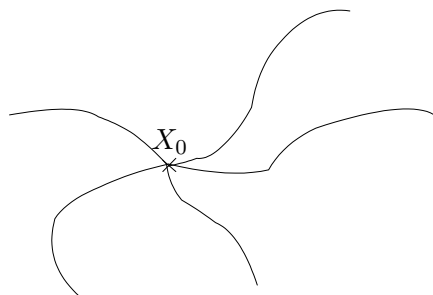


Figura 5: a trajectória solução do sistema de controlo (1) depende da escolha concreta do controlo  $u$ .

Neste contexto, surgem naturalmente duas questões:

<sup>†</sup>Nas aplicações considera-se normalmente como classe dos controlos admissíveis o conjunto dos controlos seccionalmente contínuos ou mesmo seccionalmente constantes. Mostra-se que a família de trajectórias correspondentes aos controlos seccionalmente constantes é densa no conjunto de todas as soluções com controlos mensuráveis (vide, e.g., [3]).

- (i) Dado um ponto  $X_1 \in \mathbb{R}^n$ , existirá um controlo  $u$  tal que a trajectória associada a esse controlo liga  $X_0$  a  $X_1$  em tempo finito  $T$ ? (Figura 6) É este o *problema da controlabilidade*.

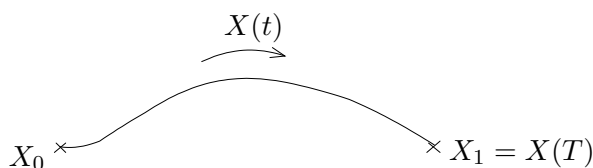


Figura 6: problema da controlabilidade.

- (ii) Assegurada a controlabilidade (questão anterior), existirá um controlo que *minimiza o tempo de percurso de  $X_0$  até  $X_1$* ? (Figura 7) Temos então um problema de controlo óptimo (de tempo mínimo).

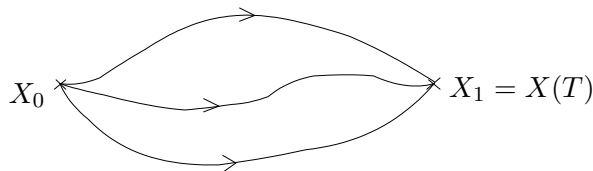


Figura 7: problema do tempo mínimo.

Os teoremas que se seguem respondem a estas questões. As respectivas demonstrações são bem conhecidas e podem facilmente ser encontradas na literatura (vide, e.g., [18, 21, 33]).

### 3.2 Conjunto acessível

Considerando o sistema linear de controlo (1) começamos por introduzir um conjunto de grande importância: *o conjunto acessível*.

**Definição 1.** O conjunto dos pontos acessíveis a partir de  $X_0$  em tempo  $T > 0$  é denotado e definido por

$$A(X_0, T) = \{X_1 \in \mathbb{R}^n \mid \exists u \in L^1([0, T], I), \\ \exists X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n \in AC \text{ com } X(0) = X_0, \\ \forall t \in [0, T] \dot{X}(t) = AX(t) + Bu(t), X(T) = X_1\}.$$



Por palavras,  $A(X_0, T)$  é o conjunto das extremidades das soluções de (1) em tempo  $T$ , quando fazemos variar o controle  $u$  (Figura 8).

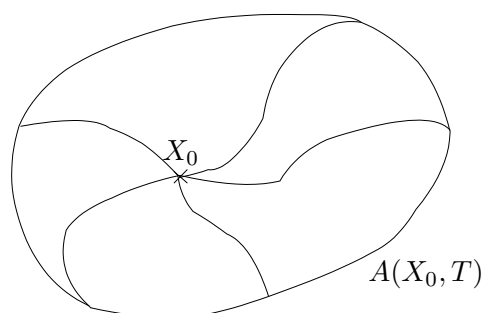


Figura 8: conjunto acessível.

**Teorema 2.** *Sejam  $T > 0$ ,  $I$  compacto e  $X_0 \in \mathbb{R}^n$ . Então para todo o  $t \in [0, T]$ ,  $A(X_0, t)$  é compacto, convexo e varia continuamente com  $t$  em  $[0, T]$ .*

A solução de

$$\begin{cases} \dot{X} = AX + Bu \\ X(0) = X_0 \end{cases} \quad (2)$$

é

$$X(t) = e^{tA} X_0 + \int_0^t e^{-sA} B u(s) ds.$$

Constatamos que se  $X_0 = 0$ , i.e., se partirmos da origem, então a expressão de  $X(t)$  é simplificada:  $X(t) = \int_0^t e^{-sA} B u(s) ds$  é linear em  $u$ . Esta observação leva-nos à seguinte proposição.

**Proposição 3.** *Suponhamos que  $X_0 = 0$  e  $I = \mathbb{R}$ . Então,*

1.  $\forall T > 0$   $A(0, T)$  é um sub-espço vectorial de  $\mathbb{R}^n$ . Além disso,
2.  $0 < T_1 < T_2 \Rightarrow A(0, T_1) \subset A(0, T_2)$ .

**Definição 4.** O conjunto  $A(0) = \cup_{t \geq 0} A(0, T)$  é o conjunto dos pontos acessíveis (num tempo qualquer) a partir da origem.

**Corolário 5.** *O conjunto  $A(0)$  é um sub-espço vectorial de  $\mathbb{R}^n$ .*

### 3.3 Controlabilidade

O sistema de controlo  $\dot{X} = AX + Bu$  diz-se controlável se para todo o  $X_0, X_1 \in \mathbb{R}^n$  existe um controlo  $u$  tal que a trajectória associada une  $X_0$  a  $X_1$  em tempo finito  $T$  (Figura 9). De modo mais formal temos:

**Definição 6.** O sistema de controlo  $\dot{X} = AX + Bu$  diz-se controlável se

$$\forall X_0, X_1 \in \mathbb{R}^n \quad \exists T > 0 \quad \exists u : [0, T] \rightarrow I \in L^1$$

$$\exists X : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n \mid \begin{cases} \dot{X} = AX + Bu, \\ X(0) = X_0, \\ X(T) = X_1. \end{cases}$$



Figura 9: controlabilidade.

O teorema seguinte dá-nos uma condição necessária e suficiente de controlabilidade chamada *condição de Kalman*.

**Teorema 7** (Condição de Kalman). *O sistema  $\dot{X} = AX + Bu$  é controlável se e somente se a matriz  $C = (B|AB|\dots|A^{n-1}B)$  tiver característica completa (i.e.,  $\text{rank}(C) = n$ ).*

### 3.4 Princípio do Máximo de Pontryagin para o problema de tempo mínimo

Começamos por formalizar, com a ajuda do conjunto acessível  $A(X_0, t)$ , a noção de tempo mínimo.

Sejam  $X_0, X_1 \in \mathbb{R}^n$ . Suponhamos que  $X_1$  é acessível a partir de  $X_0$ , i.e., suponhamos que existe pelo menos uma trajectória unindo  $X_0$  a  $X_1$ . De entre todas as trajectórias que unem  $X_0$  a  $X_1$  gostaríamos de caracterizar aquela que o faz em tempo mínimo  $T$  (Figura 10).

Se  $T$  for o tempo mínimo, então para todo o  $t < T$ ,  $X_1 \notin A(X_0, t)$  (com efeito, se assim não fosse  $X_1$  seria acessível a partir de  $X_0$  num tempo inferior a  $T$  e  $T$  não seria o tempo mínimo). Consequentemente,

$$T = \inf\{t > 0 \mid X_1 \in A(X_0, t)\}. \tag{3}$$

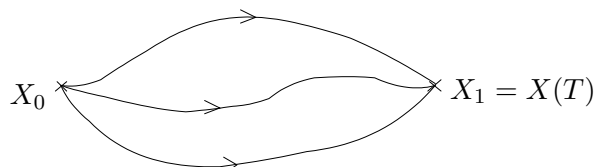


Figura 10: qual a trajetória  $X$  para a qual  $T$  é mínimo?

O valor de  $T$  está bem definido pois, a partir do Teorema 2,  $A(X_0, t)$  varia continuamente com  $t$ , logo  $\{t > 0 \mid X_1 \in A(X_0, t)\}$  é fechado em  $\mathbb{R}$ . Em particular o ínfimo em (3) é mínimo. O tempo  $t = T$  é o primeiro instante para o qual  $A(X_0, t)$  contém  $X_1$  (Figura 11).

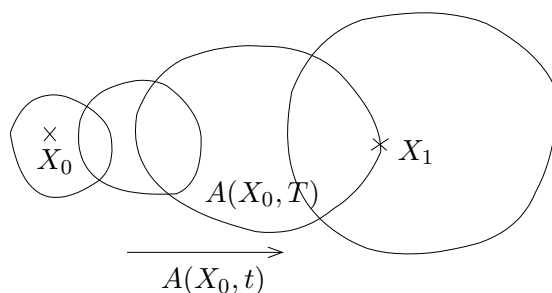


Figura 11: o tempo mínimo  $T$  corresponde ao primeiro instante  $t$  para o qual  $A(X_0, t) \cap \{X_1\} \neq \emptyset$ .

Por outro lado, temos necessariamente:

$$X_1 \in \text{Fr } A(X_0, T) \setminus \text{int } A(X_0, T).$$

Com efeito, se  $X_1$  pertencesse ao interior de  $A(X_0, T)$ , então para  $t < T$  próximo de  $T$ ,  $X_1$  pertenceria ainda a  $A(X_0, t)$  pois  $A(X_0, t)$  varia continuamente com  $t$ . Isto contradiz o facto de  $T$  ser o tempo mínimo. Estas observações dão uma visão geométrica à noção de tempo mínimo e conduzem-nos à seguinte definição:

**Definição 8.** Seja  $u \in L^1([0, T], I)$ . O controlo  $u$  diz-se óptimo para o sistema (1) se a correspondente trajetória  $X$  verifica  $X(T) \in \text{Fr } A(X_0, T)$ .

Dizer que  $u$  é óptimo é dizer que a trajetória associada a  $u$  une  $X_0$  a  $X_1$  em tempo mínimo. O objectivo é então o de determinar os controlos

óptimos. O teorema que se segue dá-nos uma condição necessária e suficiente de optimalidade.

**Teorema 9** (Princípio do Máximo de Pontryagin (caso linear)). *Considere-se o sistema de controlo*

$$\begin{cases} \dot{X} = AX + Bu, \\ X(0) = X_0. \end{cases}$$

Seja  $T > 0$ . O controlo  $u \in L^1([0, T], I = [-1, 1])$  é óptimo se e somente se

$$u(t) = \text{sign} \langle \eta(t), B \rangle$$

onde  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  é o produto interno em  $\mathbb{R}^n$  e  $\eta(t) \in \mathbb{R}^n$  é solução da equação  $\dot{\eta}^T = -\eta^T A$ .

A condição inicial  $\eta(0)$  depende de  $X_1$ . Como ela não é directamente conhecida, a utilização do Teorema 9 é maioritariamente indirecta. Vejamos um exemplo.

### 3.5 Exemplo: controlo óptimo de um oscilador harmónico (caso linear)

Consideremos uma massa pontual  $m$  ligada a uma mola cujo movimento está restrito a um eixo  $Ox$  (Figura 12).

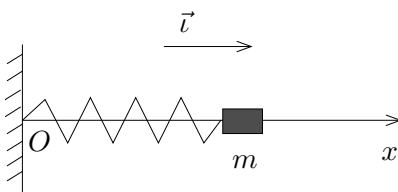


Figura 12: sistema massa-mola.

A massa pontual sai da origem por uma força que supomos igual a

$$-k_1(x - l) - k_2(x - l)^3$$

onde  $l$  é o comprimento da mola em repouso. Aplicamos a essa massa pontual uma força exterior horizontal  $u(t)\vec{l}$ . A segunda Lei de Newton diz-nos que

a força resultante aplicada é directamente proporcional ao produto entre a massa inercial e a aceleração adquirida pela mesma, ou seja

$$m\ddot{x}(t) + k_1(x(t) - l) + k_2(x(t) - l)^3 = u(t). \quad (4)$$

As leis básicas da Física dizem-nos também que todas as forças são limitadas. Impomos a seguinte *restrição* à força exterior:

$$|u(t)| \leq 1 \quad \forall t.$$

Isto significa que a força apenas pode tomar valores no intervalo *fechado*  $[-1, 1]$ . Suponhamos que a posição e a velocidade iniciais do objecto são, respectivamente,  $x(0) = x_0$  e  $\dot{x}(0) = y_0$ . O problema consiste em trazer, em *tempo mínimo*, a massa pontual à posição de equilíbrio  $x = l$  por escolha adequada da força externa  $u(t)$  e tendo em conta a *restrição*  $|u(t)| \leq 1$ . A força  $u$  é aqui o nosso *controlo*.

*Problema.* Dadas as condições iniciais  $x(0) = x_0$  e  $\dot{x}(0) = y_0$ , encontrar a função  $u$  que permite transportar a massa para a sua posição de equilíbrio em tempo mínimo.

### 3.5.1 Modelação matemática

Para simplificar a apresentação, vamos supor  $m = 1 \text{ kg}$ ,  $k_1 = 1 \text{ N.m}^{-1}$  e  $l = 0 \text{ m}$  (passamos a  $l = 0$  por translação). A equação de movimento (4) é então equivalente ao sistema diferencial de controlo

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = y(t) \\ \dot{y}(t) = -x(t) - k_2x(t)^3 + u(t) \end{cases} \quad (5)$$

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = y_0.$$

Escrevemos facilmente (5) na notação matricial

$$\dot{X} = AX + f(X) + Bu, \quad X(0) = X_0, \quad (6)$$

tomando

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}, \quad f(X) = \begin{pmatrix} 0 \\ -k_2x^3 \end{pmatrix}.$$

Tendo em mente que estamos na secção de controlo linear fixamos  $k_2 = 0$ , desprezando efeitos conservativos não lineares (na Secção 4, onde abordamos o controlo óptimo não linear, consideraremos o caso  $k_2 \neq 0$ ). Para  $k_2 = 0$  temos  $f(X) \equiv 0$  e obtemos o sistema de controlo (6) na forma (2) (sistema de controlo linear). Pretendemos responder a duas questões:

1. Existirá sempre, para toda e qualquer condição inicial  $x(0) = x_0$  e  $\dot{x}(0) = y_0$ , uma força exterior horizontal (um controlo) que permite transportar em tempo finito  $T$  a massa pontual para sua posição de equilíbrio  $x(T) = 0$  e  $\dot{x}(T) = 0$ ?
2. Se a primeira pergunta for respondida positivamente, qual a força (qual o controlo) que minimiza o tempo de transporte da massa pontual à sua posição de equilíbrio?

### 3.5.2 Controlabilidade do sistema

O nosso sistema escreve-se na forma

$$\begin{cases} \dot{X} = AX + Bu \\ X(0) = X_0 \end{cases}$$

com  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$  e  $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Temos então

$$\text{rank}(B|AB) = \text{rank} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

e o Teorema 7 garante-nos que o sistema é controlável (se  $u(t) \in \mathbb{R}$ ). Isto significa que existem controlos para os quais as trajectórias associadas unem  $X_0$  a 0. Temos assim resposta afirmativa à nossa primeira questão, admitindo que o sistema mantém-se controlável com controlos que verificam a restrição  $|u| \leq 1$  (o que será verificado *a posteriori*). Esta resposta é esperada em termos físicos. Se não aplicarmos uma força exterior, i.e., se  $u = 0$ , a equação do movimento é  $\ddot{x} + x = 0$  e a massa pontual oscila sem nunca parar, nunca voltando à sua posição de equilíbrio em tempo finito. Por outro lado, ao aplicarmos determinadas forças exteriores, temos tendência a amortecer as oscilações. A teoria do controlo prevê que conseguimos realmente parar a massa em tempo finito.

### 3.5.3 Determinação do controlo óptimo

Sabemos que existem controlos que permitem conduzir o sistema de  $X_0$  a 0. Agora queremos determinar, em concreto, qual desses controlos o faz

em tempo mínimo. Para isso aplicamos o Teorema 9:

$$u(t) = \text{sinal} \langle \eta(t), B \rangle,$$

onde  $\eta(t) \in \mathbb{R}^2$  é solução de  $\dot{\eta}^T = -\eta^T A$ . Seja  $\eta(t) = \begin{pmatrix} \eta_1(t) \\ \eta_2(t) \end{pmatrix}$ . Então,  $u(t) = \text{sinal} \eta_2(t)$  e  $\dot{\eta}_1 = \eta_2$ ,  $\dot{\eta}_2 = -\eta_1$ , ou seja,  $\ddot{\eta}_2 + \eta_2 = 0$ . Logo  $\eta_2(t) = \lambda \cos t + \mu \sin t$ . Consequentemente, o controlo óptimo é seccionalmente constante em intervalos de comprimento  $\pi$  e toma valores alternadamente  $\pm 1$ .

- Se  $u = -1$ , obtemos o sistema diferencial

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x - 1. \end{cases} \quad (7)$$

- Se  $u = +1$ , obtemos

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x + 1. \end{cases} \quad (8)$$

A trajectória óptima unindo  $X_0$  a 0 é constituída por pedaços de soluções de (7) e (8) concatenadas. As soluções de (7) e (8) são facilmente obtidas:

$$\begin{aligned} \dot{x} = y, \dot{y} = -x - 1 &\Rightarrow \frac{d}{dx}((x+1)^2 + y^2) = 0 \\ &\Rightarrow (x+1)^2 + y^2 = \text{const} = R^2 \end{aligned}$$

e concluímos que as curvas soluções de (7) são círculos centrados em  $x = -1$  e  $y = 0$  de período  $2\pi$  (com efeito,  $x(t) = -1 + R \cos t$  e  $y(t) = R \sin t$ ); como soluções de (8) obtemos  $x(t) = 1 + R \cos t$  e  $y(t) = R \sin t$ , i.e., as soluções de (8) são círculos centrados em  $x = 1$  e  $y = 0$  de período  $2\pi$ .

A trajectória óptima de  $X_0$  até 0 segue alternadamente um arco de círculo centrado em  $x = -1$  e  $y = 0$  e um arco de círculo centrado em  $x = 1$  e  $y = 0$ . O estudo detalhado da trajectória óptima e a sua implementação numérica, para todo e qualquer  $X_0$ , podem ser encontrados em [33].

## 4 Controlo óptimo não linear

Apresentamos agora algumas técnicas para a análise de problemas de controlo óptimo não lineares. Em particular, formulamos o Princípio do Máximo de Pontryagin numa forma mais geral do que aquela que vimos na Secção 3. O exemplo não linear da massa-mola será tratado como exemplo de aplicação.

#### 4.1 Problemática geral

De um ponto de vista global, o problema deve se formulado numa variedade  $M$ , mas o nosso ponto de vista vai ser *local* e trabalhamos sobre um aberto  $V$  de  $\mathbb{R}^n$  suficientemente pequeno. A problemática geral do controlo óptimo é a seguinte. Consideremos um sistema de controlo

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \quad (9)$$

sobre  $V$  onde  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  é «suave»<sup>‡</sup> e o conjunto dos controlos admissíveis  $\mathcal{U}$  é composto por aplicações  $u : [0, T(u)] \rightarrow \Omega \subseteq \mathbb{R}^m$  mensuráveis limitadas. Dada uma aplicação  $f^0 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ , denotamos por

$$C(u) = \int_0^{T'} f^0(x(t), u(t)) dt$$

o custo de uma trajectória  $x : t \mapsto x(t)$  associada a  $u(\cdot)$  e definido sobre  $[0, T'(u)]$ ,  $T'(u) \leq T(u)$ . Sejam  $M_0$  e  $M_1$  duas sub-variedades regulares de  $V$ . O problema do controlo óptimo consiste em encontrar, de entre todas as trajectórias que unem  $M_0$  a  $M_1$ , aquelas cujo custo é mínimo. Começamos por restringir-nos ao caso em que  $M_0$  e  $M_1$  são pontos  $x_0$  e  $x_1$  de  $V$ . Sendo o nosso ponto de vista local, podemos sempre supor que  $x_0 = 0$ .

#### 4.2 Aplicação entrada-saída

Consideremos para o sistema (9) o seguinte problema de *controlo*: dado um ponto  $x_1 \in V$ , encontrar um tempo  $T$  e um controlo  $u$  sobre  $[0, T]$  tal que a trajectória  $x_u$  associada a  $u$ , solução de (9), verifica

$$x_u(0) = 0, \quad x_u(T) = x_1.$$

Isto leva-nos a definir:

**Definição 10.** Seja  $T > 0$ . A aplicação entrada-saída em tempo  $T$  do sistema de controlo (9) inicializado em 0 é a aplicação:

$$\begin{aligned} E_T : \mathcal{U} &\rightarrow V \\ u &\mapsto x_u(T) \end{aligned}$$

onde  $\mathcal{U}$  é o conjunto dos controlos admissíveis.

---

<sup>‡</sup>F.H. Clarke criou nos anos setenta a chamada «Análise Não-Suave» (*Nonsmooth Analysis*) que permite o estudo de problemas de controlo óptimo mais gerais, em que as funções envolvidas não são necessariamente diferenciáveis no sentido clássico. Dado o carácter introdutório do nosso texto, restringimo-nos ao caso «suave» no sentido  $C^\infty$ : todos os objectos manipulados são aqui, salvo casos particulares mencionados,  $C^\infty$ . Remetemos o leitor interessado na Análise Não-Suave para [5, 6, 7, 8].



Por outras palavras, a aplicação entrada-saída em tempo  $T$  associa a um controlo  $u$  o ponto final da trajectória associada a  $u$ . Uma questão importante na teoria do controlo é estudar esta aplicação  $E_T$ , descrevendo a sua imagem, as suas singularidades, a sua regularidade, etc. A resposta a estas questões depende, obviamente, do espaço  $\mathcal{U}$  de partida e da forma do sistema (da função  $f$ ). Com toda a generalidade temos o seguinte resultado (vide, e.g., [17, 27]).

**Proposição 11.** *Consideremos o sistema (9) onde  $f$  é «suave» e  $\mathcal{U} \subset L^\infty([0, T])$ . Então  $E_T$  é «suave» no sentido  $L^\infty$ .*

Seja  $u \in \mathcal{U}$  um controlo de referência. Exprimamos a diferenciabilidade (no sentido de Fréchet) de  $E_T$  no ponto  $u$ . Consideremos  $A(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_u(t), u(t))$  e  $B(t) = \frac{\partial f}{\partial u}(x_u(t), u(t))$ . O sistema

$$\begin{aligned} \dot{y}_v(t) &= A(t)y_v(t) + B(t)v(t) \\ y_v(0) &= 0 \end{aligned}$$

é chamado *sistema linearizado* ao longo de  $(x_u, u)$ . O diferencial de Fréchet de  $E_T$  em  $u$  é a aplicação

$$dE_T(u) \cdot v = y_v(T) = \int_0^T M(T)M^{-1}(s)B(s)v(s) ds$$

onde  $M$  é a solução matricial de  $\dot{M} = AM$ ,  $M(0) = Id$ .

### 4.3 Controlos singulares

Seja  $u$  um controlo definido sobre  $[0, T]$  tal que a trajectória partindo de  $x(0) = x_0$  é definida sobre  $[0, T]$ . Dizemos que o controlo  $u$  (ou a trajectória  $x_u$ ) é singular sobre  $[0, T]$  se o diferencial de Fréchet  $dE_T(u)$  da aplicação entrada-saída no ponto  $u$  não é sobrejectiva. Caso contrário dizemos que  $u$  é regular.

**Proposição 12.** *Sejam  $x_0$  e  $T$  fixos. Se  $u$  é um controlo regular, então  $E_T$  é uma aplicação aberta numa vizinhança de  $u$ .*

### 4.4 Conjunto acessível e controlabilidade

O conjunto acessível em tempo  $T$  para o sistema (9), denotado por  $A(T)$ , é o conjunto das extremidades em tempo  $T$  das soluções do sistema partindo de 0. Por outras palavras, é a imagem da aplicação entrada-saída em tempo  $T$ .

**Definição 13.** O sistema (9) diz-se controlável se

$$\bigcup_{T \geq 0} A(T) = \mathbb{R}^n .$$

Argumentos do tipo do teorema da função implícita permitem deduzir os resultados de *controlabilidade local* do sistema de partida a partir do estudo da controlabilidade do sistema linearizado (vide, e.g., [18]). Por exemplo, deduzimos do teorema de controlabilidade no caso linear a proposição seguinte.

**Proposição 14.** *Consideremos o sistema de controlo (9) onde  $f(0,0) = 0$ . Seja  $A = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$  e  $B = \frac{\partial f}{\partial u}(0,0)$ . Se*

$$\text{rank}(B|AB|\cdots|A^{n-1}B) = n$$

*então o sistema não linear (9) é localmente controlável em 0.*

Em geral o problema da controlabilidade é difícil. Diferentes abordagens são possíveis. Uma faz uso da Análise, outras da Geometria, outras ainda da Álgebra. O problema da controlabilidade está ligado, por exemplo, à questão de saber quando um determinado semi-grupo opera transitivamente. Existem também técnicas para mostrar, em certos casos, que a controlabilidade é global. Uma delas, importante, é a chamada «técnica de alargamento» (vide [17]).

#### 4.5 Existência de controlos óptimos

Para além de um problema de controlo, consideramos também um problema de optimização: de entre todas as soluções do sistema (9) unindo 0 a  $x_1$ , encontrar uma trajectória que minimiza (ou maximiza) uma certa função *custo*  $C(T, u)$ . Uma tal trajectória, se existir, diz-se *ótima* para esse custo. A existência de trajectórias óptimas depende da regularidade do sistema e do custo. Para um enunciado geral de existência vide, e.g., [17, 18]. Pode também acontecer que um controlo óptimo não exista na classe de controlos considerada, mas exista num espaço mais abrangente. Esta questão remete-nos para outra área importante: o estudo da regularidade das trajectórias óptimas. Francis Clarke e Richard Vinter deram um contributo importantíssimo nesta área, introduzindo o estudo sistemático da regularidade lipschitziana dos minimizantes no controlo óptimo linear [9, 10, 34]. Resultados gerais de regularidade lipschitziana das trajectórias minimizantes para sistemas de controlo não lineares podem ser encontrados em [29].

## 4.6 Princípio do Máximo de Pontryagin

Dado um problema de controlo óptimo para o qual estão garantidas as condições de existência e regularidade da solução óptima, como determinar os processos óptimos? A resposta a esta questão é dada pelo célebre *Princípio do Máximo de Pontryagin*. Para um estudo aprofundado das condições necessárias de optimalidade sugerimos [5, 26, 33].

Começamos por mostrar que uma trajectória singular pode ser parametrizada como a projecção de uma solução de um sistema hamiltoniano sujeito a uma *equação de restrição*. Consideremos o *hamiltoniano* do sistema (9):

$$H : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, p, u) \mapsto H(x, p, u) = \langle p, f(x, u) \rangle$$

onde  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  denota o produto escalar usual de  $\mathbb{R}^n$ .

**Proposição 15.** *Seja  $u$  um controlo singular e  $x$  a trajectória singular associada a esse controlo em  $[0, T]$ . Então, existe um vector linha contínuo  $p : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  tal que as equações seguintes são verificadas para quase todo o  $t \in [0, T]$ :*

$$\dot{x}(t) = \frac{\partial H}{\partial p}(x(t), p(t), u(t)), \quad \dot{p}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}(x(t), p(t), u(t))$$

$$\frac{\partial H}{\partial u}(x(t), p(t), u(t)) = 0 \quad (\text{equação de restrição})$$

onde  $H$  é o hamiltoniano do sistema.

*Demonstração.* Por definição, o par  $(x, u)$  é singular sobre  $[0, T]$  se  $dE_T(u)$  não é sobrejectiva. Logo existe um vector linha  $\bar{p} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  tal que

$$\forall v(\cdot) \in L^\infty([0, T]) \quad \langle \bar{p}, dE_T(u) \cdot v \rangle = \bar{p} \int_0^T M(T)M^{-1}(s)B(s)v(s) ds = 0.$$

Consequentemente,

$$\bar{p}M(T)M^{-1}(s)B(s) = 0 \quad \text{em q.t.p. de } [0, T].$$

Seja  $p(t) = \bar{p}M(T)M^{-1}(t)$ ,  $t \in [0, T]$ . Temos que  $p$  é um vector linha de  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  e  $p(T) = \bar{p}$ . Diferenciando, obtemos

$$\dot{p}(t) = -p(t) \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), u(t)).$$

Introduzindo o hamiltoniano  $H(x, p, u) = \langle p, f(x, u) \rangle$  concluímos que

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) = \frac{\partial H}{\partial p}(x(t), p(t), u(t))$$

e

$$\dot{p}(t) = -p(t) \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), u(t)) = -\frac{\partial H}{\partial x}(x(t), p(t), u(t)).$$

A equação de restrição vem de  $p(t)B(t) = 0$  pois  $B(t) = \frac{\partial f}{\partial u}(x(t), u(t))$ .  $\square$

**Definição 16.** Ao vector linha  $p : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  da Proposição 15 chamamos *vector adjunto* do sistema (9).

#### 4.6.1 Princípio do Máximo fraco (Teorema de Hestenes)

Procuramos condições necessárias de optimalidade. Consideremos o sistema (9). Os controlos  $u(\cdot) \in \mathcal{U}$  são definidos em  $[0, T]$  e tomam valores em  $\Omega = \mathbb{R}^m$  (não existem restrições aos valores dos controlos). As trajectórias associadas devem verificar  $x(0) = x_0$  e  $x(T) = x_1$ . O problema consiste em minimizar um custo da forma

$$C(u) = \int_0^T f^0(x(t), u(t)) dt, \quad (10)$$

onde  $f^0 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  é uma aplicação  $C^\infty$  e  $T$  está fixo.

Associamos ao sistema (9) o *sistema aumentado*

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t), u(t)) \\ \dot{x}^0(t) &= f^0(x(t), u(t)) \end{aligned} \quad (11)$$

e usamos a notação  $\tilde{x} = (x, x^0)$  e  $\tilde{f} = (f, f^0)$ . O problema reduz-se então à procura de uma trajectória solução de (11) com  $\tilde{x}_0 = (x_0, 0)$  e  $\tilde{x}_1 = (x_1, x^0(T))$  de tal modo que a última coordenada  $x^0(T)$  seja minimizada.

Seja  $\tilde{x}_0 = (x_0, 0)$  fixo. O conjunto dos estados acessíveis a partir de  $\tilde{x}_0$  para o sistema (11) é  $\tilde{A}(\tilde{x}_0, T) = \cup_{u(\cdot)} \tilde{x}(T, \tilde{x}_0, u)$ . Seja, agora,  $u^*$  um controlo e  $\tilde{x}^*$  a trajectória associada, solução do sistema aumentado (11) saindo de  $\tilde{x}_0 = (x_0, 0)$ . Se  $u^*$  é óptimo para o critério (10), então o ponto  $\tilde{x}^*(T)$  pertence à fronteira do conjunto  $\tilde{A}(\tilde{x}_0, T)$ . Com efeito, se assim não fosse existiria uma vizinhança do ponto  $\tilde{x}(T) = (x_1, x^0(T))$  em  $\tilde{A}(\tilde{x}_0, T)$  contendo um ponto  $\tilde{y}^*(T)$  solução do sistema (11) e tal que  $y^0(T) < x^0(T)$ , o que contradiz a optimalidade do controlo  $u^*$  (Figura 13). Consequentemente, o controlo  $\tilde{u}^*$  é, pela Proposição 12, um controlo singular para o sistema aumentado (11).

Usando a Proposição 15 obtemos o seguinte teorema.

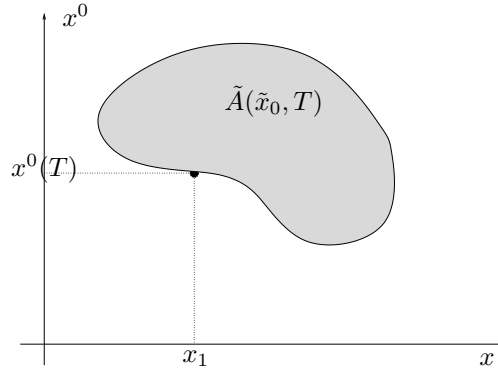


Figura 13: se  $u^*$  é óptimo, então  $\tilde{x}^*(T) \in \text{Fr } \tilde{A}(\tilde{x}_0, T)$ .

**Teorema 17** (Princípio do Máximo fraco – Teorema de Hestenes [16]). *Se  $u^*$  é um controlo óptimo, então existe uma aplicação  $\tilde{p}^* : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$  tal que  $(\tilde{x}^*, \tilde{p}^*, \tilde{u}^*)$  satisfaz o sistema hamiltoniano*

$$\dot{\tilde{x}}^*(t) = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{p}}(\tilde{x}^*(t), \tilde{p}^*(t), \tilde{u}^*(t)), \quad \dot{\tilde{p}}^*(t) = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{x}}(\tilde{x}^*(t), \tilde{p}^*(t), \tilde{u}^*(t)) \quad (12)$$

e a condição de estacionaridade

$$\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{u}}(\tilde{x}^*(t), \tilde{p}^*(t), \tilde{u}^*(t)) = 0, \quad (13)$$

onde  $\tilde{H}(\tilde{x}, \tilde{p}, u) = \langle \tilde{p}, \tilde{f}(\tilde{x}, u) \rangle$ .

O Teorema 17 tem a sua génese nos trabalhos de Graves de 1933, tendo sido obtido primeiramente por Hestenes em 1950 [16]. Trata-se de um caso particular do Princípio do Máximo de Pontryagin, onde não são consideradas restrições aos valores dos controlos (i.e.,  $u(t) \in \Omega$  com  $\Omega = \mathbb{R}^m$ ).

Escrevendo  $\tilde{p}^* = (\tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_n, p_0) = (\tilde{p}, p_0) \in (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}) \setminus \{0\}$ , onde  $p_0$  é a variável dual do custo e  $\dot{\tilde{p}}^*(t) = -\tilde{p}^*(t) \tilde{f}_{\tilde{x}}(\tilde{x}^*(t), u^*(t))$ , temos que  $(\tilde{p}, p_0)$  satisfaz o sistema

$$(\dot{\tilde{p}}, \dot{p}_0) = -(\tilde{p}, p_0) \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial f^0}{\partial x} & 0 \end{pmatrix}$$

e

$$\frac{\partial \tilde{H}}{\partial u} = 0 = p \frac{\partial f}{\partial u} + p_0 \frac{\partial f^0}{\partial u}$$

onde  $\tilde{H} = \langle \tilde{p}, \tilde{f}(x, u) \rangle = p \cdot f + p_0 f^0$ . Repare-se que  $\dot{p}_0(t) = 0$ , isto é,  $p_0(t)$  é constante em  $[0, T]$ . Como o vector  $\tilde{p}^*(t)$  é definido a menos de uma constante multiplicativa, escolhe-se normalmente  $p_0 \leq 0$ .

**Definição 18.** Uma *extremal* do problema de controlo óptimo é um terno ordenado  $(x, p, u)$  solução das equações (12) e (13). Se  $p_0 = 0$ , dizemos que a extremal é anormal. Nesse caso ela não depende do custo e  $(x(t), u(t))$  é uma trajectória singular do sistema (9).

A designação *anormal* é histórica. Sabe-se hoje que os minimizantes anormais são frequentes e «normais» em muitos e variadíssimos problemas de optimização. Ao leitor interessado no estudo de extremais anormais sugerimos o livro [2].

#### 4.6.2 Princípio do Máximo de Pontryagin

O princípio do máximo de Pontryagin é uma versão forte do Teorema 17 onde são admitidas restrições sobre os valores dos controlos. A existência de tais restrições é imposta pelas aplicações e altera por completo a natureza das soluções. O princípio do máximo de Pontryagin é muito mais difícil de demonstrar do que o Teorema de Hestenes (vide, e.g., [18, 24]). Para uma abordagem simples ao princípio do máximo de Pontryagin sugerimos dois livros excelentes escritos em língua Portuguesa: [19, 26]. O enunciado geral é o seguinte.

**Teorema 19** (Princípio do Máximo de Pontryagin). *Considere-se o sistema de controlo em  $\mathbb{R}^n$*

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)),$$

onde  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  é de classe  $C^1$  e onde os controlos são aplicações mensuráveis e limitadas, definidos no intervalo  $[0, t(u)]$  de  $\mathbb{R}$ . Denotemos por  $\mathcal{U}$  o conjunto dos controlos admissíveis cujas trajectórias associadas unem um ponto inicial de  $M_0$  a um ponto final de  $M_1$ . Para um tal controlo definimos o custo

$$C(u) = \int_0^{t(u)} f^0(x(t), u(t)) dt,$$

onde  $f^0 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  é de classe  $C^1$ .

Se o controlo  $u \in \mathcal{U}$  é óptimo em  $[0, t_*]$ , então existe uma aplicação não trivial (i.e., não identicamente nula)  $(p(\cdot), p^0) : [0, t_*] \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$  absolutamente contínua, chamada vector adjunto, onde  $p^0$  é uma constante negativa ou nula, tal que a trajectória óptima  $x$  associada ao controlo  $u$  verifica, em quase todos os pontos de  $[0, t_*]$ , o sistema hamiltoniano

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p}(x, p, p^0, u), \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x}(x, p, p^0, u)$$

e a condição do máximo

$$H(x(t), p(t), p^0, u(t)) = \max_{v \in \Omega} H(x(t), p(t), p^0, v), \quad q.t.p. \ t \in [0, t_*],$$

onde o hamiltoniano  $H$  é dado por  $H(x, p, p^0, u) = \langle p, f(x, u) \rangle + p^0 f^0(x, u)$ . Além disso, tem-se para todo o  $t \in [0, t_*]$  que

$$\max_{v \in \Omega} H(x(t), p(t), p^0, v) = 0. \quad (14)$$

Se  $M_0$  e/ou  $M_1$  são variedades de  $\mathbb{R}^n$  com espaços tangentes  $T_{x(0)}M_0$  em  $x(0) \in M_0$  e  $T_{x(t_*)}M_1$  em  $x(t_*) \in M_1$ , então o vector adjunto satisfaz as seguintes condições de transversalidade:

$$p(0) \perp T_{x(0)}M_0 \quad e \quad p(t_*) \perp T_{x(t_*)}M_1.$$

*Observação 20.* No Teorema 19 o tempo final é livre. Se impusermos um tempo final fixo igual a  $T$ , isto é, se procuramos, partindo de  $M_0$ , atingir o alvo  $M_1$  em tempo  $T$  e minimizando o custo  $C(u)$  em  $[0, T]$  (problema a tempo fixo), então o teorema continua verdadeiro, salvo a condição (14) que deve ser substituída por

$$\max_{v \in \Omega} H(x(t), p(t), p^0, v) = \text{const} \quad \forall t \in [0, T]$$

(com constante não necessariamente nula).

*Observação 21.* O problema de tempo mínimo corresponde ao caso em que  $f^0 = 1$ .

*Observação 22.* Se o conjunto alvo  $M_1$  é igual a todo o  $\mathbb{R}^n$  (problema com extremidade final livre), então a condição de transversalidade no instante final diz-nos que  $p(t_*) = 0$ .

O princípio do máximo de Pontryagin é um resultado profundo e importante da Matemática contemporânea, com inúmeras aplicações na Física, Biologia, Gestão, Economia, Ciências Sociais, Engenharia, etc. (vide, e.g., [4]).

#### 4.7 Exemplo: controlo óptimo de um oscilador harmónico (caso não linear)

Reconsideremos o exemplo (não linear) da mola, modelado pelo sistema de controlo

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= y(t), \\ \dot{y}(t) &= -x(t) - 2x(t)^3 + u(t), \end{aligned}$$

onde admitimos como controlos todas as funções  $u(\cdot)$  seccionalmente contínuas tais que  $|u(t)| \leq 1$ . O objectivo consiste em levar a mola de uma posição inicial qualquer  $(x_0, y_0 = \dot{x}_0)$  à sua posição de equilíbrio  $(0, 0)$  em tempo mínimo  $t_*$ .

Apliquemos o Princípio do Máximo de Pontryagin a este problema. O hamiltoniano tem a forma

$$H(x, y, p_x, p_y, p^0, u) = p_x y + p_y(-x - 2x^3 + u) + p^0.$$

Se  $(x, y, p_x, p_y, p^0, u)$  é uma extremal, então

$$\dot{p}_x = -\frac{\partial H}{\partial x} = p_y(1 + 6x^2) \quad \text{e} \quad \dot{p}_y = -\frac{\partial H}{\partial y} = -p_x.$$

Notemos que uma vez que o vector adjunto  $(p_x, p_y, p^0)$  deve ser não trivial,  $p_y$  não pode anular-se num intervalo (senão teríamos igualmente  $p_x = -\dot{p}_y = 0$  e, por anulação do hamiltoniano, teríamos também  $p^0 = 0$ ). Por outro lado, a condição do máximo dá-nos

$$p_y u = \max_{|v| \leq 1} p_y v(t).$$

Em particular, os controlo óptimos são sucessivamente iguais a  $\pm 1$ , isto é, verifica-se o princípio *bang-bang* (vide, e.g., [18, 21]). Concretamente, podemos afirmar que

$u(t) = \text{sinal}(p_y(t))$  onde  $p_y$  é a solução de

$$\begin{cases} \ddot{p}_y(t) + p_y(t)(1 + 6x(t)^2) = 0 \\ p_y(t_*) = \cos \alpha, \quad \dot{p}_y(t_*) = -\text{sen} \alpha, \end{cases}$$

$\alpha \in [0, 2\pi[$ . Invertendo o tempo ( $t \mapsto -t$ ) o nosso problema é equivalente ao problema de tempo mínimo para o sistema

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -y(t) \\ \dot{y}(t) = x(t) + 2x(t)^3 - \text{sinal}(p_y(t)) \\ \dot{p}_y(t) = p_x(t) \\ \dot{p}_x(t) = -p_y(t)(1 + 6x(t)^2). \end{cases}$$

Dadas as condições iniciais  $x_0$  e  $\dot{x}_0$  (posição e velocidade inicial da massa), o problema é facilmente resolvido. O leitor interessado encontra em [33] uma resolução efectuada com o sistema de computação algébrica Maple. Sobre o uso do Maple no cálculo das variações e controlo óptimo veja-se [15, 20].



## Nota final

A Teoria Matemática dos Sistemas e Controlo é ensinada nas instituições dos autores, nos Departamentos de Matemática da Universidade de Aveiro e da Universidade de Orléans, França. Em Aveiro no âmbito do Mestrado *Matemática e Aplicações*, especialização em *Matemática Empresarial e Tecnológica* [35], e no âmbito do *Programa Doutoral em Matemática e Aplicações* — este último uma associação entre os Departamentos de Matemática da Universidade de Aveiro e da Universidade do Minho [36]; em Orléans na opção «Controlo Automático» do Mestrado PASSION [37]. O primeiro autor foi aluno de Mestrado em Aveiro e faz actualmente um doutoramento em Aveiro e Orléans na área do Controlo Óptimo, com o apoio financeiro da FCT, bolsa SFRH/BD/27272/2006.

Agradecemos a um revisor anónimo a apreciação cuidada e as numerosas e pertinentes observações, comentários e sugestões.

## Referências

- [1] A. A. Agrachev, Y. L. Sachkov. *Control theory from the geometric viewpoint*, Encyclopaedia Math. Sci., 87, Springer, Berlin, 2004.
- [2] A. V. Arutyunov, *Optimality conditions – Abnormal and degenerate problems*, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2000.
- [3] A. Bressan and B. Piccoli, *Introduction to the mathematical theory of control*, American Institute of Mathematical Sciences (AIMS), Springfield, MO, 2007.
- [4] A. E. Bryson Jr. Optimal control – 1950 to 1985, *IEEE Control Syst. Mag* **16** (1996), no. 3, 26–33.
- [5] F. H. Clarke. *Optimization and nonsmooth analysis*, Wiley, New York, 1983.
- [6] F. H. Clarke. Nonsmooth analysis in control theory: a survey, *Eur. J. Control* **7** (2001), 63–78.
- [7] F. H. Clarke. Necessary conditions in dynamic optimization, *Mem. Amer. Math. Soc.* **173**, 2005.
- [8] F. H. Clarke, Yu. S. Ledyaev, R. J. Stern, P. R. Wolenski. *Nonsmooth analysis and control theory*, Springer, New York, 1998.

- [9] F. H. Clarke, R. B. Vinter. Regularity properties of solutions to the basic problem in the calculus of variations, *Trans. Amer. Math. Soc.* **289** (1985), no. 1, 73–98.
- [10] F. H. Clarke, R. B. Vinter. Regularity properties of optimal controls, *SIAM J. Control Optim.* **28** (1990), no. 4, 980–997.
- [11] J. M. Coron, E. Trélat. *Tout est sous contrôle*, *Plein Sud — Spécial Recherche*, 2004, 126–131.
- [12] J. M. Coron, E. Trélat. *Tout est sous contrôle*, *Matapli* 83, 2007, 59–73.
- [13] R. A. C. Ferreira, D. F. M. Torres. Higher-order calculus of variations on time scales, *Mathematical Control Theory and Finance*, Springer, 2008, 149–159.
- [14] G. N. Galbraith, R. B. Vinter. Optimal control of hybrid systems with an infinite set of discrete states, *J. Dynam. Control Systems* **9** (2003), no. 4, 563–584.
- [15] P. D. F. Gouveia, D. F. M. Torres. Automatic computation of conservation laws in the calculus of variations and optimal control, *Comput. Methods Appl. Math.* **5** (2005), no. 4, 387–409.
- [16] M. R. Hestenes. An Elementary Introduction to the Calculus of Variations, *Math. Mag.* **23** (1950), no. 5, 249–267.
- [17] V. Jurdjevic. *Geometric control theory*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997.
- [18] E. B. Lee, L. Markus. *Foundations of optimal control theory*, Wiley, New York, 1967.
- [19] A. Leitão. *Cálculo Variacional e Controle Ótimo*, Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), Rio de Janeiro, 2001.
- [20] A. M. F. Louro, D. F. M. Torres. Computação Simbólica em Maple no Cálculo das Variações, *Bol. Soc. Port. Mat.* **59** (2008), 13–30.
- [21] J. W. Macki, A. Strauss. *Introduction to optimal control theory*, Springer, New York, 1982.
- [22] N. Martins, D. F. M. Torres. Calculus of Variations on Time Scales with Nabla Derivatives, *Nonlinear Anal.*, in press. DOI: 10.1016/j.na.2008.11.035

- 
- [23] E. J. McShane. The calculus of variations from the beginning through optimal control theory, *SIAM J. Control Optim.* **27** (1989), no. 5, 916–939.
- [24] L. S. Pontryagin, V. G. Boltyanskii, R. V. Gamkrelidze, E. F. Mishchenko. *The mathematical theory of optimal processes*, Translated from the Russian by K. N. Trilogoff; edited by L. W. Neustadt, Interscience Publishers John Wiley & Sons, Inc. New York, 1962.
- [25] C. J. Silva, D. F. M. Torres. Two-dimensional Newton’s problem of minimal resistance, *Control Cybernet.* **35** (2006), no. 4, 965–975.
- [26] G. Smirnov, V. Bushenkov. *Curso de Optimização – Programação Matemática, Cálculo de Variações, Controlo Ótimo*, Escolar Editora, 2005.
- [27] E. D. Sontag. *Mathematical control theory*, Springer, New York, 1990.
- [28] H. J. Sussmann, J. C. Willems. *300 Anos de Controlo Optimal: da Braquistócrona ao Princípio do Máximo*, *Bol. Soc. Port. Mat.* **45** (2001), 21–54.
- [29] D. F. M. Torres. Lipschitzian regularity of the minimizing trajectories for nonlinear optimal control problems, *Math. Control Signals Systems* **16** (2003), no. 2-3, 158–174.
- [30] D. F. M. Torres, A. Yu. Plakhov. Optimal control of Newton-type problems of minimal resistance, *Rend. Semin. Mat. Univ. Politec. Torino* **64** (2006), no. 1, 79–95.
- [31] E. Trélat. Théorie du contrôle: contrôle optimal et stabilisation, *Microcoop* **55** (2008), 14–15.
- [32] E. Trélat. *Introduction au contrôle optimal*, *Revue de Math. Spé, Math. Concrètes* 3, 2002/2003.
- [33] E. Trélat. *Contrôle optimal*, Vuibert, Paris, 2005.
- [34] R. Vinter. *Optimal control*, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2000.
- [35] <http://www.mat.ua.pt/PageCourse.aspx?id=123&b=1>
- [36] <http://www.mat.ua.pt/PageText.aspx?id=6248>
- [37] <http://www.univ-orleans.fr/mapmo/membres/trelat/masterPASSION.html>