- TD n° 1 - Corrigé -

Exercice 1
Remarque : il peut y avoir d'autres façons d'écrire ces événements.
1) $A \cap B \cap \bar{C}$.
2) $A \cap \bar{B} \cap \bar{C}$.
3) $(A \cap B \cap \bar{C}) \cup (A \cap \bar{B} \cap C) \cup (\bar{A} \cap B \cap C)$.
4) $(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$.
5) $\overline{A \cup B \cup C}$.

Exercice 2
1) La probabilité que je ne trouve pas un ticket dans la première tablette est $1 - \frac{1}{1000}$. La probabilité que je ne trouve pas un ticket dans la seconde est à nouveau $1 - \frac{1}{1000}$, de sorte que la probabilité que je n'ai trouvé un ticket ni dans la première tablette, ni dans la seconde est $\left(1 - \frac{1}{1000}\right)^2$. De même, la probabilité que je n'ai pas trouvé de ticket dans mes k premières tablettes est $\left(1 - \frac{1}{1000}\right)^k$, et donc la probabilité que je n'ai toujours pas de tickets après 1000 tablettes est

$$\left(1 - \frac{1}{1000}\right)^{1000} \simeq 0.37$$

2) Même raisonnement : $\mathbb{P}(5 \ Piles) = \frac{1}{2^5} \simeq 0.03$.

3) Le résultat est indépendent des 4 premiers lancers. $\mathbb{P}(Pile) = \frac{1}{2}$.

Exercice 3
1) Il y a n possibilités pour choisir le 1er étudiant de la liste. Une fois ce premier étudiant, il reste $n-1$ possibilitées pour le second. Puis $n-2$ pour le troisième, etc., jusqu'à ce qu'il ne reste que deux possibilités pour le pénultième, et une seule possibilité pour le dernier. Il y a donc $n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 2 \times 1 = n!$ ordres possibles.

Ces ordres étant équiprobable, (car les étudiants jouent tous le même rôle, aucun n'a plus de chance qu'un autre d'être à une place particulière),

$$\mathbb{P}\left(\text{ordre alphabétique}\right) = \frac{1}{\sharp\text{ordres}} = \frac{1}{n!}$$

2) En considérant (suerstimation très grossière) que 10 milliards d'humains jouent depuis 10 000 ans aux cartes à raisons de 1000 parties par jour, on voit que le nombre de parties de cartes jouées depuis l'aube des temps est, au pire, plus petit que 10^{20}. Donc le nombre d'ordres différents qui ont déjà été joué est plus petit que 10^{20}, est la probabilité de jouer avec un ordre déjà vu est plus petite que

$$\frac{10^{20}}{52!} \simeq 10^{-47}.$$

Exercice 4

1. expérience : on tire une main de bridge. Univers :

$$\Omega = \{\text{combinaison de 13 cartes parmi 52}\}$$

   Probabilité : uniforme, car toutes les cartes jouent le même rôle.

2. On note $\binom{n}{k}$ (ou C_n^k, appelé coefficient binomial) le nombre de façons de choisir k éléments parmi n (pour le bridge, $k = 13$ et $n = 52$). Imaginons que les cartes soient distribuées une par une. Il y a $n = 52$ possibilités pour la première carte, $n - 1 = 51$ pour la seconde, etc., jusqu'à $n - k + 1 = 40$ possibilités pour la k^{ieme}. Il y a donc

$$n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1) \;=\; \frac{n!}{(n-k)!}$$

possibilités de main *si on prend en compte l'ordre dans lequel les cartes arrivent.* Mais en prenant en compte cette ordre, on compte plusieurs fois la même main, par exemple on compte séparément

$$(1\heartsuit, 2\heartsuit, 3\heartsuit, \dots, 10\heartsuit, 1\spadesuit, 2\spadesuit, 3\spadesuit)$$

et

$$(1\spadesuit, 2\spadesuit, 3\spadesuit, 1\heartsuit, 2\heartsuit, 3\heartsuit, \dots, 10\heartsuit).$$

On a compté chaque main autant de fois qu'il y avait d'ordres possibles pour l'arrivée des $k = 13$ cartes. D'après l'exercice précédent, il y a $k!$ ordres possibles. Finalement, le nombre total de mains de bridge possible est

$$\binom{n}{k} \;=\; \frac{n!}{k!(n-k)!} \;=\; \frac{52!}{13!39!}.$$

Remarque de notation : $\{1, 2, 3, 4\}$ désigne l'ensemble constitué des nombres 1, 2, 3 et 4. Il n'y a pas d'ordre pris en compte, en particulier

$$\{1, 2, 3, 4\} = \{1, 4, 3, 2\} = \{2, 1, 3, 4\} = etc.$$

En revanche, $(1, 2, 3, 4)$ désigne le quadruplet constitué d'un 1 en première position, un 2 en seconde, etc., l'ordre compte, et

$$(1, 2, 3, 4) \neq (2, 1, 3, 4).$$

3. (a) On compte le nombre de mains qui contiennent exactement un as : il y a 4 possibilités pour l'as et, pour chacune d'elles, $\binom{48}{12}$ pour les 12 autres cartes. Donc

$$\mathbb{P}\,(\text{exactement un as}) \;=\; \frac{4\binom{48}{12}}{\binom{52}{13}} \;\simeq\; 0.44$$

   (b) Il est plus simple de calculer la probabilité qu'il n'ait aucun as. Le nombre de mains ne contenant aucun as est $\binom{48}{13}$, et donc

$$\mathbb{P}\,(\text{un as au moins}) = 1 - \mathbb{P}\,(\text{pas d'as}) = 1 - \frac{\binom{48}{13}}{\binom{52}{13}}.$$

   (c) De 1 à 10 puis valet, dame, roi, il y a 13 valeurs de cartes. Dans une main de 13 cartes contenant chacune de ces valeurs, il y a 4 possibilités pour le 1 ($\heartsuit$, $\spadesuit$, $\clubsuit$ et $\diamondsuit$) : , 4 possibilités pour le 2, etc., et il y a donc 4^{13} mains qui contiennent chacune des valeurs.

$$\mathbb{P}\,(\text{chaque valeur}) \;=\; \frac{4^{13}}{\binom{52}{13}}.$$

Exercice 5

1. Expérience : prendre un code au hasard. Univers : l'ensemble des quadruplets de $\{1, 2, 3, \dots, 9, A, B, C\}$, c'est-à-dire l'ensemble des (x_1, x_2, x_3, x_4) où, pour $i = 1..4$, $x_i \in \{1, 2, 3, \dots, 9, A, B, C\}$, ce que l'on note

$$\Omega = \{1, 2, 3, \dots, 9, A, B, C\}^4.$$

On suppose la probabilité uniforme, parce qu'on n'a aucune raison de croire que les lettres et les nombres jouent un rôle différent dans la manière dont le code est tiré au hasard (en pratique, ça se discute...).

2. Première remarque : il y a 12 possibilité pour chaque symbole du code, donc 12^4 codes possibles.

(a) On a 12 possibilités pour le premier chiffre puis, étant fixé le premier chiffre, 11 pour le second, puis 10 pour le troisième et 9 pour le dernier, ce qui fait $12 \times 11 \times 10 \times 9$ codes dont les éléments sont distincts. Donc
$$\mathbb{P}\,(4 \text{ différents}) = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9}{12^4}.$$

(b) Il y a 9^4 codes qui ne contiennent pas de lettre, donc
$$\mathbb{P}\,(\text{au moins une lettre}) = 1 - \mathbb{P}\,(\text{pas de lettre}) = 1 - \frac{9^4}{12^4} = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^4.$$

(c) Il y a 4^4 codes uniquement constitués de chiffres pairs, et 5^4 de nombres impairs, donc
$$\mathbb{P}\,(\text{même parité}) = \frac{4^4 + 5^4}{12^4}.$$

(d) Même raisonnement que pour le (a), il y a $9 \times 8 \times 7$ possibilités pour les 3 chiffres distincts, puis 3 pour la lettre, donc
$$\mathbb{P}\,(3 \text{ chiffres puis une lettre}) = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 3}{12^4}.$$

(e) On distingue selon la position de la lettre. On a calculé dans la question précédente la probabilité d'avoir une lettre en dernière position et trois chiffres différents. Le calcul est le même lorsque la lettre est en première, seconde ou troisième position. De plus ces quatre événements sont disjoints (on ne peut pas avoir une lettre uniquement en première position, et en même temps uniquement en seconde position). Donc
$$\mathbb{P}\,(3 \text{ chiffres et une lettre}) = \sum_{i=1}^{4} \mathbb{P}\left(3 \text{ chiffres et une lettre en } i^{ieme} \text{ position}\right) = 4 \times \frac{9 \times 8 \times 7 \times 3}{12^4}.$$

Exercice 6

Un groupe d'étudiants est constitué de 25 femmes et 15 hommes. Parmi les premières, 10 portent des lunettes et, d'autre part, 3 sont blondes. Parmi les seconds, 6 portent des lunettes et, d'autre part, 6 sont blonds. On désigne au hasard un volontaire pour aller corriger un exercice au tableau. Notons F, (respectivement L, B) l'événement "le volontaire est une femme" (resp. "porte des lunettes", "est blond")

1. Parmi 40 personnes, 24 ne portent pas de lunettes, donc $\mathbb{P}(L) = \frac{24}{40} = \frac{3}{5}$.
2. $\mathbb{P}(L|F) = \frac{10}{25} = \mathbb{P}(L)$, les événements L et F sont donc indépendants. En revanche, $\mathbb{P}(B|F) = \frac{3}{25}$ tandis que $\mathbb{P}(B) = \frac{9}{40}$, de sorte que B et F ne sont pas indépendants.
3. $\mathbb{P}(F|\bar{B}) = \frac{\mathbb{P}(\bar{B} \cap F)}{\mathbb{P}(\bar{B})} = \frac{22/40}{31/40} = \frac{22}{31}$.

Exercice 7

On note D (respectivemet G) l'événements "avoir une prothèse au genou droit" (resp. gauche).

1. D'après l'énonce, $\mathbb{P}\,(D|G) = 75\%$, tandis que $\mathbb{P}\,(D) = 15\%$. Les événements ne sont donc pas indépendants.
2. (a) $\mathbb{P}\,(D \cap G) = \mathbb{P}\,(G)\,\mathbb{P}\,(D|G) = \frac{15}{100} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{80}$.
   (b) $\mathbb{P}(G \cap \bar{D}) = \mathbb{P}(G)\mathbb{P}(\bar{D}|G) = \mathbb{P}(G)\,(1 - \mathbb{P}(D|G)) = \frac{15}{100} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{80}$.
   (c) Notez que l'énoncé nous indique $\mathbb{P}(D|G)$, mais pas $\mathbb{P}(G|D)$. Ceci dit,
   $$\mathbb{P}(G|D) = \frac{\mathbb{P}(D \cap G)}{\mathbb{P}(D)} = \frac{\mathbb{P}(G)\mathbb{P}(D|G)}{\mathbb{P}(D)} = \mathbb{P}(D|G) = \frac{3}{4},$$
   de sorte que $\mathbb{P}(D \cap \bar{G}) = \frac{3}{80}$ comme précédemment.
   (d) $\mathbb{P}(\bar{D} \cap \bar{G}) = 1 - \mathbb{P}(D \cup G) = 1 - (\mathbb{P}(D) + \mathbb{P}(G) - \mathbb{P}(D \cap G)) = 1 - \frac{15}{100} - \frac{15}{100} + \frac{9}{80} = \frac{13}{20}$.

Exercice 8
1) L'énoncé se réécrit :

$$\mathbb{P}(O|S) = 96\%, \qquad \mathbb{P}(O|\bar{S}) = 1\%, \qquad \mathbb{P}(\bar{S}) = 95\%.$$

2) On utilise la formule de Bayes (avec, pour retrouver les notations des notes de cours, $A = O$, $B_1 = S$ et $B_2 = \bar{S}$) :

$$\mathbb{P}(S|O) = \frac{\mathbb{P}(S \cap O)}{\mathbb{P}(O)} = \frac{\mathbb{P}(S)\mathbb{P}(O|S)}{\mathbb{P}(O|S)\mathbb{P}(S) + \mathbb{P}(O|\bar{S})\mathbb{P}(\bar{S})} = \frac{\frac{5}{100} \times \frac{96}{100}}{\frac{96}{100} \times \frac{5}{100} + \frac{1}{100} \times \frac{95}{100}} \simeq 0,83.$$

3) Le test est erroné dans deux cas : s'il est positif alors que le conducteur est en-dessous du seuil, et s'il est négatif alors que le conducteur est au-dessus. Donc "eronné" $= (O \cap \bar{S}) \cup (\bar{O} \cap S)$. Les deux erreurs possibles étant des événements disjoints,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left((O \cap \bar{S}) \cup (\bar{O} \cap S)\right) &= \mathbb{P}\left(O \cap \bar{S}\right) + \mathbb{P}\left(\bar{O} \cap S\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\bar{S}\right)\mathbb{P}\left(O|\bar{S}\right) + \mathbb{P}(S)\mathbb{P}(\bar{O}|S) \\
&= \frac{95}{100} \times \frac{1}{100} + \frac{5}{100} \times \frac{4}{100} = 1,15\%.
\end{aligned}$$

Exercice 9
Notons A (respectivement B, C) l'événement "l'ampoule a été fabriquée par la machine A" (resp. B, C) et F l'événement "l'ampoule fonctionne". L'énoncée nous donne :

$$\mathbb{P}(A) = 20\%, \qquad \mathbb{P}(B) = 50\%, \qquad \mathbb{P}(C) = 30\%$$

et

$$\mathbb{P}(F|A) = 0.9, \qquad \mathbb{P}(B) = 0.95, \qquad \mathbb{P}(C) = 0.8.$$

On utilise la formule de Bayes :

$$\mathbb{P}\left(A|F\right) = \frac{\mathbb{P}(A \cap F)}{\mathbb{P}(F)} = \frac{\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(F|A)}{\sum_{J \in \{A,B,C\}} \mathbb{P}(J)\mathbb{P}(F|J)} = \frac{\frac{1}{5} \times 0.9}{\frac{1}{5} \times 0.9 + \frac{1}{2} \times 0.95 + \frac{3}{10} \times 0.8} \simeq 20,1\%$$

Exercice 10

1) Par indépendance des deux moteurs, $\mathbb{P}(A) = \frac{9}{10} \times \frac{9}{10} = 81\%$.
2) En notant C, M et T les événements "le moteur central fonctionne", "l'avion se maintient" et "l'avion tombe" on a, par l'indépende de C et A,

$$\mathbb{P}(M) = \mathbb{P}(C \cup A) = \mathbb{P}(C) + \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(C \cap A) = \frac{199}{200} + \frac{81}{100} - \frac{199}{200} \times \frac{81}{100} = 0,99905$$

et donc

$$\mathbb{P}(T) = 1 - \mathbb{P}(M) = 9,5.10^{-4}.$$