TD1 – Continuité des fonctions de plusieurs variables réelles

Exercice 1. Étudier la continuité des fonctions suivantes :

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad g(x,y) = \begin{cases} \frac{y^3}{(x-1)^2+y^2} & (x,y) \neq (1,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$h(x,y) = \begin{cases} \frac{x ln(1+x^3)}{y(x^2+y^2)} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad k(x,y) = \begin{cases} \frac{6x^2y}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Solution. On rappelle que pour étudier la continuité d'une fonction f sur un point il faut :
- vérifier si la limite de f au point x_0 existe et, si elle existe, la calculer ;
- vérifier si la valeur de la limite est égal à $f(x_0)$.

On rappelle que si une fonction dpv f est continue au point (x_0, y_0) alors toute restriction de f à courbes continues qui passent pour le point (x_0, y_0) est continue au point (x_0, y_0).
Donc une stratégie pour prouver que une fonction f N'EST PAS CONTINUE au point (x_0, y_0) est trouver deux courbes continues $y = h_1(x)$, $y = h_2(x)$ telles que $y_0 = h_1(x_0)$ et $y_0 = h_2(x_0)$ qui conduisent à deux valeurs différentes de la limite.

La fonction $f(x,y)$ est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}$ parce que elle est quotient de polynômes. Pour montrer que elle est pas continue au point $(0,0)$ on considére les axes $x = 0$ et $y = 0$ (qui évidement passent pour (0,0)) et on calcule $f(x,0)$ et $f(0,y)$ (restriction de f aux axes). On a pour tout $x \neq 0$:

$$f(x,0) = \frac{x^2}{x^2} = 1,$$

et pour tout $y \neq 0$:

$$f(0,y) = \frac{y^2}{y^2} = -1.$$

La limite d'une constante est la constante, donc :

$$\lim_{x\to 0} f(x,0) = 1 \text{ et } \lim_{y\to 0} f(0,y) = -1.$$

Donc f n'admet pas de limite en $(0,0)$ et elle ne peut pas être continue en $(0,0)$.

La fonction $g(x,y)$ est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{1,0\}$ parce que elle est quotient de polynômes. Pour montrer que elle est continue au point $(1,0)$ on utilise le théorème du pincement (dit aussi des gendarmes ou du sandwich). Dans le cas special dont on cherche une valeur nulle de la limite, ce théorème nous dit que il suffit majorer (en valeur absolue, au voisinage du point $(1,0)$) la fonction g avec une fonction qui admet limite zero au même point. Attention : si la limite est non nulle, il ne suffit pas de montrer la majoration pour la valeur absolue de g !
A partir de la simple inégalité :

$$(x-1)^2 + y^2 \geq y^2,$$

on a :

$$\frac{1}{(x-1)^2 + y^2} \leq \frac{1}{y^2}$$

qui permet de encadrer g :

$$0 <\mid \frac{y^3}{(x-1)^2+y^2} \mid\leq\mid \frac{y^3}{y^2} \mid=\mid y \mid$$

entre la fonction nulle (qui a limite 0 pour toute valeur de (x, y)) et la fonction $| \, y \, |$ (qui admet limite 0 pour toute $(x, y) \to (1, 0)$). On a démontré que :

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{y^3}{(x-1)^2 + y^2} = 0$$

et donc l'esemble de continuité de g est $\mathbb{R}^2$.

La fonction $h(x, y)$ est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0, 0\}$ parce que elle est quotient de fonctions continues. Comme on a fait pour la fonction f, pour montrer que elle n'est pas continue au point $(0, 0)$ on cherche deux directions qui conduisent à deux limites différentes. On considère $y = x$ et $y = x^2$ (qui passent pour $(0, 0)$).
On trouve :

$$h(x, x) = \frac{x ln(1 + x^3)}{2x^3}$$

et

$$h(x, x^2) = \frac{ln(1 + x^3)}{x^3(1 + x^2)}.$$

On rappelle la limite usuelle :

$$\lim_{t\to 0} \frac{ln(1 + t)}{t} = 1.$$

Cette limite usuelle se calcule en 1 passage si on écrit le polynôme de Taylor du dénominateur au voisinage de $t = 0$ (essayer !). Par consequence en posant $t = x^3$ on a :

$$\lim_{x\to 0} h(x, x) = \lim_{x\to 0} \frac{x ln(1 + x^3)}{2x^3} = 0.$$

et

$$\lim_{x\to 0} h(x, x^2) = \lim_{x\to 0} \frac{ln(1 + x^3)}{x^3(1 + x^2)} = 1.$$

Donc f n'admet pas de limite en $(0, 0)$ et elle ne peut pas être continue en $(0, 0)$.

La fonction $k(x, y)$ est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0, 0\}$ parce que elle est quotient de polynômes. Pour montrer que elle est continue au point $(0, 0)$ on utilise le théorème du pincement en suivante exactement le même raisonnement que on a fait pour la fonction g. A partir de la simple inégalité :

$$x^2 + y^2 \geq x^2,$$

on a :

$$\frac{1}{x^2 + y^2} \leq \frac{1}{x^2}$$

qui permet de encadrer k :

$$0 <\left| \frac{6x^2 y}{x^2 + y^2} \right| \leq \left| \frac{6x^2 y}{x^2} \right| = 6 \, | \, y \, |$$

entre la fonction nulle (qui a limite 0 pour toute valeur de (x, y)) et la fonction $6 \, | \, y \, |$ (qui admet limite 0 pour toute $(x, y) \to (1, 0)$). On a démontré que :

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{6x^2 y}{x^2 + y^2} = 0$$

et donc l'esemble de continuité de k est $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2. Soit

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y}{x^4+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

Montrer que la restriction de f à toute droite passante par $(0,0)$ est continue, mais f n'est pas continue au point $(0,0)$.

Solution. Le but de l'exercise est de souligner que il suffit pas de montrer que une fonction est continue "restreinte sur le droites" pour déduire que elle est continue sur un point.
Soit $y=mx$ une droite pour l'origine de coefficient angulaire m. On trouve :

$$f(x,mx)=\frac{mx}{x^2+m}$$

qui tend vers 0 si $(x,y)\to(0,0)$ pour tout m. De plus le long $x=0$ on trouve limite 0.
Si on considère une parabole $y=ax^2$ on trouve :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,ax^2)=\frac{a}{1+a^2}$$

Et donc pour chaque a on a une limite différente. Par consequence la limite n'existe pas.

Exercice 3. Montrer que la fonction $f:\mathbb{R}^2\backslash(0,0)\to\mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y)=\frac{\sin(x^2)-\sin(y^2)}{x^2+y^2}$$

n'est pas prolongeable par continuité en $(0,0)$.

Solution. On procède comme dans l'exercise 1. On considère cette fois les axes $x=0$ et $y=0$, qui évidement passent pour $(0,0)$. On a :

$$f(x,0)=\frac{\sin(x^2)}{x^2} \qquad \text{et} \qquad f(0,y)=-\frac{\sin(y^2)}{y^2}$$

Dès que :

$$\lim_{t\to0}\frac{\sin t}{t}=1$$

si on pose $t=x^2$ ou $t=y^2$ on trouve que :

$$\lim_{x\to0} f(x,0)=1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{y\to0} f(0,y)=-1.$$

Cela suffit pour dire que la limite en $(0,0)$ n'existe pas et donc la fonction n'est pas prolongeable par continuitè en $(0,0)$.

Exercice 4. Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2}(x^2+y^2)-1 & \text{si } x^2+y^2>1\\ -\frac{1}{2} & \text{sinon}\end{cases}$$

Montrer que f est continue.
Solution. Le terme $g(x,y)=\frac{1}{2}(x^2+y^2)-1$ est un polynôme et donc il est continue sur $\mathbb{R}^2$. Pour prouver que f est continue il suffit vérifier que sur la circonférence

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \text{ t.q. } x^2+y^2=1\}$$

le polynôme $g(x,y)$ soit égal à $-\frac{1}{2}$. Dès que :

$$g(x,y)|_{\{x^2+y^2=1\}}=\frac{1}{2}(1)-1=-\frac{1}{2}$$

la fonction f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 5. Prologer par continuité la fonction :

$$f(x,y) = xyln(x^2 + y^2)$$

au point $(0,0)$.

Solution. On cherche de démontrer que notre fonction admet limite 0 lors que $(x,y) \to (0,0)$ à l'aide du théorème du pincement. A partir de la simple inégalité :

$$(x+y)^2 \geq 0,$$

on trouve

$$\mid xy \mid \leq \frac{1}{2} \mid x^2 + y^2 \mid$$

qui conduit à l'encadrement suivant :

$$0 \leq \mid xyln(x^2 + y^2) \mid \leq \frac{1}{2} \mid (x^2 + y^2) ln(x^2 + y^2) \mid .$$

On rappelle la limite usuelle :

$$\lim_{t \to 0^+} tln(t) = 0.$$

Si l'on pose $t = (x^2 + y^2)$ on trouve que le terme de gauche admet limite 0 pour $(x,y) \to (0,0)$ et donc pour le théorème du pincement on a :

$$\lim_{(x,y \to (0,0)} f(x,y) = 0.$$

La fonction f admet un prolongement par continuité $\overline{f}$ donné par :

$$\overline{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Exercice 6. Dire si

$$f(x,y) = \frac{xy - 2y}{x^2 + y^2 - 4x + 4}$$

est prolongeable par continuité au point $(2,0)$.

Solution. Comme d'habitude on commence en cherchant deux courbes qui passent pour le point $(2,0)$ et conduisent à deux limites différentes. On essaye avec $y = 0$ et $y = x - 2$. On trouve :

$$f(x,0) = 0 \text{ et } f(x, x-2) = -\frac{1}{2}$$

et donc

$$\lim_{(x,y \to (2,0)} f(x,0) = 0 \text{ et } \lim_{(x,y \to (2,0)} f(x, x-2) = -\frac{1}{2}$$

La fonction n'est pas prolongeable par continuité au point $(2,0)$ car la limite n'existe pas.

Exercice 7. Montrer que la fonction

$$f(x,y) = \sin(xy^2)$$

admet limite 0 au point $(0,0)$.
Solution. Au voisinage de 0 on a l'inégalité usuelle :

$$sin(t) < t.$$

Si l'on pose $t = xy^2$ le théorème du pincement dit que la limite de f pour $(x, y) \to (0, 0)$ est 0, car :

$$0 \leq| \sin(xy^2) |\leq| xy^2 |$$

et xy^2 tend vers 0 si $(x, y) \to (0, 0)$.
La fonction f admet un prolongement par continuité $\overline{f}$ donné par :

$$\overline{f}(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Exercice 8. Prolonger par continuité la fonction

$$f(x, y) = \frac{\sin(2x - 2y)}{x - y}$$

sur la diagonale d'équation $x = y$.

Solution. On rappelle la limite usuelle :

$$\lim_{t \to 0} \frac{\sin(t)}{t} = 1.$$

Si l'on pose $t = x - y$ on a que $t \to 0$ si $x \to y$. Alors :

$$\lim_{x \to y} \frac{\sin(2x - 2y)}{x - y} = \lim_{x \to y} 2 \frac{\sin(2x - 2y)}{2x - 2y} = 2.$$

La fonction f admet un prolongement par continuité $\overline{f}$ donné par :

$$\overline{f}(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{si } x \neq y \\ 2 & \text{si } x = y \end{cases}$$

Exercice 9. En utilisant les coordonnées polaires montrer que la fonction $f(x, y)$ définie dans l'exercise 1 n'est pas continue au point $(0, 0)$.

Solution. Il est souvent utile de passer aux cordonnées polaires pour simplifier le calcul d'une limite d'une fonction de deux variables. Tout point $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$ peut être representé par ses cordonnées polaires centrées autour d'un point (x_0, y_0) grâce aux relations :

$$x = x_0 + r \cos\theta$$

$$y = y_0 + r \sin\theta$$

avec $r > 0$ et $\theta \in [0, 2\pi[$. On peut montrer que si

$$\lim_{r \to 0} f(x_0 + r \cos\theta, y_0 + r \sin\theta) = l$$

alors

$$\lim_{(x,y) \to (x_0, y_0)} f(x, y) = l.$$

On considère la fonction f définie dans l'exercise 1 et on passe en polaires avec $x_0 = 0, y_0 = 0$. On a :

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x, y) = \lim_{r \to 0} f(r \cos\theta, r \sin\theta) =$$

$$= \lim_{r \to 0} \frac{r^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta)}{r^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta)} =$$

$$\lim_{r \to 0} (\cos^2\theta - \sin^2\theta) = \cos 2\theta$$

Pour valeurs différentes de $\cos 2\theta$ on a une valeur limite différent donc la limite n'existe pas.