Séminaire BOURBAKI Mars 2016
68ème année, 2015-2016, n° 1113

SINGULIÈRES MINIMISANTES EN GÉOMÉTRIE SOUS-RIEMANNIENNE [d'après Hakavuori, Le Donne, Leonardi, Monti...]

par **Ludovic RIFFORD**

INTRODUCTION

Soit M une variété lisse (c'est-à-dire de classe C^∞), connexe, sans bord, de dimension $n \geq 3$. Une structure sous-riemannienne (Δ, g) sur M correspond à la donnée d'une distribution lisse de rang constant $m \in [2, n-1]$ totalement non holonome Δ et d'une métrique lisse g sur Δ. Rappelons que si Δ est représentée localement (disons sur un ouvert $\mathcal{V}$) comme le sous-espace vectoriel engendré par une famille de m champs de vecteurs lisses $X^1, \ldots, X^m$ sur $\mathcal{V}$ alors la propriété de totale non-holonomie signifie que

$$T_xM = \mathrm{Lie}\left\{X^1, \ldots, X^m\right\}(x) \qquad \forall x \in \mathcal{V},$$

où $\mathrm{Lie}\{X^1, \ldots, X^m\}$ désigne la sous-algèbre de Lie engendrée par les champs $X^1, \ldots, X^m$. Cette propriété apparaît parfois sous le nom de condition du rang ou de condition de Hörmander. Étant donnée une structure sous-riemannienne (Δ, g) sur M, on appelle courbe horizontale toute courbe $\gamma : [a, b] \to M$ absolument continue à dérivée dans L^2 telle que

$$\dot\gamma(t) \in \Delta(\gamma(t)) \qquad \text{pour presque tout } t \in [a, b],$$

ce qui permet de définir sa longueur pour la métrique g par

$$\mathrm{long}^g(\gamma) = \int_a^b \|\dot\gamma(t)\|_{\gamma(t)}\, dt.$$

Le théorème de Chow-Rashevski qui constitue le point de départ de la géométrie sous-riemannienne affirme que toute paire de points peut être jointe par une courbe horizontale (rappelons que M est supposée connexe), c'est-à-dire que pour tous x, y dans M il existe une courbe horizontale $\gamma : [0, 1] \to M$ telle que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$. Ce résultat de « connexité horizontale » permet de définir une métrique sur M relativement à (Δ, g) ; on définit $d_{SR} = d^{(\Delta,g)} : M \times M \to [0, +\infty[$ par

$$d_{SR}(x, y) = \inf\left\{\mathrm{long}^g(\gamma) \,|\, \gamma : [0, 1] \to M, \text{ hor.}, \gamma(0) = x, \gamma(1) = y\right\}.$$

On obtient ainsi un espace métrique (M, d_{SR}) qui définit en fait la même topologie que M, on parle d'espace de Carnot-Carathéodory.

La géométrie sous-riemannienne, c'est-à-dire l'étude des espaces de Carnot-Carathéodory, est en lien avec de nombreux domaines des mathématiques. Nous renvoyons par exemple le lecteur au texte [Kup] du séminaire Bourbaki donné par Ivan Kupka en juin 1996 pour des présentations claires et détaillées de différents problèmes sous-riemanniens en théorie des équations aux dérivées partielles, en théorie géométrique de la mesure, ou en théorie des probabilités. L'objectif de ce texte, qui n'a pas la prétention de faire suite à celui de Kupka au spectre très large, est de faire le point sur quelques questions ouvertes majeures de la géométrie sous-riemannienne en lien direct avec la présence possible de singulières minimisantes. Après avoir décrit brièvement ce phénomène typiquement sous-riemannien dans la section suivante, nous nous attacherons donc à présenter quelques-uns des résultats phares obtenus ces vingt dernières années sur ces questions, avec une attention particulière pour une série de travaux sur la régularité des singulières minimisantes dus à Leonardi-Monti [LM] et Hakavuori-Le Donne [HL].

Avant d'entrer dans le vif du sujet, je tiens à remercier chaleureusement Frédéric Jean, Enrico Le Donne et tout spécialement Roberto Monti et ses précieuses notes scannées pour les nombreux échanges qu'on a pu avoir pendant la préparation de ce texte. Je remercie également Aris Daniilidis et Alex Ioffe pour les discussions qu'on a eues en rapport avec les implications possibles du théorème 2.10.

1. GÉODÉSIQUES MINIMISANTES

Nous renvoyons le lecteur aux ouvrages de Montgomery [Mon2], Agrachev-Barilari-Boscain [ABB] et de l'auteur [Rif2] pour plus de détails sur le matériel présenté dans cette section.

Fixons une structure sous-riemannienne (Δ, g) sur M, supposons l'espace métrique (M, d_{SR}) complet et fixons deux points distincts x et y dans M. Par une version sous-riemannienne du théorème de Hopf-Rinow, l'hypothèse de complétude garantit l'existence de courbes réalisant l'infimum dans la définition de d_{SR} (dorénavant toutes les structures sous-riemaniennes considérées seront implicitement supposées complètes). Considérons donc une courbe horizontale $\bar{\gamma} : [0,1] \to M$ joignant x à y telle que

$$d^g(x, y) = \mathrm{long}^g(\bar{\gamma}).$$

Comme dans le cas riemannien, pour trouver des conditions d'optimalité il est plus intéressant de travailler avec des courbes minimisantes ayant une vitesse constante et donc avec des courbes horizontales minimisant l'énergie sous-riemannienne

$$e_{SR}(x, y) = \inf \left\{ \mathrm{energy}^g(\gamma) \,|\, \gamma : [0,1] \to M, \text{ hor.}, \gamma(0) = x, \gamma(1) = y \right\},$$

où pour toute courbe horizontale $\gamma : [0,1] \to M$ l'énergie de γ est définie par

$$\mathrm{energy}^g(\gamma) = \int_0^1 \|\dot{\gamma}(t)\|^2_{\gamma(t)} \, dt.$$

Quitte à reparamétrer $\bar{\gamma}$ nous pouvons donc supposer que $\bar{\gamma}$ minimise $e_{SR}(x,y)$.

On appelle géodésique minimisante toute courbe horizontale non triviale (*i.e.* non constante) à vitesse constante (c'est-à-dire dont la norme des dérivées est constante) qui minimise la distance entre ses deux extrémités.

Afin d'exploiter le fait que $\bar{\gamma}$ minimise l'énergie parmi les courbes horizontales joignant x à y, il est utile de paramétrer l'ensemble de ces courbes ou au moins celles partant de x par un ensemble de contrôles. Comme la courbe $\bar{\gamma}$ est minimisante entre ses extrémités elle n'a pas d'auto-intersection et donc on peut paramétrer la distribution Δ par une famille de m champs linéairement indépendants le long de $\bar{\gamma}([0,1])$. Ainsi, il existe un voisinage ouvert $\mathcal{V}$ de $\bar{\gamma}([0,1])$ et m champs de vecteurs lisses $X^1,\ldots,X^m$ sur $\mathcal{V}$ tels que

$$\Delta(x) = \mathrm{Vect}\left\{X^1(x),\ldots,X^m(x)\right\} \qquad \forall x \in \mathcal{V}.$$

On peut de plus supposer que la famille $\{X^1,\ldots,X^m\}$ est orthonormée pour la métrique g. Par construction, pour toute courbe horizontale $\gamma : [0,1] \to \mathcal{V}$ telle que $\gamma(0) = x$, il existe un contrôle $u \in L^2([0,1];\mathbb{R}^m)$ tel que

$$\dot{\gamma}(t) = \sum_{i=1}^{m} u_i(t)\, X^i(\gamma(t)) \quad \text{pour presque tout } t \in [0,1]. \tag{1}$$

Réciproquement, pour tout contrôle $u \in L^2([0,1];\mathbb{R}^m)$ tel que la solution $\gamma_u : [0,1] \to \mathcal{V}$ du système de contrôle (1) vérifiant $\gamma_u(0) = x$ est bien définie, c'est-à-dire pour tout u dans un certain ouvert $U \subset L^2([0,1];\mathbb{R}^m)$, la courbe $\gamma_u : [0,1] \to \mathcal{V}$ est bien une courbe horizontale. On définit l'application « End-Point mapping » de la manière suivante

$$\begin{array}{rccc} E^{x,1} : & U & \longrightarrow & M \\ & u & \longmapsto & \gamma_u(1). \end{array}$$

À chaque contrôle u dans U, l'application $E^{x,1}$ associe le point final de la courbe horizontale partant de x et solution de (1) ; $E^{x,1}$ a la même régularité que la distribution, elle est de classe C^∞. Soit $\bar{u}$ le contrôle de U tel que $\gamma_{\bar{u}} = \bar{\gamma}$. Notons que, comme la famille $\{X^1,\ldots,X^m\}$ est orthonormée, on a pour tout $u \in U$,

$$\mathrm{energy}^g(\gamma_u) = \|u\|_{L^2}^2.$$

Ainsi, par hypothèse, pour tout contrôle $u \in U$ tel que $E^{x,1}(u) = y$ l'énergie de la courbe γ_u, soit $\|u\|_{L^2}^2$, est supérieure ou égale à $\mathrm{energy}^g(\bar{\gamma}) = \|\bar{u}\|_{L^2}^2$. En d'autres termes, le contrôle $\bar{u}$ est solution du problème d'optimisation avec contrainte

$$\inf\left\{\|u\|_{L^2}^2 \,|\, u \in U,\, E^{x,1}(u) = y\right\}.$$

Par le théorème des multiplicateurs de Lagrange, on en déduit l'existence d'un couple non nul (λ_0,λ) dans $\mathbb{R} \times T_y^*M$ tel que (on pose $C(u) = \|u\|_{L^2}^2$)

$$\lambda \cdot d_{\bar{u}}E^{x,1} = \lambda_0\, d_{\bar{u}}C. \tag{2}$$

Deux cas peuvent se présenter, soit $\lambda_0 \neq 0$, soit $\lambda_0 = 0$. Dans le premier cas, γ_u va être la projection d'une solution d'un système hamiltonien dans T^*M, et dans le deuxième cas γ_u correspondra à la projection d'une solution d'un système de contrôle hamiltonien dans T^*M. Étant donné un hamiltonien $h : T^*M \to \mathbb{R}$ (de classe au moins C^1) on note $\vec{h}$ le champ de vecteur hamiltonien sur T^*M associé à h pour la structure symplectique canonique sur T^*M, de plus on pose $T^\sharp M = T^*M \setminus \{0\}$.

Proposition 1.1. — *Les deux propriétés suivantes sont vérifiées :*

1. (Cas normal) *L'équation (2) est vérifiée pour* $(1, \lambda)$ *si et seulement si il existe un relèvement* $\psi : [0,1] \to T^\sharp M$ *de* $\bar{\gamma}$*, appelé extrémale normale, solution de* $\dot{\psi} = \vec{H}(\psi)$ *tel que* $\psi(1) = (y, \lambda/2)$ *pour l'hamiltonien* $H : T^*M \to \mathbb{R}$ *défini par*
$$H(\psi) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\left[p \cdot X^i(x)\right]^2 \qquad \forall \psi = (x,p) \in T^*M.$$
2. (Cas anormal) *L'équation (2) est vérifiée pour* $(0, \lambda)$ *si et seulement si il existe un relèvement* $\psi : [0,1] \to T^\sharp M$ *de* $\bar{\gamma}$*, appelé extrémale anormale, solution de*
$$\dot{\psi}(t) = \sum_{i=1}^{m} u_i(t)\vec{h}^i(\psi(t)) \quad \textit{pour presque tout } t \in [0,1]$$
tel que $\psi(1) = (y, \lambda/2)$ *et*
$$h^i(\psi(t)) = 0 \qquad \forall t \in [0,1],$$
où les hamiltoniens $h^1, \ldots, h^m : T^*M \to \mathbb{R}$ *sont définis par*
$$h^i(\psi) = p \cdot X^i(x) \qquad \forall \psi = (x,p) \in T^*M,\ \forall i = 1, \ldots, m.$$

Plusieurs remarques s'imposent.

Remarque 1.2. — Le lecteur averti aura reconnu ici les deux faces d'un même résultat classique de théorie géométrique du contrôle, le principe du maximum de Pontryagin. Pour le problème de contrôle optimal qui nous intéresse, il s'énonce comme suit. Pour $\lambda_0 = 0, 1$, on définit le pseudo-hamiltonien $H^{\lambda_0} : T^*M \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ par
$$H^{\lambda_0}(x,p,u) = p \cdot \sum_{i=1}^{m} u_i X^i(x) - \frac{\lambda_0}{2}\sum_{i=1}^{m} u_i^2 \qquad \forall (x,p) \in T^*M,\ \forall u \in \mathbb{R}^m.$$
Comme $\bar{u}$ minimise l'énergie $\|u\|_{L^2}^2$ parmi tous les contrôles menant x à y ($\gamma_u(0) = x$ et $\gamma_u(1) = y$ avec γ_u solution de (1)), il existe $\lambda_0 \in \{0,1\}$ et un arc absolument continu $\psi : [0,1] \to T^\sharp M$ solution du système hamiltonien dépendant du temps $\dot{\psi} = \vec{H}(t)(\psi)$ avec $H(t) = H^{\lambda_0}(x,p,u(t))$ et de plus on a pour presque tout $t \in [0,1]$,
$$H(x(t), p(t), u(t) = \max\Big\{H(x(t), p(t), v) \,|\, v \in \mathbb{R}^m\Big\}.$$
Nous renvoyons par exemple le lecteur aux ouvrages [ASach, Cla, Jur, Vin] pour plus de détails sur le principe du maximum de Pontryagin.

Remarque 1.3. — Dans le cas normal ($\lambda_0 = 1$), $\bar{\gamma}$ sera automatiquement lisse. En effet, elle sera la projection d'une extrémale normale solution d'un système hamiltonien lisse. Remarquons en outre que l'hamiltonien H peut aussi être défini de manière intrinsèque par la formule (voir [Kup])

$$H(x,p) = \frac{1}{2}\left\{ \frac{p(v)}{g_x(v,v)}\, v \in \Delta(x) \setminus \{0\} \right\} \qquad \forall (x,p) \in T^*M.$$

Le flot associé à H est appelé flot géodésique hamiltonien.

Remarque 1.4. — Le cas anormal ($\lambda_0 = 0$) correspond au cas où un covecteur non trivial annule l'image de $d_{\bar{u}}E^{x,1}$, c'est-à-dire au cas où $E^{x,1}$ n'est pas une submersion en $\bar{u}$. Un tel contrôle est dit singulier et la courbe horizontale $\bar{\gamma} = \gamma_{\bar{u}}$ qui lui est associée est dite singulière. Cette notion de courbe horizontale singulière peut en fait être étendue à l'ensemble des courbes horizontales (nous nous sommes jusqu'à présent restreint aux courbes horizontales à valeurs dans $\mathcal{V}$). Pour cela il suffit de considérer la « End-Point mapping » $E^{x,1}$ associée à une famille de champs de vecteurs lisses $X^1, \ldots, X^k$ qui engendrent Δ sur tout M. Dans ce cas, les champs de vecteurs $X^1, \ldots, X^k$ ne sont pas forcément linéairement indépendants (car on peut avoir $k > m$) et donc une courbe horizontale $\gamma : [0,1] \to M$ partant de x n'est pas nécessairement représentée par un contrôle unique. Malgré cela la notion de courbe horizontale singulière est bien définie. Une courbe horizontale $\gamma : [0,1] \to M$ est dite singulière si elle est associée à un contrôle $u \in L^2([0,1];\mathbb{R}^k)$ (via (1)) qui est singulier pour l'application $E^{\gamma(0),1}$, c'est-à-dire tel que $E^{\gamma(0),1}$ n'est pas une submersion en u. Cette propriété de singularité d'une courbe horizontale donnée est totalement intrinsèque, elle ne dépend ni du contrôle choisi pour la paramétrer, ni de la famille de champs de vecteurs choisie pour paramétrer globalement Δ, ni en fait de la paramétrisation de la courbe. De plus, cette notion ne dépend que de la distribution, pas de la métrique. Comme dans le cas anormal de la proposition 1.1, on peut montrer qu'une courbe horizontale $\gamma : [a,b] \to M$ est singulière si et seulement si elle admet un relèvement $\psi : [a,b] \to T^\sharp M$ horizontal pour la distribution engendrée par les champs hamiltoniens $\vec{h}^1, \ldots, \vec{h}^k$ sur T^*M et contenue dans la sous-variété $\{h^1 = \ldots = h^k = 0\}$.

Remarque 1.5. — Les deux cas de la proposition 1.1 ne sont pas nécessairement exclusifs. L'ensemble $\mathcal{E}^1$ des solutions de l'équation (2) de la forme $(1,\lambda)$ est un espace-affine dans $\mathbb{R} \times T_y^*M$. S'il est de dimension ≥ 1, il existe $\bar{\lambda} \in T_y^*M$ tel que tout élément de $\mathcal{E}^1$ s'écrive sous la forme $(1,\bar{\lambda}) + (0,\lambda)$ avec $(0,\lambda)$ solution de (2). Dans ce cas, tout relèvement normal de $\bar{\gamma}$ sera de la forme $\bar{\psi} + \psi$ où $\bar{\psi} = (\bar{\gamma}, \bar{p})$ est le relèvement normal de $\bar{\gamma}$ associé à $\bar{\lambda}$ (*i.e.* $\bar{\psi}(1) = (y, \bar{\lambda}/2)$) et ψ est un relèvement anormal de $\bar{\gamma}$ (on définit $\bar{\psi} + \psi$ par $(\bar{\gamma}, \bar{p} + p)$). On a une correspondance exacte entre les éléments de $\mathcal{E}^1$ et les relèvement normaux de $\bar{\gamma}$. De la même manière, on a une correspondance exacte entre les relèvements anormaux de $\bar{\gamma}$ et les solutions de (2) de la forme $(0,\lambda)$.

Pour résumer, on a le résultat suivant (on adopte ici une terminologie qui consiste à accoler deux épithètes, un premier qui porte sur la singularité de la courbe donc sur une notion qui ne dépend que de la distribution, et un deuxième en lien avec le flot géodésique hamiltonien associé à la structure sous-riemannienne) :

Proposition 1.6. — *Soit* (Δ, g) *une structure sous-riemannienne sur* M*, alors toute géodésique minimisante* γ *vérifie l'un des cas exclusifs suivants :*

1. (non singulière normale) γ *n'est pas singulière et est donc projection d'une unique extrémale normale ;*

2. (singulière normale) γ *est singulière et est projection d'une extrémale normale donc de plusieurs ;*

3. (singulière non normale) γ *est singulière et n'est pas projection d'une extrémale normale.*

Les trois cas cités dans la proposition 1.6 peuvent se présenter. Il est relativement facile de mettre en évidence les deux premiers cas. Pour le troisième cas, il a fallu attendre le début des années 90 et un papier de Montgomery [Mon1] pour avoir un premier exemple de structure sous-riemannienne admettant une géodésique minimisante singulière non normale. Depuis, de nombreux travaux ont permis d'avoir une meilleure compréhension de ce phénomène de singulières minimisantes c'est-à-dire de la présence possible de géodésique minimisante singulière non normale. Dans les sections suivantes, nous allons faire un état de l'art sur ces avancées qui portent sur trois types de questions :

Quand ? Quelles structures sous-riemanniennes admettent ou n'admettent pas de singulières minimisantes ?

Combien ? Une structure sous-riemannienne donnée peut-elle admettre beaucoup de singulières minimisantes ? Par exemple, quelle est la taille de l'ensemble des points qu'on peut atteindre par des singulières minimisantes issues d'un point donné ?

Comment ? À quoi ressemblent les singulières minimisantes, quelle est leur régularité ?

2. SINGULIÈRES MINIMISANTES

2.1. Sur l'absence de singulières minimisantes

Commençons par nous intéresser aux structures sous-riemanniennes qui n'admettent pas de géodésiques minimisantes singulières. Au premier rang de celles-ci figurent les structures qui n'admettent tout simplement pas de courbes horizontales singulières non triviales (non réduites à un point). C'est essentiellement le cas des distributions dites fat (nous préférons conserver la terminologie anglaise plus heureuse). Une distribution Δ

sur M est dite fat si, pour tout $x \in M$ et toute section lisse X de Δ tel que $X(x) \neq 0$, on a

$$T_xM = \Delta(x) + [X, \Delta](x),$$

où $[X, \Delta]$ désigne l'ensemble des crochets de la forme $[X, Z]$ avec Z une section lisse de Δ. Le résultat suivant est une conséquence facile de la caractérisation des courbes horizontales singulières donnée dans la remarque 1.4 (voir par exemple [Mon2] ou [Rif2]).

PROPOSITION 2.1. — *Soit (Δ, g) une structure sous-riemannienne sur M dont la distribution est fat, alors il n'existe pas de courbes horizontales singulières non triviales et a fortiori pas de géodésiques minimisantes singulières.*

Le premier exemple de distribution fat est donné par les distributions de contact c'est-à-dire les distributions correspondant au noyau d'une forme de contact. D'autres exemples existent mais relativement peu. Nous renvoyons le lecteur au livre de Montgomery [Mon2] pour d'autres exemples et pour une caractérisation due à Rayner [Ray] des couples (m, n) pour lesquels un germe de distribution fat existe.

Motivés par des propriétés de sous-analyticité de la fonction distance sous-riemannienne (dans le cas de structures analytiques), Agrachev et Sarychev ont mis en évidence dans [AS2] une classe de distributions pour lesquelles il n'existe pas de géodésiques minimisantes singulières non normales quelle que soit la métrique considérée. Une distribution Δ est dite medium-fat [AS2] si, pour tout $x \in M$ et toute section lisse X de Δ tel que $X(x) \neq 0$, on a

$$T_xM = \Delta(x) + [\Delta, \Delta](x) + [X, [\Delta, \Delta]](x),$$

où $[\Delta, \Delta](x)$ correspond à l'ensemble des vecteurs qu'on peut obtenir comme crochet de deux sections lisses de Δ en x et $[X, [\Delta, \Delta]](x)$ à l'ensemble des vecteurs de la forme $[X, [Y, Z]](x)$ avec Y, Z deux sections lisses de Δ. Cela inclut par exemple le cas des distributions de pas 2 (telles que $T_xM = \Delta(x) + [\Delta, \Delta](x)$ pour tout x). Par une étude de la End-Point mapping au second ordre (la propriété (2) est le résultat d'une étude au premier ordre), Agrachev et Sarychev ont obtenu la condition de Goh comme condition nécessaire d'optimalité pour certaines singulières minimisantes. Étant donnée une courbe horizontale singulière $\gamma : [0, 1] \to M$, on dit qu'un relèvement $\psi = (\gamma, p) : [0, 1] \to T^\sharp M$ de γ vérifie la condition dite de Goh si

$$p(t) \cdot [\Delta, \Delta](\gamma(t)) = 0 \qquad \forall t \in [0, 1].$$

Ce type de condition du second ordre porte ce nom car il remonte aux travaux de Goh sur des problèmes de contrôle optimal similaires dans les années soixante (voir [Goh]).

THÉORÈME 2.2 ([AS1, AS2]). — *Soient (Δ, g) une structure sous-riemannienne sur M et γ une géodésique minimisante singulière non normale. Alors il existe un relèvement anormal de γ qui vérifie la condition de Goh. En particulier, si Δ est medium-fat alors la structure (Δ, g) n'admet pas de géodésique minimisante singulière non normale.*

En fait, l'absence de singulières minimisantes singulières non normales est vraie pour des distributions de rang supérieur à trois génériques. Dans [CJT], Chitour, Jean et Trélat ont réussi le tour de force de mettre en œuvre une méthode développée par Bonnard et Kupka dans un contexte beaucoup plus simple (voir [BK]) pour obtenir, par des arguments de transversalité, le résultat suivant (voir aussi [AG]) :

THÉORÈME 2.3 ([CJT]). — *Il existe un ouvert dense $\mathcal{O}$ dans l'ensemble des distributions de dimension $m \geq 3$ pour la topologie C^∞ de Whitney tel que toute distribution dans $\mathcal{O}$ n'admet pas de singulière vérifiant la condition de Goh. En particulier, si (Δ, g) est une structure sous-riemannienne sur M telle que $D \in \mathcal{O}$, alors il n'y a pas de géodésique minimisante singulière non normale.*

On peut démontrer assez facilement que pour une structure sous-riemannienne générique toute courbe horizontale singulière n'est pas normale (voir [BH]). On en déduit le résultat suivant (voir aussi [AG]) :

COROLLAIRE 2.4. — *Il existe un ouvert dense dans l'ensemble des structures sous-riemanniennes de dimension $m \geq 3$ pour la topologie C^∞ tel que toute structure de cet ensemble n'admet pas de singulières minimisantes.*

Les résultats de généricité ci-dessus ne sont pas vrais dans le cas de distributions de rang 2 pour lesquelles la présence de géodésiques minimisantes singulières, normales ou non normales, est relativement fréquente.

2.2. Le cas des distributions de rang 2

L'exemple initial de Montgomery [Mon1] de structure sous-riemannienne admettant une géodésique minimisante singulière non normale porte sur une distribution de rang 2 en dimension 3 dite de Martinet. Soit $M = \mathbb{R}^3$ et Δ la distribution engendrée par les champs de vecteurs

$$X^1 = \partial_x, \quad X^2 = \partial_y + x^2 \, \partial_z.$$

En utilisant la caractérisation donnée dans la remarque 1.4, on vérifie assez facilement que les courbes horizontales singulières pour Δ correspondent exactement aux courbes qui sont horizontales pour le champ de droites donné par la trace de Δ sur la surface $\Sigma = \{x = 0\}$ qui sont en fait des droites de la forme $z = \text{cte}$. Dans [Mon1], Montgomery a démontré que pour toute métrique sur Δ, toute courbe horizontale singulière suffisamment courte est minimisante entre ses extrémités. Ainsi, en considérant des métriques dont les orbites du flot géodésique hamiltonien ne se projettent pas localement sur des droites de la forme $x = 0$, $z = \text{cte}$, on obtient des exemples de structures sous-riemanniennes admettant des géodésiques minimisantes singulières non normales. Liu et Sussmann ont suivi cette piste et obtenu des résultats de minimalités locales de courbes horizontales singulières pour des distributions de rang 2 en dimension quelconque.

Soient Δ une distribution de rang 2 dans M et $\gamma : [0,1] \to M$ une courbe horizontale singulière pour Δ. Comme nous l'avons expliqué dans la remarque 1.4, si Δ est paramétrée par deux champs de vecteurs lisses X^1et X^2 dans un voisinage de $\gamma([0,1])$

(imaginons que ce soit le cas) et si γ est associée au contrôle $u \in L^2([0,1];\mathbb{R}^2)$ alors il existe un relèvement $\psi = (\gamma, p) : [0,1] \to T^\sharp M$ de γ tel que

$$\dot{\psi}(t) = \sum_{i=1}^{m} u_i(t)\vec{h}^i(\psi(t)) \quad \text{pour presque tout } t \in [0,1]$$

et

$$h^1(\psi(t)) = h^2(\psi(t)) = 0 \qquad \forall t \in [0,1],$$

où $h^1, h^2 : T^*M \to \mathbb{R}$ sont définis par $h^i(\psi) = p \cdot X^i(x)$ pour tout $(x,p) \in T^*M$ et $i = 1, 2$. Ainsi, en dérivant les deux dernières égalités pour presque tout t dans $[0,1]$, on obtient

$$u_1(t)\, p(t) \cdot [X^1, X^2](\gamma(t)) = u_2(t)\, p(t) \cdot [X^1, X^2](\gamma(t)) = 0,$$

ce qui signifie que

$$p(t) \cdot [X^1, X^2](\gamma(t)) = 0,$$

dès lors que $u(t) = (u_1(t), u_2(t)) \neq 0$. Cette observation démontre que tout relèvement anormal $\psi = (\gamma, p) : [0,1] \to T^\sharp M$ d'une courbe horizontale γ (singulière) vérifie la condition de Goh

$$p(t) \cdot [\Delta, \Delta](\gamma(t)) = 0 \qquad \forall t \in [0,1].$$

Si M est de dimension 3, on en déduit que les courbes horizontales singulières sont contraintes de rester dans l'ensemble des points $x \in M$ tels que $T_xM \neq \Delta(x) + [\Delta, \Delta](x)$ (c'est-à-dire l'ensemble des points où Δ n'est pas de contact), ensemble dit de Martinet qui est rectifiable de dimension au plus 2 (voir [FR]). Si cet ensemble peut être correctement stratifié (par exemple dans le cas de structures analytiques), les courbes singulières correspondent alors aux concaténations de courbes horizontales pour les champs de droites (singuliers) donnés par la trace de Δ sur l'ensemble de Martinet (voir [Rif2, BBR]). En dimension supérieure, les équations $h^1(\psi(t)) = h^2(\psi(t)) = 0$ et la condition de Goh ne suffisent pas à déterminer les singulières, il faut reprendre des dérivées (voir [BBR]). En dérivant la condition de Goh, on obtient

$$u_1(t)\, p(t) \cdot [X^1, [X^1, X^2]](\gamma(t)) + u_2(t)\, p(t) \cdot [X^2, [X^1, X^2]](\gamma(t)) = 0,$$

pour presque tout t dans $[0,1]$, ce qui permet si l'un des facteurs de $u_1(t)$ et $u_2(t)$ est non nul d'exprimer la vitesse $\dot{\gamma}(t)$ (à un facteur près) en fonction de $(\gamma(t), p(t))$. Dans [LS] (voir aussi [Sus1]), Liu et Sussmann s'intéressent précisément aux extrémales anormales qui vivent dans l'ensemble $\mathcal{E}$ des $(x,p) \in T^\sharp M$ tels que $p \cdot \Delta(x) = p \cdot [\Delta, \Delta](x) = 0$ et $p \cdot [X^1, [X^1, X^2]](x)$ ou $p \cdot [X^2, [X^1, X^2]](x)$ n'est pas nul. Cet ensemble est une sous-variété de codimension 3 de $T^\sharp M$ dont l'espace tangent intersecte en tout point la distribution engendrée par $\vec{h}^1$ et $\vec{h}^2$ en une droite. Par construction, les projections des courbes horizontales pour ce champ de droites sont donc des courbes singulières pour Δ sur M.

Théorème 2.5 ([LS]). — *Soient* (Δ, g) *une structure sous-riemannienne sur* M *et* γ *une courbe horizontale singulière qui possède un relèvement dans* $\mathcal{E}$. *Alors* γ *est localement minimisante.*

Dans le cas général, on peut plus ou moins décrire les courbes horizontales singulières en regardant la trace de la distribution Δ relevée dans $T^\sharp M$ sur la sous-variété $\Delta^\perp$ des ψ qui annulent Δ, mais il est difficile d'étudier les courbes horizontales pour cette distribution qui peut être « très » singulière (son rang n'est pas forcément constant). Ce type de problème est en lien avec l'une des questions ouvertes majeures de la géométrie sous-riemannienne, la conjecture de Sard.

2.3. Conjectures de Sard sous-riemanniennes

Soit (Δ, g) une structure sous-riemannienne sur M (on rappelle que toutes les structures considérées sont supposées complètes). La conjecture de Sard minimisante porte sur la taille de l'ensemble qu'on peut atteindre par des singulières minimisantes partant d'un point donné. Étant donné x dans M, on définit l'ensemble $\mathcal{S}^x_{\Delta,min^g}$ par

$$\mathcal{S}^x_{\Delta,min^g} = \{\gamma(1) \,|\, \gamma : [0,1] \to M, \gamma(0) = x,\ \gamma \text{ hor. et sing., } \operatorname{long}^g(\gamma) = d_{SR}(x,\gamma(1))\}\,.$$

La résultat suivant est tout à fait plausible (voir [Agr2, RT]).

Conjecture 2.6 (Conjecture de Sard SR minimisante). — *L'ensemble* $\mathcal{S}^x_{\Delta,min^g}$ *est de mesure de Lebesgue nulle.*

Cette conjecture est par exemple vérifiée dans le cas de distributions medium-fat ou de co-rang 1 (voir [Rif2]). Les propriétés de l'ensemble $\mathcal{S}^x_{\Delta,min^g}$ attendues sont en fait directement reliées aux propriétés de l'exponentielle sous-riemannienne au point x. Contrairement au cas riemannien, l'exponentielle sous-riemanienne en x, notée $\exp_x$, est définie sur le fibré cotangent $T^*_x M$; elle est définie par

$$\begin{array}{rccc} \exp_x : & T^*_x M & \longrightarrow & M \\ & p & \longmapsto & \psi_p(1), \end{array}$$

où ψ_p est la solution du système géodésique hamiltonien telle que $\psi_p(0) = (x, p)$. Par construction, cette fonction est lisse et toute extrémale normale partant de $T^*_x M$ a pour projection une courbe horizontale dont le point final est dans l'image de l'exponentielle. Comme les projections d'extrémales normales suffisamment courtes sont des géodésiques minimisantes et comme les courbes « engendrées » par les points réguliers de $\exp_x$ (c'est-à-dire les $p \in T^*_x M$ tels que $d_p \exp_x$ est inversible) sont des courbes horizontales non singulières, grâce au théorème de Sard classique il y a un lien étroit entre la taille de $\mathcal{S}^x_{\Delta,min^g}$ et celle du complémentaire de l'image de la fonction $\exp_x$ (voir [Agr1, Rif2, RT]). À l'heure actuelle, le meilleur résultat connu sur la taille de $\exp_x(T^*_x M)$ est dû à Agrachev.

Théorème 2.7 ([Agr1]). — *Soit* (Δ, g) *une structure sous-riemannienne sur* M *; alors pour tout* $x \in M$, *l'ensemble* $\exp_x(T^*_x M)$ *contient un ouvert dense.*

Montrer la conjecture de Sard minimisante revient à montrer que $\exp_x(T_x^*M)$ (en fait l'image des p minimisants, ceux ayant pour « images » des géodésiques minimisantes) est de mesure pleine dans M. Cette conjecture est en fait la version minimisante d'une conjecture beaucoup plus forte appelée conjecture de Sard sous-riemannienne. Cette dernière porte sur la taille de l'ensemble atteignable par toutes les singulières (minimisantes ou non) issues d'un point donné. Soit $x \in M$, on définit l'ensemble $\mathcal{S}_\Delta^x$ par

$$\mathcal{S}_\Delta^x = \{\gamma(1) \,|\, \gamma : [0,1] \to M, \gamma(0) = x,\ \gamma \text{ hor. et sing.}\}.$$

Bien sûr, $\mathcal{S}_{\Delta,min^g}^x \subset \mathcal{S}_\Delta^x$. On peut penser que le résultat suivant est vrai :

Conjecture 2.8 (Conjecture de Sard SR). — *L'ensemble $\mathcal{S}_\Delta^x$ est de mesure de Lebesgue nulle.*

Très peu de résultats sont connus sur l'ensemble $\mathcal{S}_\Delta^x$ dans le cas de structures sous-riemanniennes quelconques. Nous renvoyons le lecteur à une très belle étude de la situation par Zelenko et Zhitomorskii [ZZ] dans le cas de distributions génériques de rang 2 en dimension 3 et à une discussion plus générale dans [Mon2]. La conjecture de Sard sous-riemannienne constitue avec le problème de régularité des singulières minimisantes l'un des deux problèmes majeurs de la géométrie sous-riemannienne.

2.4. Le problème de régularité

Comme nous l'avons vu dans la Proposition 1.6, une géodésique minimisante $\gamma : [0,1] \to M$ pour une structure sous-riemannienne (Δ, g) est soit non singulière normale, soit singulière normale, soit singulière non normale. Dans les deux premiers cas, γ sera automatiquement lisse, comme projection d'extrémale normale (voir remarque 1.3). Dans le troisième cas en revanche, il n'y a à première vue aucune obstruction pour que la courbe ne soit que lipschitzienne sans beaucoup plus de régularité (toute géodésique minimisante est nécessairement lipschitzienne car de vitesse bornée). Malgré tout, étant donné qu'on ne sait pas construire d'exemple de singulière minimisante non lisse (les efforts ne manquent pas, voir par exemple [Mont1]), on peut penser que, peut-être, la structure du problème fait qu'une géodésique minimisante doive nécessairement être de classe C^1 voire C^∞. Même si le problème de régularité des géodésiques minimisantes reste aujourd'hui ouvert, une série de travaux dus à Leonardi-Monti [LM], Hakavuori-Le Donne [HL] et Sussmann [Sus2] a quand même permis de mettre en lumière quelques propriétés intéressantes des singulières minimisantes.

Définition 2.9. — *Soit $\gamma : [a,b] \to M$ une courbe continue, on dit que γ a un coin en $t \in (a,b)$ si elle admet une dérivée à droite et à gauche en t et si celles-ci sont linéairement indépendantes dans $T_{\gamma(t)}M$.*

En s'appuyant sur un travail pionnier de Leonardi et Monti [LM], Hakavuori et Le Donne [HL] ont pu obtenir récemment le résultat suivant :

Théorème 2.10 ([HL]). — *Soit (Δ, g) une structure sous-riemannienne sur M, alors les géodésiques minimisantes n'ont pas de coin.*

Ce résultat est sans doute un pas important vers un hypothétique résultat de régularité pour les géodésiques minimisantes singulières non normales. Peut-être que, couplé aux descriptions des singulières qu'on peut faire dans le cas de distributions analytiques de rang 2 (voir §2.2), il peut impliquer quelque régularité. En fait, l'analycité en elle-même produit déjà des propriétés intéressantes. Dans le cas de distributions analytiques de rang quelconque, en stratifiant $T^\sharp M$ de manière convenable et par une récurrence astucieuse sur la dimension, Sussmann a obtenu le résultat a priori suivant :

Théorème 2.11 ([Sus2]). — *Soit (Δ, g) une structure sous-riemannienne analytique sur M supposée analytique. Alors toute géodésique minimisante est analytique sur un sous-ensemble ouvert et dense de son intervalle de définition.*

Nous venons de présenter les deux résultats les plus importants portant sur la régularité des géodésiques minimisantes singulières non normales. Nous renvoyons le lecteur aux publications [HL, LLMV, LM, Mont1, Mont2, Mont3, Sus2, Vit] pour l'essentiel des références sur ce problème et parfois quelques résultats de régularité supplémentaire dans des cas très particuliers. Le reste de ce texte est maintenant consacré à la démonstration du théorème 2.10.

3. PREUVE DU THÉORÈME DE HAKAVUORI-LE DONNE

Fixons une structure sous-riemannienne (Δ, g) sur M et donnons-nous une géodésique minimisante $\gamma : [a,b] \to M$ ayant un coin en $\bar{t} \in]a,b[$. Comme on va travailler localement au voisinage de $\gamma(\bar{t})$, quitte à travailler dans une carte et à dilater la métrique, on peut en fait supposer que $M = \mathbb{R}^n$, $\gamma(\bar{t}) = 0$, $\bar{t} = 0$, et que $b = -a = 1$. De plus, on peut paramétrer Δ dans M par une famille orthonormée de m champs de vecteurs lisses $X^1, \ldots, X^m$. Commençons par faire un peu d'analyse en approchant les champs $X^1, \ldots, X^m$ par des champs homogènes afin d'obtenir l'existence d'un arc brisé horizontal minimisant dans un certain espace de Carnot-Carathéodory.

3.1. Approximations nilpotentes

Avant d'énoncer le résultat d'approximation nilpotente dorénavant classique sur lequel repose la suite, il nous faut construire différents objets associés à la distribution en $0 = \gamma(\bar{t})$. On renvoie le lecteur aux textes de Bellaïche [Bel] et Jean [Jea] pour plus de détails sur ces constructions.

Le vecteur de croissance $(n_1, \ldots, n_s)$ associé à Δ en 0 correspond au rang des distributions singulières successives en 0 définies à partir de Δ. En d'autres termes, en considérant le sous-module $\tilde{\Delta}$ (sur l'anneau des fonctions lisses) de champs de vecteurs engendré par les sections lisses de Δ, on définit la suite de sous-modules $\{\tilde{\Delta}^s\}_{s\geq 0}$ par

$$\tilde{\Delta}^0 = \{0\}, \qquad \tilde{\Delta}^{s+1} = \tilde{\Delta}^s + \left[\tilde{\Delta}, \tilde{\Delta}^s\right],$$

où $[\tilde{\Delta}, \tilde{\Delta}^s] = \mathrm{Vect}\{[X,Y] \mid X \in \tilde{\Delta},\, Y \in \tilde{\Delta}^s\}$, puis on pose

$$n_s = n_s(0) = \dim\left(\tilde{\Delta}^s(0)\right) \qquad \forall s \geq 0.$$

Le degré de non-holonomie de Δ en 0, noté r, est défini comme le minimum des $s \geq 1$ tel que $\tilde{\Delta}^s(0) = T_xM = \mathbb{R}^n$ et son vecteur de croissance en 0 est défini par $(n_1 = m, n_2, \ldots, n_r = n)$. Cela permet de construire la famille de poids $w_1, \ldots, w_n$ associée à Δ en 0 en posant pour tout entier s dans $[1, r]$

$$w_i = s \quad \text{si} \quad n_{s-1}(x) < i \leq n_s(x),$$

et de définir les dilatations $(\delta_\lambda)_{\lambda>0} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ correspondantes par

$$\delta_\lambda z := (\lambda^{w_1} z_1, \ldots, \lambda^{w_n} z_n) \qquad \forall z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{R}^n,\, \forall \lambda > 0,$$

et la norme homogène $\hat{N}$ sur $\mathbb{R}^n$ par

$$\hat{N}(z) = |z_1|^{1/w_1} + \ldots + |z_n|^{1/w_n} \qquad \forall x = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{R}^n.$$

De plus, cela permet de compléter la famille de champs de vecteurs $X^1, \ldots, X^m$ en une famille $X^1, \ldots, X^n$, dite adaptée, de la manière suivante : on considère $n_2 - n_1$ (si $n_2 - n_1 > 0$) champs $X^{n_1+1}, \ldots, X^{n_2}$ dans $\tilde{\Delta}^2$ qui sont linéairement indépendants en 0, puis $n_3 - n_2$ champs $X^{n_2+1}, \ldots, X^{n_3}$ (si $r \geq 3$ et $n_3 - n_2 > 0$) dans $\tilde{\Delta}^3$ linéairement indépendants en 0, jusqu'à $n_r - n_{r-1}$ champs $X^{n_{r-1}+1}, \ldots, X^{n_r}$ dans $\tilde{\Delta}^r$ linéairement indépendants en 0. De cette manière, les champs de vecteurs $X^1, \ldots, X^n$ sont linéairement indépendants en 0 et chaque champ X^i est une section de $\tilde{\Delta}^{w_i}$ $(i = 1, \ldots, n)$. Nous pouvons maintenant donner le résultat d'approximation nilpotente.

Proposition 3.1. — *Si on considère le système de coordonnées $(z_1, \ldots, z_n)$ dans $\mathbb{R}^n$, dit de première espèce, donné par l'inverse du difféomorphisme*

$$(z_1, \ldots, z_n) \longmapsto \exp(z_1 X^1 + \cdots + z_n X^n),$$

alors dans ce système de coordonnées chaque champ de vecteurs X^i $(i = 1, \cdots, m)$ s'écrit sous la forme

$$X^i = \hat{X}^i + R^i, \tag{3}$$

où $\hat{X}^i$ et R^i sont lisses, $\hat{X}^i$ est homogène de degré -1 de la forme

$$\hat{X}^i = \partial_{z_i} + \sum_{j=m+1}^{n} p_{ij} \partial_{z_j}, \quad R^i = \sum_{j=m+1}^{n} r_{ij} \partial_{z_j}, \tag{4}$$

et R^i « d'ordre ≥ 0 en 0 » par rapport aux dilatations $(\delta_\lambda)_{\delta>0}$, ce qui signifie que

$$\hat{X}^i(\delta_\lambda z) = \lambda^{-1} \delta_\lambda \hat{X}^i(z) \qquad \forall z \in \mathbb{R}^n,\, \forall \lambda > 0, \tag{5}$$

et que la j-ième coordonnée de R^i vérifie :

$$\left(R^i(x)\right)_j = O\left(\hat{N}(z)^{w_j}\right). \tag{6}$$

De plus, la distribution $\hat{\Delta}$ de rang m engendrée par les champs de vecteurs $\hat{X}^1, \cdots, \hat{X}^m$ est totalement non holonome dans $\mathbb{R}^n$.

Soit $\hat{g}$ l'unique métrique sur $\hat{\Delta}$ pour laquelle la famille $\hat{X}^1, \cdots, \hat{X}^m$ est orthonormée et $\hat{d}_{SR}$ la distance sous-riemannienne associée à la structure $(\hat{\Delta}, \hat{g})$ dans $\mathbb{R}^n$, on vérifie facilement par la propriété d'homogénéité (5) que

$$\hat{d}_{SR}(\delta_\lambda z, \delta_\lambda z') = \lambda \, \hat{d}_{SR}(z, z') \qquad \forall z, z' \in \mathbb{R}^n, \, \forall \lambda > 0. \tag{7}$$

En effet, si $\hat{\alpha} : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ est une courbe horizontale (pour $\hat{\Delta}$) joignant z à z' solution de

$$\dot{\hat{\alpha}}(t) = \sum_{i=1}^m \hat{u}_i(t) \hat{X}_i \left(\hat{\alpha}(t)\right) \qquad \text{pour presque tout } t \in [0,1]$$

pour un certain contrôle $\hat{u} \in L^2([0,1]; \mathbb{R}^m)$, alors pour tout $\lambda > 0$ la courbe $\hat{\alpha}^\lambda = \delta_\lambda \hat{\alpha}$ est une courbe horizontale (pour $\hat{\Delta}$) joignant $\delta_\lambda z$ à $\delta_\lambda z'$ car elle vérifie $\hat{\alpha}^\lambda(0) = \delta_\lambda z$, $\hat{\alpha}^\lambda(1) = \delta_\lambda z'$,

$$\dot{\hat{\alpha}}^\lambda(t) = \delta_\lambda \dot{\hat{\alpha}}(t) = \sum_{i=1}^m \hat{u}_i(t) \delta_\lambda \hat{X}_i \left(\hat{\alpha}(t)\right) = \sum_{i=1}^m \left(\lambda \hat{u}_i(t)\right) \hat{X}_i \left(\hat{\alpha}^\lambda(t)\right),$$

pour presque tout $t \in [0,1]$, et $\mathrm{long}^{\hat{g}}(\hat{\alpha}^\lambda) = \lambda \, \mathrm{long}^{\hat{g}}(\hat{\alpha})$. La décomposition (3) et la propriété (6) permettent de comparer assez finement les distances sous-riemanniennes d_{SR} associée à (Δ, g) (dans le système de coordonnées $(z_1, \ldots, z_n)$) et $\hat{d}_{SR}$ associée à $(\hat{\Delta}, \hat{g})$.

Proposition 3.2 ([Bel]). — *Il existe des constantes $\epsilon, C > 0$ telles pour tous $z, z' \in B(0, \epsilon)$, on a*

$$-C \, \hat{d}_{SR}(0,z) \, d_{SR}(z,z')^{1/r} \leq d_{SR}(z,z') - \hat{d}_{SR}(z,z') \leq C \, \hat{d}_{SR}(0,z) \, \hat{d}_{SR}(z,z')^{1/r}.$$

Ce résultat est à la base d'un théorème fondamental sur les cônes tangents aux espaces de Carnot-Carathéodory que nous détaillerons dans la section 3.3. Avant cela voyons comment il peut être utilisé directement pour obtenir à partir de $\gamma : [-1,1] \to \mathbb{R}^n$ un arc brisé horizontal minimisant pour la structure sous-riemannienne $(\hat{\Delta}, \hat{g})$.

3.2. Le théorème d'éclatement de Leonardi-Monti

Par hypothèse, la courbe horizontale $\gamma : [-1,1] \to \mathbb{R}^n$, vue dans le système de coordonnées $(z_1, \ldots, z_n)$, a un coin en 0 ce qui signifie qu'elle admet une dérivée à droite et à gauche en $\bar{t} = 0$ et que celles-ci sont linéairement indépendantes. Posons

$$v^+ = \lim_{t \downarrow 0} \frac{\gamma(t)}{t} \quad \text{et} \quad v^- = \lim_{t \uparrow 0} \frac{\gamma(t)}{t} \tag{8}$$

et définissons l'arc brisé $\hat{\gamma} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ par

$$\hat{\gamma}(t) := \begin{cases} tv^+ & \text{si } t \geq 0 \\ -tv^- & \text{si } t \leq 0 \end{cases}$$

Par construction, étant donné qu'on a considéré un système de coordonnées de première espèce, on vérifie facilement que $\hat{\gamma}$ est horizontal pour $\hat{\Delta}$ et de vitesse constante pour $\hat{g}$. Le théorème d'éclatement de Leonardi-Monti est le suivant :

Théorème 3.3 ([LM]). — *La courbe $\hat{\gamma} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ est une géodésique minimisante pour $(\hat{\Delta}, \hat{g})$.*

Pour le démontrer nous aurons besoin d'un lemme qui n'est pas donné explicitement dans [LM]. Pour tout $\lambda \in [0,1]$ suffisamment petit, on pose

$$P_\lambda^- = \gamma(-\lambda), \quad \hat{P}_\lambda^- = \hat{\gamma}(-\lambda) \quad P_\lambda^+ = \gamma(\lambda), \quad \hat{P}_\lambda^+ = \hat{\gamma}(\lambda).$$

Lemme 3.4 ([Mont4]). — *On a pour tout $t \geq 0$,*

$$\lim_{\lambda \downarrow 0} \left| \delta_{1/\lambda} P_{\lambda t}^- - \hat{P}_t^- \right| = \lim_{\lambda \downarrow 0} \left| \delta_{1/\lambda} P_{\lambda t}^+ - \hat{P}_t^+ \right| = 0.$$

Preuve du Lemme 3.4 (esquisse) — Pour simplifier, esquissons la démonstration dans le cas $t = 1$ et en supposant que $\hat{P}_1^- = e_1$ (on note par $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$). Il nous faut donc montrer que

$$\lim_{t \downarrow 0} \lambda^{-w_1} \gamma(\lambda)_1 = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{\lambda \downarrow 0} \lambda^{-w_i} \gamma(\lambda)_i = 0 \quad \forall i = 2, \ldots, m. \tag{9}$$

Comme $w_1 = \ldots = w_m = 1$, les m premières limites sont des conséquences directes de (8). Comme γ est horizontale pour Δ, il existe un contrôle $h \in L^2([0,1]; \mathbb{R}^m)$ tel que

$$\dot{\gamma}(t) = \sum_{i=1}^m h_i(t)\, X^i(\gamma(t)) \quad \text{pour presque tout } t \in [0,1].$$

Ce qui en intégrant, en utilisant (3)-(4) et en posant $a_{ij} = p_{ij} + r_{ij}$ implique

$$\gamma(t) = \sum_{i=1}^m \int_0^t h_i(s)\, \partial_{x_i}\, ds + \sum_{i=1}^m \sum_{j=m+1}^n \int_0^t h_i(s)\, a_{ij}(\gamma(s))\, \partial_{x_j}\, ds$$

pour tout $t \in [0,1]$. Les m premières coordonnées de l'hypothèse (8) s'écrivent (avec $v^+ = e_1$)

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} \int_0^t h_1(s)\, ds = 1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} \int_0^t h_i(s)\, ds = 0 \quad \forall i = 2, \ldots, m. \tag{10}$$

Comme on a considéré un système de coordonnées de première espèce, on vérifie facilement que $X^1(e_1) = e_1$. Par homogénéité et par (8) on en déduit que $a_{1,m+1}(\gamma(s)) = o(s)$ qui, grâce à la première limite de (10), donne

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t^2} \int_0^t h_1(s)\, a_{1,m+1}(\gamma(s))\, ds = 0.$$

Par homogénéité, on a $a_{i(m+1)}(\gamma(s)) = O(s^{w_{m+1}-1})$ avec $w_{m+1} \geq 2$. Ainsi par les $(m-1)$ dernières limites de (10), on obtient

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t^2} \int_0^t h_i(s)\, a_{i,m+1}(\gamma(s))\, ds = 0 \qquad \forall i = 2, \ldots, m.$$

En conclusion, on a

$$\lim_{\lambda \downarrow 0} \lambda^{-2} \gamma(\lambda)_{m+1} = 0.$$

Si $w_{m+1} = 2$ on a la $(m+1)$-ième limite de (9), sinon on peut réinjecter l'information obtenue dans la discussion ci-dessus pour affiner la taille de $a_{1,m+1}(\gamma(s))$. On conclut la preuve par récurrence. □

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le théorème 3.3.

Preuve du Théorème 3.3 — La courbe $\hat{\gamma}$ étant de vitesse constante, il suffit de démontrer qu'elle est minimisante (pour $(\hat{\Delta}, \hat{g})$). Raisonnons par l'absurde en supposant que la courbe $\hat{\gamma} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ n'est pas minimisante. Par homogénéité, cela signifie qu'il existe $D < 2$ tel que

$$\hat{d}_{SR}(\hat{P}_\lambda^-, \hat{P}_\lambda^+) \leq D \qquad \forall \lambda > 0. \tag{11}$$

Par l'inégalité triangulaire appliquée à d_{SR}, on a

$$d_{SR}(P_\lambda^-, P_\lambda^+) \;\leq\; d_{SR}(P_\lambda^-, \hat{P}_\lambda^-) + d_{SR}(\hat{P}_\lambda^-, \hat{P}_\lambda^+) + d_{SR}(\hat{P}_\lambda^+, P_\lambda^+). \tag{12}$$

En appliquant l'inégalité donnée dans la proposition 3.2, on a pour $\lambda > 0$ suffisamment petit

$$\begin{aligned}
d_{SR}(P_\lambda^-, \hat{P}_\lambda^-) &\leq \hat{d}_{SR}(P_\lambda^-, \hat{P}_\lambda^-) + C\, \hat{d}_{SR}(0, \hat{P}_\lambda^-)\, \hat{d}_{SR}(P_\lambda^-, \hat{P}_\lambda^-)^{1/r} \\
&\leq \hat{d}_{SR}(P_\lambda^-, \hat{P}_\lambda^-) + C\, \lambda\, \hat{d}_{SR}(P_\lambda^-, \hat{P}_\lambda^-)^{1/r} \\
&= \lambda\, \hat{d}_{SR}(\delta_{1/\lambda} P_\lambda^-, \delta_{1/\lambda} \hat{P}_\lambda^-) + C\, \lambda^{1+1/r}\, \hat{d}_{SR}(\delta_{1/\lambda} P_\lambda^-, \delta_{1/\lambda} \hat{P}_\lambda^-)^{1/r} \\
&= \lambda \left[\hat{d}_{SR}(\delta_{1/\lambda} P_\lambda^-, \hat{P}_1^-) + C\, \lambda^{1/r} \hat{d}_{SR}(\delta_{1/\lambda} P_\lambda^-, \hat{P}_1^-)^{1/r} \right],
\end{aligned}$$

$$d_{SR}(P_\lambda^+, \hat{P}_\lambda^+) \leq \lambda \left[\hat{d}_{SR}(\delta_{1/\lambda} P_\lambda^+, \hat{P}_1^+) + C\, \lambda^{1/r} \hat{d}_{SR}(\delta_{1/\lambda} P_\lambda^+, \hat{P}_1^+)^{1/r} \right],$$

et par (11)

$$\begin{aligned}
d_{SR}(\hat{P}_\lambda^-, \hat{P}_\lambda^+) &\leq \hat{d}_{SR}(\hat{P}_\lambda^-, \hat{P}_\lambda^+) + C\, \hat{d}_{SR}(0, \hat{P}_\lambda^-)\, \hat{d}_{SR}(\hat{P}_\lambda^-, \hat{P}_\lambda^+)^{1/r} \\
&\leq \lambda\, D + C\, \lambda^{1+1/r}\, D^{1/r}.
\end{aligned}$$

En mettant tout ça dans (12) et en utilisant le résultat du lemme 3.4 (et la continuité de $\hat{d}_{SR}$), on obtient

$$2\lambda = d_{SR}\left(P_\lambda^-, P_\lambda^+\right) \leq \lambda\, D + o(\lambda),$$

ce qui est absurde car $D < 2$. □

3.3. Cônes tangents aux espaces de Carnot-Carathéodory

La structure sous-riemannienne $(\hat{\Delta}, \hat{g})$ est en fait isométrique au cône tangent à l'espace de Carnot-Carathéodory (M, d_{SR}) en 0 qui possède une structure de groupe naturelle (au moins dans le cas où 0 est un point régulier pour Δ) ; ce résultat est dû à Mitchell dans le cas régulier et Bellaïche dans le cas général (voir [Mit] et [Bel, Theorem 7.36]).

On appelle groupe de Carnot de pas s tout groupe de Lie simplement connexe $(\mathbb{G}, \cdot)$ dont l'algèbre de Lie $\mathfrak{g} = T_0\mathbb{G}$ (0 est l'élément neutre de $\mathbb{G}$) admet une stratification nilpotente de pas s, c'est-à-dire une décomposition en somme directe de la forme

$$\mathfrak{g} = V_1 + V_2 \ldots + V_s$$

telle que

$$\left[V_1, V_j\right] = V_{j+1} \quad \forall 1 \leq j \leq s, \quad V_s \neq \{0\}, \quad V_{s+1} = \{0\}.$$

Ainsi, si on se donne une métrique sur V_1 on peut la transporter par translation à gauche pour obtenir une structure sous-riemanienne $(\hat{\Delta}, \hat{g})$ invariante à gauche de pas s sur $\mathbb{G}$ (en tout point z de $\mathbb{G}$ la distribution $\hat{\Delta}(z)$ est donnée par $d_0L_z(v_1)$ où L_z est la translation à gauche par z, idem pour la métrique) et par conséquent une distance sous-riemannienne invariante à gauche ; on parle de structure sous-riemanienne compatible invariante à gauche. Les groupes de Carnot sont aux structures sous-riemanniennes ce que les espaces euclidiens sont aux variétés riemaniennes ; ils apparaissent comme cônes tangents de celles-ci. Comme on l'a dit, si le point 0 est supposé régulier pour la distribution Δ (ce qui signifie que le vecteur de croissance de Δ est constant dans un voisinage de 0, voir §3.1), alors la suite d'espaces métriques pointés $(\lambda M, 0)$ converge au sens de Gromov-Hausdorff quand $\lambda \to +\infty$ vers un groupe de Carnot équipé d'une structure sous-riemannienne compatible invariante à gauche qui se trouve être isométrique à l'espace métrique $(\mathbb{R}^n, \hat{d}_{SR})$ construit à la section 3.1. On renvoie le lecteur aux textes de Bellaïche [Bel] et Jean [Jea] pour plus de détails.

Définition 3.5. — *Soit $\mathbb{G}$ un groupe de Carnot de premier niveau V_1, on appelle arc brisé horizontal toute courbe $c : [-1, 1] \to \mathbb{G}$ de la forme*

$$c(t) := \begin{cases} \exp\left(tc^+\right) & si\ t \in [0, 1] \\ \exp\left(-tc^-\right) & si\ t \in [-1, 0] \end{cases}$$

avec $c^+, c^- \in V_1$ linéairement indépendants.

Attention, ici exp désigne l'application exponentielle pour le groupe de Lie $\mathbb{G}$, $\exp : \mathfrak{g} \to \mathbb{G}$. Notons que pour toute structure sous-riemannienne compatible invariante à gauche sur $\mathbb{G}$, les deux courbes $t \geq 0 \mapsto \exp\left(tc^+\right)$ et $t \geq 0 \mapsto \exp\left(-tc^-\right)$ sont minimisantes. Le théorème d'éclatement de Leonardi-Monti a pour conséquence le résultat suivant (voir [LM, Remark 2.5 p. 561] et [HL, Section 3]) :

Théorème 3.6. — *Soit (Δ, g) une structure sous-riemannienne sur M ; si il existe une géodésique minimisante ayant un coin alors il existe un groupe de Carnot de rang 2 équipé d'une structure sous-riemannienne compatible invariante à gauche pour lequel un arc brisé horizontal est minimisant.*

Ce résultat vient essentiellement du fait que dans le cas général (si 0 n'est pas régulier pour Δ), le cône tangent au sens de Gromov d'un espace de Carnot-Carathéodory est le quotient d'un groupe de Carnot et du fait que le sous-groupe engendré par deux vecteurs de V_1 est un groupe de Carnot. Le théorème 3.6 permet de transformer un problème d'analyse pure en un problème plus algébrique. La fin de la preuve du théorème 2.10 consiste à utiliser la structure de groupe de Carnot pour construire une courbe horizontale plus courte joignant les deux extrémités d'un arc brisé minimisant.

3.4. Fin de la preuve du théorème 2.10

Dans la suite, étant donné un groupe de Carnot $\mathbb{G}$ équipé d'une structure sous-riemannienne $(\hat{\Delta}, \hat{g})$, on note $\|\cdot\|$ la norme sur v_1, $\hat{d} = \hat{d}_{SR}$ la métrique invariante à gauche sur $\mathbb{G}$, et $(\delta_\lambda)_{\lambda>0}$ la famille de dilatations adaptée à la stratification (voir §3.1 et [HL, Rif1]). Ce premier lemme va nous permettre de faire une récurrence sur le pas du groupe de Carnot.

Lemme 3.7 ([HL]). — *Soit $\mathbb{G}$ un groupe de Carnot de pas $s \geq 3$. Supposons que pour tout groupe de Carnot de pas $s-1$ équipé d'une structure sous-riemannienne compatible invariante à gauche, aucun arc brisé horizontal n'est minimisant. Alors pour tous vecteurs $c^+, c^- \in V_1$ linéairement indépendants il existe $h \in \exp(V_s)$ tel que*

$$\hat{d}\left(h \cdot \exp(c^-), \exp(c^+)\right) < \left\|c^+\right\| + \left\|c^-\right\|.$$

Preuve — Le quotient $\underline{\mathbb{G}} := \mathbb{G}/H$ de $\mathbb{G}$ par $H = \exp(V_s)$ est un groupe de Carnot de pas $s-1$ dont le premier niveau $\underline{V}_1 := d_0\pi(V_1)$ est isomorphe à V_1 (on note $\pi : \mathbb{G} \to \underline{\mathbb{G}}$ le morphisme de groupe de Lie $z \mapsto zH$). On peut donc transporter la métrique $\hat{g}$ de V_1 vers $\underline{V}_1$ rendant ainsi la projection $d_0\pi : V_1 \to \underline{V}_1$ isométrique. Comme c^- et c^+ sont linéairement indépendants, les vecteurs $\underline{c}^- := d_0\pi(c^-)$ et $\underline{c}^+ := d_0\pi(c^+)$ le sont également, donc par hypothèse l'arc brisé horizontal de $\exp(-\underline{c}^-)$ vers $\exp(\underline{c}^+)$ n'est pas minimisant dans $\underline{G}$. Par invariance à gauche, il existe donc une géodésique minimisante $\underline{\gamma} : [0,1] \to \underline{G}$ de 0 vers $\underline{y} := \exp(-\underline{c}^-) \cdot \exp(\underline{c}^+)$ de longueur strictement inférieure à $\|\underline{c}^-\| + \|\underline{c}^+\| = \|c^-\| + \|c^+\|$. Cette courbe se relève dans $\mathbb{G}$ en une courbe horizontale de même longueur de 0 vers un point de la forme $\exp(-c^-) \cdot \exp(c^+) \cdot h$ avec $h \in H$. En effet, par translation à gauche dans $\underline{\mathbb{G}}$ on peut transporter les vitesses $\dot{\underline{\gamma}}(t)$ (pour presque tout $t \in [0,1]$) de $T_{\underline{\gamma}(t)}\underline{\mathbb{G}}$ vers $T_0\underline{\mathbb{G}}$. Comme $\underline{\gamma}$ est horizontale, on a pour presque tout $t \in [0,1]$ (on utilise la même notation pour les translations à gauche dans $\mathbb{G}$ et $\underline{\mathbb{G}}$)

$$\underline{c}(t) := d_{\underline{\gamma}(t)} L_{\underline{\gamma}(t)^{-1}} \left(\dot{\underline{\gamma}}(t)\right) \in \underline{V}_1.$$

Donc en transportant $\underline{c} : [0,1] \to T_0\underline{\mathbb{G}}$ via l'isométrie $(d_0\pi)_{|V_1}$ dans $T_0\mathbb{G}$, c'est-à-dire en posant

$$c(t) := \left((d_0\pi)_{|V_1}\right)^{-1} (\underline{c}(t)) \qquad \text{pour presque tout } t \in [0,1],$$

et en considérant la solution $\gamma : [0,1] \to \mathbb{G}$ du problème de Cauchy

$$\dot{\gamma}(t) = d_0 L_{\gamma(t)} \left[c(t)\right] \quad \text{pour presque tout } t \in [0,1], \quad \gamma(0) = 0,$$

on obtient une courbe horizontale dans $\mathbb{G}$ de même longueur que $\underline{\gamma}$ de 0 vers $\gamma(1)$. Comme π est un morphisme de groupe de Lie, on a pour presque tout $t \in [0,1]$,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left[\pi(\gamma(t)\right] = d_{\gamma(t)}\pi\left[\dot\gamma(t)\right] &= d_{\gamma(t)}\pi\left[d_0L_{\gamma(t)}\left[c(t)\right]\right]\\ &= d_0L_{\pi(\gamma(t))}\left[d_0\pi\left(c(t)\right)\right]\\ &= d_0L_{\pi(\gamma(t))}\left[\underline{c}(t)\right],\end{aligned}$$

ce qui signifie que la courbe $t \in [0,1] \mapsto \pi(\gamma(t))$ est solution du même problème de Cauchy que $\underline{\gamma}$. Par unicité, on en déduit que $\pi(\gamma(1)) = \underline{\gamma}(1) = \underline{y} = \pi(\exp(-c^-)\cdot\exp(c^+))$, c'est-à-dire que $\gamma(1)$ est de la forme $\exp(-c^-)\cdot\exp(c^+)\cdot h$ avec $h \in H$. On conclut facilement. □

Le lemme suivant est le cœur de la preuve du théorème 2.10, il va permettre d'utiliser le résultat du lemme précédent pour construire une courbe horizontale plus courte joignant les deux extrémités d'un arc brisé minimisant.

Lemme 3.8 ([HL]). — *Soit $\mathbb{G}$ un groupe de Carnot de rang 2 et de pas $s \geq 3$ et soit c^+, c^- deux vecteurs qui engendrent V_1. Alors pour tout $h \in \exp(V_s)$ il existe des vecteurs $d_1, d_2, d_3 \in V_{s-1}$ tels que pour tout $\epsilon > 0$,*

$$\exp(c^+) = \exp(c^-)\cdot z_1^\epsilon\cdot z_2^\epsilon\cdot z_3^\epsilon\cdot z_4^\epsilon\cdot z_5^\epsilon\cdot z_6\cdot z_7^\epsilon, \tag{13}$$

où $z_1^\epsilon, z_2^\epsilon, z_3^\epsilon, z_4^\epsilon, z_5^\epsilon, z_6$ et z_7^ϵ sont définis par

$$z_1^\epsilon = \delta_{\epsilon^{s/(s-1)}}\left(\exp(d_1)\right),\ z_2^\epsilon = \delta_{1-\epsilon}\left(\exp(-c^-)\right),\ z_3^\epsilon = \delta_\epsilon\left(\exp(-c^-)\cdot h^{-1}\cdot\exp(c^+)\right),$$
$$z_4^\epsilon = \delta_{\frac12-\epsilon}\left(\exp(c^+)\right),\ z_5^\epsilon = \delta_{\epsilon^{s/(s-1)}}\left(\exp(d_2)\right),\ z_6 = \exp\left(\tfrac12 c^+\right),\ z_7^\epsilon = \delta_{\epsilon^{s/(s-1)}}\left(\exp(d_3)\right).$$

Preuve — Tout d'abord, notons que comme $(\delta_\lambda)_{\lambda>0}$ est une famille d'automorphismes de groupe de Lie qui commute avec l'exponentielle, on a pour tout $\epsilon > 0$,

$$z_1^\epsilon = \exp(\epsilon^s d_1),\ z_2^\epsilon = \exp(-(1-\epsilon)c^-),\ z_3^\epsilon = \exp(-\epsilon c^-)\cdot\delta_\epsilon(h)^{-1}\cdot\exp(\epsilon c^+),$$
$$z_4^\epsilon = \exp\left(\left(\tfrac12-\epsilon\right)c^+\right),\ z_5^\epsilon = \exp(\epsilon^s d_2),\ z_7^\epsilon = \exp(\epsilon^s d_3).$$

Ainsi, comme $\delta_\epsilon(h)^{-1}$ est dans le centre de $\mathbb{G}$, pour tout $\epsilon > 0$, le terme de droite de l'équation (13) s'écrit

$$\begin{aligned}&\exp(c^-)\cdot z_1^\epsilon\cdot z_2^\epsilon\cdot z_3^\epsilon\cdot z_4^\epsilon\cdot z_5^\epsilon\cdot z_6\cdot z_7^\epsilon\\ &\quad= \delta_\epsilon(h)^{-1}\cdot\exp(c^-)\cdot\exp(\epsilon^s d_1)\cdot\exp(-(1-\epsilon)c^-)\cdot\exp(-\epsilon c^-)\cdot\exp(\epsilon c^+)\\ &\qquad\cdot\exp\left(\left(\tfrac12-\epsilon\right)c^+\right)\cdot\exp(\epsilon^s d_2)\cdot\exp\left(\tfrac12 c^+\right)\cdot\exp(\epsilon^s d_3)\\ &\quad= \delta_\epsilon(h)^{-1}\cdot\left[\exp(c^-)\cdot\exp(\epsilon^s d_1)\cdot\exp(-c^-)\right]\cdot\left[\exp\left(\tfrac12 c^+\right)\cdot\exp(\epsilon^s d_2)\cdot\exp\left(-\tfrac12 c^+\right)\right]\\ &\qquad\cdot\left[\exp(c^+)\cdot\exp(\epsilon^s d_3)\exp(-c^+)\right]\cdot\exp(c^+)\\ &= \delta_\epsilon(h)^{-1}\cdot C_{\exp(c^-)}\left(\exp\left(\epsilon^s d_1\right)\right)\cdot C_{\exp\left(\frac12 c^+\right)}\left(\exp\left(\epsilon^s d_2\right)\right)\cdot C_{\exp(c^+)}\left(\exp\left(\epsilon^s d_3\right)\right)\cdot\exp(c^+),\end{aligned}$$

où on a posé $C_p(q) = p\cdot q\cdot p^{-1}$ pour tous p, q dans $\mathbb{G}$. Par conséquent, résoudre (13) revient à trouver $d_1, d_2, d_3 \in V_{s-1}$ tels que pour tout $\epsilon > 0$,

$$(14)\quad C_{\exp(c^-)}\left(\exp\left(\epsilon^s d_1\right)\right)\cdot C_{\exp\left(\frac{1}{2}c^+\right)}\left(\exp\left(\epsilon^s d_2\right)\right)\cdot C_{\exp(c^+)}\left(\exp\left(\epsilon^s d_3\right)\right)=\delta_\epsilon(h).$$

Par la formule de Baker-Campbell-Hausdorff on a pout tout $X\in\mathfrak{g}$ et tout $Y\in V_{s-1}$

$$C_{\exp(X)}\left(\exp(Y)\right)=\exp(X)\cdot\exp(Y)\cdot\exp(-X)=\exp(Y+[X,Y])$$

et de plus $[X,Y]$ appartient à V_s. Par conséquent, comme le sous-groupe $\exp(V_{s-1}+V_s)$ est commutatif, on a pour tous $d_1,d_2,d_3\in V_{s-1}$

$$\begin{aligned}C_{\exp(c^-)}\left(\exp\left(d_1\right)\right)\cdot C_{\exp\left(\frac{1}{2}c^+\right)}\left(\exp\left(d_2\right)\right)\cdot C_{\exp(c^+)}\left(\exp\left(d_3\right)\right)&\\ =\exp\left(d_1+d_2+d_3+[c^-,d_1]+\tfrac{1}{2}[c^+,d_2]+[c^+,d_3]\right).&\end{aligned}$$

De telle sorte que, si $h=\exp(Z)$, alors toute solution de $d_1+d_2+d_3+[c^-,d_1]+\frac{1}{2}[c^+,d_2]+[c^+,d_3]=Z$ fournira une solution de (14) pour tout $\epsilon>0$ (car $\delta_\epsilon(h)=\exp(\epsilon^s Z)$). Comme $Z\in V_s$ et $V_1=\mathrm{Vect}(c^-,c^+)$, il existe $W_1,W_2\in V_{s-1}$ tels que $Z=[c^-,W_1]+[c^+,W_2]$, ce qui implique que le triplet

$$d_1=W_1,\quad d_2=-2W_1-2W_2,\quad d_3=W_1+2W_2$$

est solution. □

Par le théorème 3.6, le lemme suivant conclut la démonstration du théorème 3.3.

Lemme 3.9 ([HL]). — *Aucun groupe de Carnot de rang 2 équipé d'une structure sous-riemannienne compatible invariante à gauche n'admet d'arc brisé horizontal minimisant.*

Preuve — On démontre le résultat par récurrence sur le pas du groupe. Par le théorème 2.2, toutes les géodésiques minimisantes d'une structure sous-riemannienne de pas 2 sont soit non singulières normales soit singulières normales donc elles sont lisses. Par conséquent le lemme est vrai pour les groupes de Carnot de pas 2. Supposons maintenant avoir démontré le résultat pour tous les groupes de Carnot (équipés d'une structure sous-riemannienne compatible invariante à gauche) de pas $\leq s-1$ et montrons-le pour les groupes de pas s. Soit $\mathbb{G}$ un groupe de Carnot de pas s équipé d'une structure sous-riemannienne compatible invariante à gauche et soit $c:[-1,1]\to\mathbb{G}$ un arc brisé horizontal de $\exp(c^-)$ vers $\exp(c^+)$. On peut sans perte de généralité supposer que $\|c^-\|=\|c^+\|=1$. Par le lemme 3.7, il existe $h\in\exp(V_s)$ tel que

$$(15)\qquad \hat{d}\left(h\cdot\exp(c^-),\exp(c^+)\right)<\left\|c^-\right\|+\left\|c^+\right\|=2.$$

Par le lemme 3.8, il existe $d_1,d_2,d_3\in V_{s-1}$ tels que

$$\exp(c^+)=\exp(c^-)\cdot z_1^\epsilon\cdot z_2^\epsilon\cdot z_3^\epsilon\cdot z_4^\epsilon\cdot z_5^\epsilon\cdot z_6\cdot z_7^\epsilon\qquad\forall\epsilon>0,$$

où $z_1^\epsilon, z_2^\epsilon, z_3^\epsilon, z_4^\epsilon, z_5^\epsilon, z_6$ et z_7^ϵ sont définis dans l'énoncé du lemme. On a donc, par invariance à gauche et par l'inégalité triangulaire, pour tout $\epsilon > 0$ (on pose $z_6^\epsilon = z_6$)

$$\begin{aligned} \hat{d}\left(\exp(c^-), \exp(c^+)\right) &= \hat{d}\,(0, z_1^\epsilon \cdot z_2^\epsilon \cdot z_3^\epsilon \cdot z_4^\epsilon \cdot z_5^\epsilon \cdot z_6 \cdot z_7^\epsilon) \\ &\leq \hat{d}\,(0, z_1^\epsilon) + \hat{d}\,(z_1^\epsilon, z_1^\epsilon \cdot z_2^\epsilon \cdot z_3^\epsilon \cdot z_4^\epsilon \cdot z_5^\epsilon \cdot z_6 \cdot z_7^\epsilon) \\ &= \hat{d}\,(0, z_1^\epsilon) + \hat{d}\,(0, z_2^\epsilon \cdot z_3^\epsilon \cdot z_4^\epsilon \cdot z_5^\epsilon \cdot z_6 \cdot z_7^\epsilon) \\ &\leq \sum_{l=1}^{7} \hat{d}\,(0, z_l^\epsilon)\,. \end{aligned}$$

Par définition des z_l^ϵ, on a

$$\begin{cases} \hat{d}\,(0, z_1^\epsilon) &= \epsilon^{s/(s-1)}\hat{d}\,(0, \exp(d_1)) \\ \hat{d}\,(0, z_2^\epsilon) &= 1 - \epsilon \\ \hat{d}\,(0, z_3^\epsilon) &= \epsilon\,\hat{d}\,(0, \exp(-c^-) \cdot h^{-1} \cdot \exp(c^+)) = \epsilon\,\hat{d}\,(h \cdot \exp(c^-), \exp(c^+)) \\ \hat{d}\,(0, z_4^\epsilon) &= \frac{1}{2} - \epsilon \\ \hat{d}\,(0, z_5^\epsilon) &= \epsilon^{s/(s-1)}\hat{d}\,(0, \exp(d_2)) \\ \hat{d}\,(0, z_6^\epsilon) &= \frac{1}{2} \\ \hat{d}\,(0, z_7^\epsilon) &= \epsilon^{s/(s-1)}\hat{d}\,(0, \exp(d_3))\,. \end{cases}$$

Par conséquent, on obtient pour tout $\epsilon > 0$,

$$\begin{aligned} &\hat{d}\left(\exp(c^-), \exp(c^+)\right) \\ &\qquad \leq 2 - \left[2 - \hat{d}\left(h \cdot \exp(c^-), \exp(c^+)\right)\right]\epsilon + \sum_{l=1}^{3} \hat{d}\,(0, \exp(d_l))\,\epsilon^{s/(s-1)}, \end{aligned}$$

qui, grâce à (15), en prenant $\epsilon > 0$ suffisamment petit, montre que $\hat{d}\,(\exp(c^-), \exp(c^+)) < 2$, ce qui démontre que l'arc brisé c n'est pas minimisant. □

RÉFÉRENCES

[Agr1] A.A. AGRACHEV – *Any sub-Riemannian metric has points of smoothness*, Dokl. Akad. Nauk **424**, 3 (2009), 295–298 ; traduction anglaise : Dokl. Math. **79**, 1 (2009), 45–47.

[Agr2] A.A. AGRACHEV – *Some open problems*, Geometric control theory and sub-riemannian geometry, 1–13, Springer INdAM Ser. **5** (2014).

[ABB] A.A. AGRACHEV, D. BARILARI, U. BOSCAIN – *Introduction to Riemannian and sub-Riemannian geometry*, à paraître.

[AG] A.A. AGRACHEV, J.-P. GAUTHIER – *On the subanalyticity of Carnot-Carathéodory distances*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **18**, 3 (2001), 359–382.

[ASach] A.A. AGRACHEV, Yu.L. SACHKOV – *Control Theory from the Geometric Viewpoint*, Encyclopaedia of Mathematical Sciences, vol. 87. Springer-Verlag, Heidelberg (2004).

[AS1] A.A. AGRACHEV, A.V. SARYCHEV – *Abnormal sub-Riemannian geodesics : Morse index and rigidity*, Ann. Inst. H. Poincaré **13** (1996), 635–690.

[AS2] A.A. AGRACHEV, A.V. SARYCHEV – *Sub-Riemannian metrics : minimality of singular geodesics versus subanalyticity*, ESAIM Control Optim. Calc. Var. **4** (1999), 377–403.

[BBR] Z. BADREDDINE, A. BELOTTO, L. RIFFORD – *A few remarks on singular curves of analytic rank-two distributions*, en préparation.

[Bel] A. BELLAÏCHE – *The tangent space in sub-Riemannian geometry*, Sub-Riemannian Geometry, Birkhäuser (1996), 1–78.

[BH] B. BONNARD, H. HEUTTE – *La propriété de stricte anormalité est générique*, prépublication de l'Université de Bourgogne (1995).

[BK] B. BONNARD, I. KUPKA – *Generic properties of singular trajectories*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **14**, 2 (1997), 167–186.

[CJT] Y. CHITOUR, F. JEAN, E. TRÉLAT – *Genericity results for singular curves*, J. Differential Geom. **73**, 1 (2006), 45–73.

[Cla] F. CLARKE – *Functional analysis, calculus of variations and optimal control*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 264. Springer, London (2013).

[FR] A. FIGALLI, L. RIFFORD – *Mass transportation on sub-Riemannian manifolds*, Geom. Funct. Anal. **20**, 1 (2010), 124–159.

[Goh] B.S. GOH – *Necessary conditions for singular extremals involving multiple control variables*, SIAM J. Control **4** (1966),716–731.

[HL] E. HAKAVUORI, E. LE DONNE – *Non-minimality of corners in subriemannian geometry*, prépublication (2015).

[Jea] F. JEAN – *Control of nonholonomic systems : from sub-Riemannian geometry to motion planning*, Springer Briefs in Mathematics, Springer (2014).

[Jur] V. JURDJEVIC – *Geometric Control Theory*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 52. Cambridge Univ. Press, Cambridge (1997).

[Kup] I. KUPKA – *Géométrie sous-riemannienne*, Séminaire Bourbaki, Vol. 1995/96, exp. No. 817, Astérisque **241** (1997), 351–380.

[LM] G.P. LEONARDI, R. MONTI – *End-point equations and regularity of sub-Riemannian geodesics*, Geom. Funct. Anal. **18**, 2 (2008), 552–582.

[LLMV] E. LE DONNE, G.P. LEONARDI,, R. MONTI, D. VITTONE – *Corners in non-equiregular sub-Riemannian manifolds*, ESAIM Control Optim. Calc. Var. **21**, 3 (2015), 625–634.

[LS] W. LIU, H.J. SUSSMANN – *Shortest paths for sub-Riemannian metrics on rank-2 distributions*, Mem. Amer. Math. Soc. **118**, 564 (1995).

[Mit] J. MITCHELL – *On Carnot-Carathéodory metrics*, J. Differential Geom. **21**, 1 (1985), 35–45.

[Mon1] R. MONTGOMERY – *Abnormal minimizers*, SIAM J. Control Optim. **32**, 6 (1994),1605–1620.

[Mon2] R. MONTGOMERY – *A tour of subriemannian geometries, their geodesics and applications*, Mathematical Surveys and Monographs. Amer. Math. Soc., Providence, RI (2002).

[Mont1] R. MONTI – *A family of nonminimizing abnormal curves*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **193**, 6 (2014), 1577–1593.

[Mont2] R. MONTI – *The regularity problem for sub-Riemannian geodesics*, Geometric control theory and sub-riemannian geometry, 313–332, Springer INdAM Ser. **5** (2014).

[Mont3] R. MONTI – *Regularity results for sub-Riemannian geodesics*, Calc. Var. Partial Differential Equations **49**, 1-2 (2014), 549–582.

[Mont4] R. MONTI – Communication personnelle.

[Ray] C.B. RAYNER – *The exponential map for the Lagrange problem on differentiable manifolds*, Phil. Trans. Royal Soc. London, ser. A, Math. and Phys. Sci. **262**, 1127 (1967), 299–344.

[Rif1] L. RIFFORD – *Ricci curvature in Carnot groups*, Math. Control and Relat. Fields **3**, 4 (2013), 467–487.

[Rif2] L. RIFFORD – *Sub-Riemannian geometry and optimal transport*, Springer Briefs in Mathematics, Springer (2014).

[RT] L. RIFFORD, E. TRÉLAT – *Morse-Sard type results in sub-riemannian geometry*, Math. Ann. **332**, 1 (2005), 145–159.

[Sus1] H.J. SUSSMANN – *A cornucopia of four-dimensional abnormal sub-Riemannian minimizers*, Sub-Riemannian Geometry, Progr. Math. **144**, Birkhäuser (1996), 341–364.

[Sus2] H.J. SUSSMANN – *A regularity theorem for minimizers of real-analytic sub-riemannian metrics*, Proceedings of the IEEE conference on decision and control (2015), 4801–4806.

[Vin] R. VINTER – *Optimal control*, Systems & Control : Foundations & Applications. Birkhäuser, Boston (2000).

[Vit] D. VITTONE – *The regularity problem for sub-Riemannian geodesics*, Geometric measure theory and real analysis, 193–226, CRM Series **17** (2014).

[ZZ] I. ZELENKO, M. ZHITOMIRSKII – *Rigid paths of generic* 2*-distributions on* 3*-manifolds*, Duke Math. J. **79**, 2 (1995), 281–307.

Ludovic RIFFORD

Laboratoire J.A. Dieudonné
Université Nice Sophia Antipolis
Parc Valrose
F–06108 Nice Cedex 2
E-mail : `ludovic.rifford@math.cnrs.fr`