

# Pourquoi les musiciens n'ont-ils que 12 notes ?

et autres considérations mathématiques

Pierre Monmarché

January 7, 2015

# Maths et composition musicale

abstraction non figurative  $\Rightarrow$  structure claire, épurée ; bref, mathématique.

Contraintes mathématiques fécondes :

- symétries (canons, fugues, etc.), translations, dilatations (Bach, Tavener) . . .
- permutations (dodécaphonisme et musique sérielle)
- procédés aléatoires (Cage)
- etc.

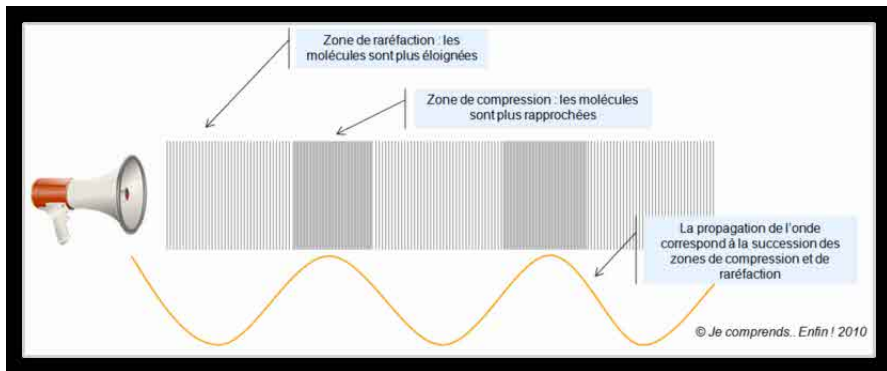
Comment définit-on les notes de musique ?

## Comment définit-on les notes de musique ?

- Pourquoi certains accords seraient-ils plus jolis que d'autres ?
- Pourquoi ne pouvait-on pas faire de variété des années 80 au Moyen-Âge ?
- Pourquoi la musique militaire ?
- Pourquoi Patrick Sebastien ?

# Qu'est-ce qu'un son ?

Le tympan est sensible aux oscillations de la pression de l'air :

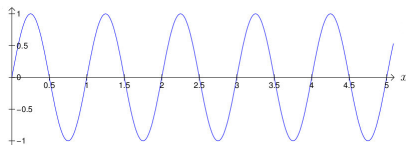


La hauteur d'un son (est-il grave ou aiguë ?) est donnée par la fréquence à laquelle se répète le motif.

En musique, la référence est le **la 440** (Hz).

# La corde vibrante

- D'après l'équation des ondes, si l'oscillation spatiale est sinusoidale :



alors l'oscillation temporelle l'est également ; les fréquences sont proportionnelles.

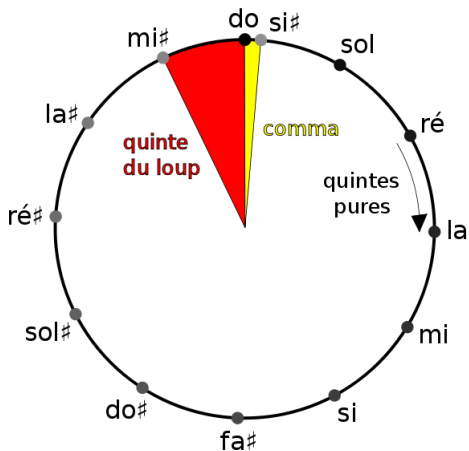
- Un vrai son est une superposition de sinusoides.
- Les extrémités de la corde étant fixes, les seules fréquences possibles sont les multiples de la fréquence fondamentale  $\nu_0 = \frac{\pi}{L}$ .

# La gamme pythagoricienne

- $\nu_0$  : fondamentale (son le mieux entendu).
- $\nu_1 = 2\nu_0$  : octave (note identifiée par le cerveau à la fondamentale).
- $\nu_2 = 3\nu_0 = \frac{3}{2}\nu_1$  : quinte.

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{12} = 129,75$$
$$2^7 = 128$$
$$\frac{3^{12}}{2^{19}} \simeq 1,0137$$

# La gamme pythagoricienne





# De nombreux inconvénients

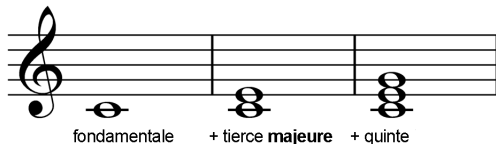
- 1 La quinte du loup.
- 2 La difficulté à moduler ou transposer.
- 3 Des tierces (= 4 quintes) fausses (comma syntonique) :

$$\frac{3^4}{2^5} = \frac{81}{64}$$
$$\frac{5}{4} = \frac{80}{64}.$$

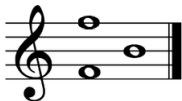
⇒ Tempéraments.

# Des fractions plus jolies que d'autres

- accord majeur = premières harmoniques

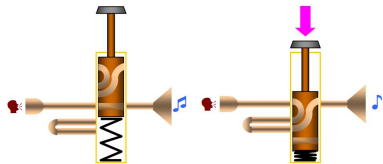
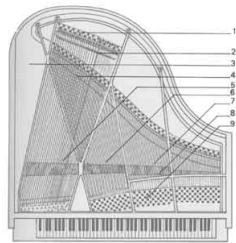
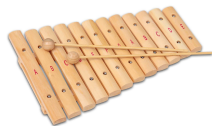


- tons voisins, cadences, etc.
- Triton (diabolus in musica) :  $\sqrt{2}$ .



C'est malgré tout très culturel...

# La dimension 1



# Les tambours



Équation différentielle :

$$\Delta\phi = -\lambda\phi$$

Contrainte :  $\phi = 0$  sur le bord

Fréquences admissibles :  $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$  (sans rapport arithmétique !)

# Étude mathématique des tambours

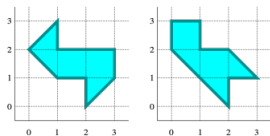
## Théorème (Faber-Krahn 1923)

*La fondamentale d'un tambour est toujours plus aigüe que la fondamentale du tambour rond de même surface.*

## Question (Kac 1965)

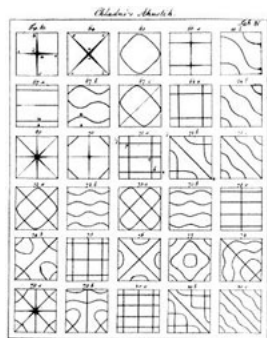
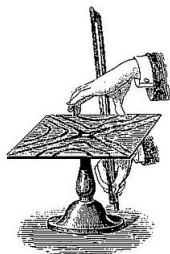
*Peut-on entendre la forme d'un tambour ?*

Contre exemple (Gordon, Webb et Wolpert, 1991) :



En revanche c'est vrai si l'on ne considère que des tambours convexes à frontière analytique (Zelditch, 2000).

# Les figures de Chladni



En 1809 le mathématicien Chladni était invité à présenter une étonnante expérience devant Napoléon.

Ça ressemblait à ça.

# Les figures de Chladni

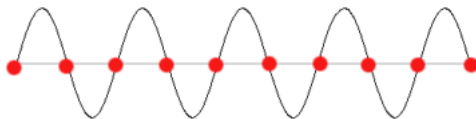


# Explication : les modes propres

Dans l'équation

$$\Delta\phi = -\lambda\phi,$$

la fonction solution  $\phi$  est appelée mode propre associé à  $\lambda$ . C'est la forme de la membrane pendant l'oscillation.



Les points immobiles d'un tambour forme des lignes dites nodales.

Voilà les premiers modes pour un tambour rond.



## 1. Acoustique et géométrie spectrale :

- Comparaison du spectre d'un violon authentique et d'une banque de son
- Un traitement mathématique accessible des tambours
- Les figures de Chladni, plus détaillées (IDM)
- Partitions spectrales minimales (IDM)
- L'effondrement du pont de Tacoma par résonance
- La page d'Édouard Oudet

## 2. Mathématique et composition :

- [The lamb](#) (Tavener, 1982)
- [L'offrande musicale](#) (Bach ; palindrome, ou ruban de Möebius musical)
- [La quinte juste](#) (Kaamelott, Astier)
- [Society for Mathematics and Computation in Music](#)