Polytech'Paris - GM5 2017-2018

- FICHE n° 2 - Variables aléatoires -

Exercice 1

1. Le nombre de voitures vendues chaque jour par une succursale donnée définit une variable aléatoire N, entre 0 et 4. On a établi que N suit la loi suivante :

n	0	1	2	3	4
$\mathbb{P}(N = n)$	0.1	0.4	0.2	0.2	

   (a) Compléter le tableau.
   (b) Calculer $\mathbb{E}(N)$ le nombre moyen de voitures vendues par jour, et calculer $\text{var}(N)$.

2. On pose $Y = 2N$.
   (a) Quelles sont les valeurs prises par Y ? Donner la loi de Y.
   (b) Calculer $\mathbb{E}(Y)$ et $\text{var}(Y)$.

Exercice 2 Soit X une variable aléatoire quantitative discrète prenant les valeurs $1, \ldots, 4$, avec les probabilités suivantes :

$$p_k = \mathbb{P}(X = k) = C\frac{k}{4} \text{ pour } k = 1, \ldots, 4.$$

1. Calculer la constante C pour que les p_k définissent bien une loi pour X.
2. Calculer et représenter la fonction de répartition de la variable X.
3. Déterminer $\mathbb{E}(X)$ et $\text{var}(X)$.

Exercice 3
On considère la fonction suivante, définie sur $\mathbb{R}$:

$$f(t) = \begin{cases} kt^2 & \text{si } -1 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Déterminer k pour que f soit une densité. On supposera désormais que k est égale à la valeur trouvée, et que f est la densité d'une variable aléatoire X.
2. Calculer l'espérance, la variance et l'écart-type de X
3. Calculer les probabilités suivantes :

$$\mathbb{P}(X = 1/3) \quad ; \quad \mathbb{P}(X \leq 1/2) \quad ; \quad \mathbb{P}(1/4 \leq X \leq 1/2)$$

Exercice 4 Vous passez un QCM comportant 6 questions. A chaque question, trois réponses sont proposées dont une seule est la bonne. Un étudiant qui n'avait pas beaucoup révisé décide de répondre au hasard à chaque question.

1. Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de bonnes réponses de l'étudiant considéré. Donnez la loi de X. Jutifier.
2. En moyenne combien de réponses correctes a t-il ?
3. L'étudiant réussit le test s'il répond correctement à au moins 5 questions. Quelle est la probabilité qu'il réussisse le test ?
4. Quelle est la probabilité que l'étudiant réponde juste aux 5 <u>premières</u> questions et faux à la dernière question?

Exercice 5
Une entreprise utilise, en grande quantité, un type de composants électroniques. On cherche à étudier la fiablilité de ce type de composant.

1. Nombre de pannes du composant sur une durée de 2000 jours :

   On note X la variable aléatoire qui à toute période de 2000 jours consécutifs, associe le nombre de pannes du composant.

   (a) Une étude, menée par le constructeur sur un grand nombre de composants de ce type, permet d'admettre qu'en moyenne pour ce type de composants, il y a 1 panne pour une période de 2000 jours. Par quelle loi modéliser X ?

   (b) Calculer la probabilité que le composant ait au plus deux pannes pendant une période de 2000 jours consécutifs.

2. Durée de vie du composant :

   On désigne par T la variable aléatoire qui représente la durée de vie du composant, c'est-à-dire son temps de bon fonctionnement avant une défaillance.

   (a) Par quelle loi modéliser la variable aléatoire T ?

   (b) On appelle **fiabilité** la fonction définie par :

   $$R(t) = P(T \geq t) = 1 - F(t) \ \ \forall t \geq 0$$

   où F est la fonction de répartition de T. Elle représente la probabilité qu'a le composant d'être encore en fonctionnement au temps t.
   Calculer la fonction de fiabilité $R(t)$ en fonction du paramètre λ de la loi de T.

   (c) Des essais effectués sur un grand nombre de ce type de composants, montre qu'à la date $t = 210$ jours, 90% des composants étaient en fonctionnement. En déduire le paramètre λ.

   (d) Quelle est en moyenne la durée de vie du composant ?

Exercice 6
Le temps d'attente X à un arrêt de bus suit une loi uniforme entre 0 et 30 minutes.

1. Donner la densité de X
2. Déterminer la fonction de répartition de X, son espérance et sa variance.
3. Quelle est la probabilité que vous deviez attendre plus de 15 minutes?
4. Sachant qu'après 15 minutes d'attente le bus n'est pas encore arrivé, quelle est la probabilité que vous deviez attendre au moins 10 minutes supplémentaires ?

Exercice 7 Soit U une variable aléatoire distribuée selon la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$.

1. En utilisant la table des valeurs de la fonction de répartition de cette loi, donner les valeurs des probabilités suivantes :
$$\mathbb{P}(U \leq 0.11), \quad \mathbb{P}(U \leq 2.15)$$
$$\mathbb{P}(U > 0.11), \quad \mathbb{P}(U > 2.15), \quad \mathbb{P}(U = 2.15), \quad \mathbb{P}(U \geq 2.15)$$
$$\mathbb{P}(U \leq -0.51), \quad \mathbb{P}(U \leq -1.23)$$
$$\mathbb{P}(0.5 < U \leq 1.5), \quad \mathbb{P}(-1 < U \leq 1), \quad \mathbb{P}(-2.6 \leq U < 2.6)$$
2. *(Lecture inverse de la table)* Quelles sont les valeurs de q_1 et q_2 telles que :
$$\mathbb{P}(U \leq q_1) = 0.791, \quad \mathbb{P}(U > q_2) = 0.025, \quad \mathbb{P}(U \leq q_3) = 0.2358$$

Exercice 8
Une usine fabrique des plaques de tôle d'épaisseur 3 mm. Les erreurs liées au réglage des machines provoquent une variation de l'épaisseur. On note X la variable aléatoire donnant l'épaisseur en mm d'une plaque de tôle tirée au hasard dans la production. On suppose que X suit une loi normale d'espérance 3 et d'écart-type 0.2.

1. Quelle est la probabilité pour qu'une plaque de tôle tirée au hasard dans la production ait une épaisseur supérieure à 3.29 mm ?
2. Une plaque de tôle est conforme à la norme de l'usine si son épaisseur appartient à l'intervalle [2.7 mm; 3.3 mm]. Quelle est le pourcentage de plaques conforme à la norme?
3. Déterminer l'épaisseur a telle que 97.5% des plaques de tôle de la production ait une épaisseur inférieure à a.
4. On empile 50 plaques prises au hasard dans la production. On note X_i la variable aléatoire donnant l'épaisseur de la plaque numéro i $(1 \leq i \leq 50)$ et Y la variable aléatoire donnant l'épaisseur totale de l'empilage. Les épaisseurs des 50 plaques sont supposées indépendantes.

   Quelle est, en le justifiant, la loi de Y ? Quelle est la probabilité pour que l'épaisseur totale de l'empilage dépasse 152 mm?

   Maintenant on ne suppose plus que l'épaisseur d'une plaque de tôle suit une loi normale. On a simplement remarqué que l'épaisseur moyenne est de 3 mm avec un écart type de 0.2 mm. Répondre dans ce cas à la même question.
5. Quel est le nombre maximum de plaques n que l'on peut empiler si on veut que le risque que l'épaisseur totale dépasse 152 mm, soit inférieure 1% ?

Exercice 9

Une banque accepte de ses clients des rouleaux de pièces de 2 euros sans contrôler le nombre de pièces (en principe 25 par rouleau). On suppose que 3% des rouleaux contiennent 24 pièces, 96% en contiennent 25 et 1% en contiennent 26.

1. Soit X la variable aléatoire associée au nombre de pièces d'un rouleau. Donner la loi de X. Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.
2. On considère $n = 400$ rouleaux, et on note X_i la variable aléatoire associée au nombre de pièces d'un rouleau i. Soit Y la variable aléatoire donnant le nombre de pièces totales qu'il y a dans les 400 rouleaux.
   (a) Exprimer Y en fonction des X_i.
   (b) Calculer la probabilité pour que le total des 400 rouleaux contiennent moins de 9 990 pièces.

Exercice 10

Une entreprise industrielle fabrique des bagues de diamètre 25.5 mm. Les erreurs liées au réglage des machines provoquent une variation du diamètre. On suppose que le diamètre X d'une bague tirée au hasard dans la production, est une variable aléatoire qui suit une loi normale d'espérance 25.5 mm et d'écart type 0.1 mm.

1. Quelle est la probabilité pour qu'une bague tirée au hasard dans la production ait un diamètre inférieur à 25.7 mm ?
2. Quel est le diamètre d tel que 67% des bagues de la production ait un diamètre inférieur à d ?
3. Quel est le diamètre d tel que 25% des bagues de la production ait un diamètre inférieur à d ?
4. Une bague de ce type est considérée comme conforme si son diamètre est compris entre 25.3 et 25.7 mm. Quelle est la probabilité qu'une bague choisie au hasard dans la production soit conforme ?
5. Déterminer un intervalle centré sur l'espérance 25.5, tel que si on tire une bague au hasard dans la production, son diamètre soit dans cet intervalle avec une probabilité de 99%, i.e déterminer h tel que le diamètre X est compris dans l'intervalle $[25.5 - h, 25.5 + h]$ avec une probabilité de 99%.
6. L'alésage est l'opération qui consiste à usiner avec soin la surface intérieure d'un cylindre dans le but d'améliorer la finition de l'état de surface.

   On note Y l'alésage (en mm) d'une bague prise au hasard dans la production . On suppose que Y est une variable aléatoire qui suit une loi normale d'espérance 1.2 et d'écart type 0.05 mm. On suppose de plus que X et Y sont indépendantes.

   Une étude a montré que la fabriation des bagues est correcte, si la condition (C) suivante est satisfaite : $24.1 \leq X - Y \leq 24.5$.

   Quelle est la loi de $T = X - Y$? Donner son espérance et sa variance. Justifier.

   On choisit une bague au hasard, après l'opération d'alésage. Quelle est la probabilité que la bague satisfasse la condition (C) ?