Polytech'Paris 2018-2019

- GM5

- FICHE n° 2 - Corrigé -

Exercice 1

1. (a) La somme des probabilités fait 1. Donc $\mathbb{P}(N=4)=0.1$.

   (b)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(N) &= 0.1\times 0+0.4\times 1+0.2\times 2+0.2\times 3+0.1\times 4 \\ &= 1.8. \\ \mathbb{E}(N^2) &= 0.1\times 0^2+0.4\times 1^2+0.2\times 2^2+0.2\times 3^2+0.1\times 4^2 \\ &= 4.6 \\ \Rightarrow \qquad \mathrm{var}(N) &= \mathbb{E}(N^2)-(\mathbb{E}(N))^2 \\ &= 4.6-(1.8)^2 \;=\; 1.36. \end{aligned}$$

2. (a)

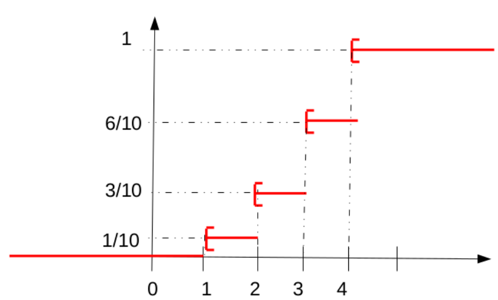
y	0	1	4	6	8
$\mathbb{P}(Y=y)$	0.1	0.4	0.2	0.2	0.1

   (b) $\mathbb{E}(2Y)=2\mathbb{E}(Y)=3.6$ et $\mathrm{var}(2Y)=4\mathrm{var}(Y)=5.44$.

Exercice 2

1. La somme des p_k étant égale à 1,

$$\begin{aligned} 1 &= C\left(\frac{1}{4}+\frac{2}{4}+\frac{3}{4}+\frac{4}{4}\right) \\ &= \frac{5}{2}C \\ \Rightarrow \qquad C &= \frac{2}{5}. \end{aligned}$$

2. 

3.

$$\begin{array}{rrcl} & \mathbb{E}(X) & = & 0.1\times 1+0.2\times 2+0.3\times 3+0.4\times 4 \;=\; 3. \\ & \mathbb{E}(X^2) & = & 0.1\times 1^2+0.2\times 2^2+0.3\times 3^2+0.4\times 4^2 \;=\; 10 \\ \Rightarrow & \operatorname{var}(X) & = & 10-3^2 \;=\; 1. \end{array}$$

Exercice 3

1. L'intégrale de f étant égale à 1,

$$\begin{array}{rrcl} & 1 & = & k\int_{-1}^{1} t^2 dt \;=\; \frac{2}{3}k \\ \Rightarrow & k & = & \frac{3}{2}. \end{array}$$

2.

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{E}(X) & = & \int t f(t) dt \\ & = & \frac{3}{2}\int_{-1}^{1} t^3 dt \\ & = & 0 \end{array}$$

(remarque : la densité est une fonction paire, c'est-à-dire telle que $f(t) = f(-t)$, autrement dit X et $-X$ ont même loi, ce qui implique $\mathbb{E}(X) = 0$)

3.

$$\begin{array}{rcl} \operatorname{var}(X) & = & \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 \\ & = & \mathbb{E}(X^2) \\ & = & \int t^2 f(t) dt \\ & = & \frac{3}{2}\int_{-1}^{1} t^4 dt \;=\; \frac{3}{5}. \end{array}$$

4.

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}(X = 1/3) & = & \int_{1/3}^{1/3} f(t) dt \;=\; 0. \\ \mathbb{P}(X \le 1/2) & = & \frac{3}{2}\int_{-1}^{1/2} t^2 dt \\ & = & \frac{3}{2}\left[\frac{1}{3}t^3\right]_{-1}^{1/2} \;=\; \frac{9}{16}. \\ \mathbb{P}(1/4 \le X \le 1/2) & = & \frac{3}{2}\left[\frac{1}{3}t^3\right]_{1/4}^{1/2} \;=\; \frac{7}{128}. \end{array}$$

Exercice 4

1. Le fait que la réponse est correcte est indépendant d'une question à l'autre, et est de probabilité $\frac{1}{3}$. L'expérience "répondre à une question" est répétée 6 fois, la loi de X est donc la loi binomiale $\mathcal{B}\left(6, \frac{1}{3}\right)$.
2. La moyenne de $\mathcal{B}(n,p)$ est np, ici $\mathbb{E}(X) = 2$.
3. $\mathbb{P}(X \geqslant 5) \;=\; \mathbb{P}(X=5) + \mathbb{P}(X=6) \;=\; 6 \times \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^5 + \left(\frac{1}{3}\right)^6 \simeq 1,8\%$
4. Les événements sont indépendants, la probabilité de l'événement est donc $\left(\frac{1}{3}\right)^5 \times \frac{2}{3} \simeq 2,7.10^{-3}$

Exercice 5

1. (a) En première approximation, on va considerer que la probabilité qu'une panne survienne est indépendante d'un jour à l'autre. A priori, dans ce cas-là, la loi du nombre de panne est une loi binomiale et, comme on sait que la moyenne sur 2000 jours doit être d'une panne, c'est la loi $\mathcal{B}\left(2000, \frac{1}{2000}\right)$. Puisque $\frac{1}{2000}$ est petit (une panne est un événement rare), on peut en fait consider que X suit une loi de Poisson $\mathcal{P}(1)$.

   (b) Qu'on modélise X par une loi binomiale ou de Poisson, dans les deux cas, on calcule $\mathbb{P}(X \leqslant 2) = \mathbb{P}(X=0) + \mathbb{P}(X=1) + \mathbb{P}(X=2)$. Dans les deux cas, on trouve 91,97%.

2. (a) Toujours en supposant les pannes indépendantes d'un jour à l'autre, le temps de première défaillance est donnée par la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$, où p est la probabilité quotidienne qu'une panne survienne. L'événement étant rare, on peut plutôt considérer qu'il suit une loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$, où λ est, là aussi, la probabilité quotidienne qu'une panne survienne.

   (b) Pour la loi géométrique,

$$R(t) \;=\; \mathbb{P}(T \geqslant t) \;=\; (1-p)^t$$

   Pour la loi exponentielle,

$$R(t) \;=\; \mathbb{P}(T \geqslant t) \;=\; \int_t^\infty \lambda e^{-\lambda s} ds \;=\; \left[e^{-\lambda s}\right]_t^\infty \;=\; e^{-\lambda t}.$$

   (c) On a donc, pour la loi exponentielle, $R(210) = 90\% = e^{-210\lambda}$, autrement dit

$$\lambda \;=\; -\frac{\ln(9/10)}{210} \;\simeq\; 5.10^{-4} \text{ pannes par jour.}$$

   En comparaison, pour la loi géométrique, en résolvant $(1-p)^{210} = 9/10$, on trouve également

$$p = 1 - (9/10)^{\frac{1}{210}} \;\simeq\; 5.10^{-4}.$$

   (d) La moyenne de $\mathcal{E}(\lambda)$ est $\frac{1}{\lambda}$, ici environ 50 000 jours (idem géométrique).

Exercice 6

1. La densité f de X est
$$f(x) \;=\; \begin{cases} \frac{1}{30} & \text{si } x \in [0,30] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

2. Fonction de répartition :
$$F(x) \;=\; \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \begin{cases} \frac{x}{30} & \text{si } x \in [0,30] \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ 1 & \text{si } x \geqslant 30. \end{cases}$$
L'espérance est 15 minutes, et
$$\mathbb{E}\left(X^2\right) \;=\; \frac{1}{30}\int_0^{30} t^2 dt \;=\; 300$$
de sorte que $\mathrm{var}(X) = 300 - (15)^2 = 75$.

3. $\mathbb{P}(X \geqslant 15) = \frac{1}{2}$.

4. Remarquez que "$X \geqslant 25$ et $X \geqslant 15$" = "$X \geqslant 25$". Ainsi,
$$\mathbb{P}\left(X \geqslant 25 \mid X \geqslant 15\right) \;=\; \frac{\mathbb{P}\left(X \geqslant 25\right)}{\mathbb{P}\left(X \geqslant 15\right)} \;=\; \frac{1/6}{1/2} = \frac{1}{3}.$$

Exercice 7

1.
$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(U \leq 0.11\right) &\simeq 0,5438 \\
\mathbb{P}\left(U \leq 2.15\right) &\simeq 0,9852 \\
\mathbb{P}\left(U > 0.11\right) &= 1 - \mathbb{P}\left(U \leq 0.11\right) \simeq 0,4562 \\
\mathbb{P}\left(U > 2.15\right) &\simeq 0,0148 \\
\mathbb{P}\left(U = 2.15\right) &= 0 \\
\mathbb{P}(U \geq 2.15) &= \mathbb{P}\left(U > 2.15\right) \simeq 0,0148 \\
\mathbb{P}(U \leq -0.51) &= \mathbb{P}(U \geq 0.51) \simeq 0,305 \\
\mathbb{P}(U \leq -1.23) &= \mathbb{P}(U \geq 1.23) \simeq 0,0193 \\
\mathbb{P}(0.5 < U \leq 1.5) &= \mathbb{P}(U \leq 1.5) - \mathbb{P}(U \leq 0.5) \simeq 0,2417 \\
\mathbb{P}(-1 < U \leq 1) &= 1 - 2 \times \mathbb{P}(U > 1) \simeq 0.6826 \\
\mathbb{P}(-2.6 \leq U < 2.6) &= 1 - 2 \times \mathbb{P}(U > 2.6) \simeq 0.9906.
\end{aligned}$$

2. $q_1 = 0.81$, ensuite on écrit que $\mathbb{P}\left(U \leq q_2\right) = 1 - \mathbb{P}\left(U > q_2\right) = 0.975$, d'où $q_2 = 1.96$. Enfin, puisque $0.2358 < 0.5$, q_3 est forcément négatif, et
$$\mathbb{P}\left(U \leq q_3\right) = \mathbb{P}\left(U \geq -q_3\right)$$
d'où $\mathbb{P}\left(U \leq -q_3\right) = 1 - \mathbb{P}\left(U \geq -q_3\right) = 0,7642$ et $q_3 = -0.72$.

Exercice 8

1. On se ramène à une variable centrée réduite, en posant $U = \frac{X - \mathbb{E}(X)}{\sqrt{\mathrm{var}(X)}}$, de sorte que

$$\mathbb{P}(X \geqslant 3.29) \;=\; \mathbb{P}\left(U \geqslant \frac{0.29}{0.2}\right) \;=\; 1 - \mathbb{P}(U < 1.45) \;\simeq\; 7,35\%.$$

2. $$\mathbb{P}(2.7 \leqslant X \leqslant 3.3) \;=\; \mathbb{P}(|U| \leqslant 1.5) = 2\left(\mathbb{P}(U < 1.5) - \frac{1}{2}\right) \;\simeq\; 86,6\%.$$

3. $$0.975 = \mathbb{P}(X \leq a) \;=\; \mathbb{P}\left(U \leq \frac{a-3}{0.2}\right),$$

   de sorte que $\frac{a-3}{0.2} = 1.96$, et donc $a = 3.392$mm.

4. $Y = \sum_{i=1}^{50} X_i$ est une somme de gaussienne indépendante, c'est donc une gaussienne d'espérance la somme des espérance (donc $50 \times 3 = 150$mm) et de variance la somme des variances (donc $50 \times (0.2)^2 = 2$).

$$\mathbb{P}(Y > 152) \;=\; \mathbb{P}\left(\frac{Y - 150}{\sqrt{2}} > \frac{2}{\sqrt{2}}\right) \;\simeq\; \mathbb{P}(U > 1.41) \;\simeq\; 7.9\%.$$

   Même si les épaisseurs ne sont plus gaussiennes, dans la mesure où elles sont indépendantes, le théorème Central Limite nous dit que, avec 50 d'entre elles, le résultat est approximativement le même que dans le cas gaussien.

5. Notons $Y_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$, qui suit une loi normale de moyenne $3n$ et de variance $n/25$. On veut

$$1\% \geq \mathbb{P}(Y_n > 152) \;=\; \mathbb{P}\left(U > \frac{152 - 3n}{0.2\sqrt{n}}\right),$$

   et donc $\frac{152-3n}{0.2\sqrt{n}} \geq 2.33$. Plutôt que de résoudre théoriquement cette (in)équation en n, on peut tester les premières valeurs : $n = 50$ ne remplit pas la condition, mais $n = 49$, oui. Donc on peut, au maximum, superposer 49 plaques sans que la probabilité de dépasser une épaisseur de 2.33mm soit supérieure à 1%.

Exercice 9

1.

n	24	25	26
$\mathbb{P}(X = n)$	3%	96%	1%

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \frac{3 \times 24 + 96 \times 25 + 26}{100} = 24.98 \\
\mathbb{E}\left(X^2\right) &= \frac{3 \times 24^2 + 96 \times 25^2 + 26^2}{100} = 624.08 \\
\Rightarrow \quad \mathrm{var}(X) &= 624.08 - (24.98)^2 = 0.0796.
\end{aligned}$$

2. (a) $Y = \sum_{i=1}^{400} X_i$.

   (b) On va approximer, en invoquant le TCL, Y par une variable gaussienne de moyenne 400×24.98 et de variance 400×0.0796. Ainis,

$$\mathbb{P}(Y \leq 9900) \quad \simeq \quad \mathbb{P}\left(U \leq \frac{9900 - 9992}{5.643}\right) \quad \simeq \quad \mathbb{P}(U > 0.35),$$

   où U est une gaussienne standard, de sorte que $\mathbb{P}(Y \leq 9900) \simeq 0.3632$.

Exercice 10

On note X le diamètre d'une bague.

1. On se ramène à la variable gaussienne standard $U = \frac{X - \mathbb{E}(X)}{\sqrt{\mathrm{var}(X)}}$, de sorte que

$$\mathbb{P}(X \leq 25.7) \quad = \quad \mathbb{P}\left(U \leq \frac{25.7 - 25.5}{0.1}\right) \quad \simeq \quad 0.9772.$$

2. On cherche d tel que

$$67\% \quad = \quad \mathbb{P}(X \leq d) = \mathbb{P}\left(U \leq \frac{d - 25.5}{0.1}\right),$$

   de sorte que $\frac{d-25.5}{0.1} = 0.44$, et donc $d = 25.544$.

3. On cherche d tel que

$$25\% \quad = \quad \mathbb{P}(X \leq d) = \mathbb{P}\left(U \leq \frac{d - 25.5}{0.1}\right) = \mathbb{P}\left(U \geq -\frac{d - 25.5}{0.1}\right),$$

   et donc

$$75\% \quad = \quad \mathbb{P}\left(U < -\frac{d - 25.5}{0.1}\right),$$

   de sorte que $-\frac{d-25.5}{0.1} \simeq 0.67$, et donc $d = 24.83$.

4. Remarquons que l'intervalle est centré sur la moyenne :

$$\mathbb{P}(X \leq 25.3) = \mathbb{P}(U \leq -2) = \mathbb{P}(U \geq 2) = \mathbb{P}(X \geq 25.7),$$

   de sorte que

$$\mathbb{P}(25.3 \leq X \leq 25.7) = 1 - 2 \times \mathbb{P}(U \geq 2) \simeq 95\%.$$

5. On cherche h tel que

$$99\% = \mathbb{P}(25.5 - h \leq X \leq 25.5 + h) = 1 - 2 \times \mathbb{P}\left(U \geq \frac{h}{0.1}\right),$$

   autrement dit

$$\mathbb{P}\left(U < \frac{h}{0.1}\right) = 1 - \mathbb{P}\left(U \geq \frac{h}{0.1}\right) = 1 - \frac{1 - 99\%}{2} = 0.995,$$

   et donc $h = 0.258$. Ainsi, 99% des bagues sont entre 25.242 et 25.248mm de diamètre.

6. La variable X est une gaussienne de moyenne 25.5 et de variance 10^{-2}, tandis que $-Y$ est une gaussienne de moyenne -1.2 et de variance 25.10^{-4}, indépendante de X. La somme (ou la différence) des deux, est donc une gaussienne d'espérance $25.5 - 1.2 = 24.3$ et de variance 0.0125. Ainsi, toujours en notant U une v.a. gaussienne standard,

$$\mathbb{P}\left(24.1 \leq X - Y \leq 24.5\right) \;=\; \mathbb{P}\left(|U| \leq \frac{0.2}{\sqrt{0.0125}}\right) \;\simeq\; 1 - 2 \times \mathbb{P}\left(U \geq 1.79\right) \;\simeq\; 93\%.$$