- TD n° 1 - Probabilités -

Exercice 1
Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace de probabilité, et A, B, C trois événements. Exprimer en fonction de A, B, C les événements suivants :
1) A et B sont réalisés, mais pas C
2) A seul est réalisé
3) Exactement deux de ces événements sont réalisés
4) Au moins deux de ces événements sont réalisés
5) Aucun de ces événements n'est réalisé

Exercice 2
1) En achetant des tablettes de chocolat, j'avais une chance sur 1000 de trouver un ticket d'or promotionnel. Pourtant, j'ai acheté 1000 tablettes et je n'ai rien eu. Quel était la probabilité que cela arrive ?

2) On lance 5 fois de suite une pièce de monnaie. Quelle est la probabilité de faire 5 Pile d'affilée ?

3) On vient de lancer 4 fois une pièce de monnaie, qui ont tous donné Pile. On va le relancer une $5^{\text{ème}}$ fois. Quelle est la probabilité de faire Pile ?

Exercice 3
1) Pour un examen, on numérote au hasard une classe de n étudiants. Combien y a-t-il d'ordres possibles ? Quelle est la probabilité pour qu'ils soient placés exactement dans l'ordre alphabétique ?

2) La prochaine fois que vous allez jouer avec un jeu de 52 cartes, vous allez bien les mélanger, ce qui mettra les cartes dans un certain ordre, aléatoire. Est-il possible que vous soyez les premiers, depuis le début de l'histoire de l'humanité, à commencer une partie avec précisément cet ordre de carte ?

Exercice 4
Au bridge, une main est constituée de 13 cartes prises dans un jeu à 52 cartes.

1. Donner l'espace de probabilité (expérience aléatoire, univers, justifier la probabilité choisie).
2. Combien y a-t-il de mains possibles ?
3. Quelle est la probabilité :
   (a) pour qu'un joueur donné reçoive une donne contenant un as exactement ?
   (b) pour qu'un joueur donné reçoive une donne contenant un as au moins ?
   (c) pour qu'un joueur donné reçoive une donne contenant une carte de chaque valeur ?

Exercice 5
Le digicode à l'entrée d'un immeuble est composé de 9 chiffres (1 à 9) et de 3 lettres (A, B, C). Pour ouvrir, il faut composer un code formé de 4 éléments (i.e appuyer sur 4 touches). Un code peut eventuellement comporter plusieurs fois le même élément.

1. Déterminer le nombre de codes possibles. Donner l'espace de probabilité (expérience aléatoire, univers, justifier la probabilité choisie).
2. Calculer la probabilité d'avoir un code qui réponde aux critères suivants :
   (a) les 4 éléments du code sont différents
   (b) le code contient au moins une lettre
   (c) le code est composé de 4 chiffres de même parité (i.e pair ou impair)
   (d) le code est composé de 3 chiffres différents suivis d'une lettre
   (e) le code est composé de 3 chiffres différents et d'une lettre

Exercice 6
Un groupe d'étudiants est constitué de 25 femmes et 15 hommes. Parmi les premières, 10 portent des lunettes et, d'autre part, 3 sont blondes. Parmi les seconds, 6 portent des lunettes et, d'autre part, 6 sont blonds. On désigne au hasard un volontaire pour aller corriger un exercice au tableau.

1. Quelle est la probabilité pour qu'il n'ait pas de lunettes ?
2. Le sexe et le fait de porter des lunettes sont-ils indépendants ? Même question pour le sexe et le fait d'être blond ?
3. Sachant qu'il n'est pas blond, quelle est la probabilité que le volontaire soit une femme ?

Exercice 7
La mise en place d'une prothèse du genou est une opération chirurgicale très fréquente chez les personnes agées. En effet chez les plus de 60 ans, la probabilité d'avoir une prothèse du genou droit est égale à la probabilité d'avoir une prothèse du genou gauche et vaut 15%. De plus on sait qu'il y a 3 chances sur 4 d'avoir besoin d'une prothèse du genou droit sachant que le patient a une prothèse du genou gauche.

1. Les évenements "avoir une prothèse au genou gauche" et "avoir une prothèse au genou droit" sont ils indépendants ?
2. Calculer les probabilités des événements suivants :
   (a) avoir une prothèse au genou gauche et une prothèse au genou droit
   (b) avoir uniquement une prothèse au genou gauche
   (c) avoir uniquement une prothèse au genou droit
   (d) ne pas avoir de prothèse

Exercice 8
Le seuil maximal d'alcoolémie pour conduire une automobile est 0,5 g/l. Un laboratoire a mis au point un éthylotest. Théoriquement, celui-ci devrait être positif lorsqu'une personne testée a une alcoolémie strictement supérieure au seuil toléré. Mais il n'est pas parfait : lorsqu'une personne a une alcoolémie strictement supérieure à 0,5 g/l, l'éthylotest est positif 96 fois sur 100 ; lorsqu'une personne a une alcoolémie inférieure ou égale à 0,5 g/l, l'éthylotest est positif 1 fois sur 100.
Dans une région donnée, on estime que 95 % des conducteurs ont un taux d'alcoolémie inférieur ou égal à $0,5$ g/l. On définit les événements suivants :
O : *"L'éthylotest est positif"*.
S : *"Le conducteur a un taux d'alcoolémie strictement supérieur au seuil toléré"*.
1) Traduire avec les notations proposées, les données numériques de l'énoncé.
2) On soumet au hasard un conducteur de cette région à l'éthylotest. Sachant que son éthylotest est positif, quelle est la probabilité que le conducteur ait un taux d'alcoolémie strictement supérieur au seuil toléré ?
3) Exprimer en fonction de O et S, l'événement : *"l'éthylotest donne un résultat erroné"*. Calculer la probabilité de cet événement.

Exercice 9
Trois machines fabriquent des ampoules életriques dans les proportions suivantes : 20% pour la machine A, 50% pour la machine B et 30% pour la machine C. Les fiabilités respectives des machines A, B et C sont $0.9, 0.95$ et 0.8 (c'est-à-dire la probabilité pour qu'une ampoule fonctionne sachant qu'elle a été fabriquée par la machine A, vaut 0.9).
On achète une ampoule. Sachant qu'elle fonctionne, quelle est la probabilité qu'elle ait été fabriquée par la machine A ?

Exercice 10
Un avion se maintient en vol si le moteur central ou les moteurs sur les deux ailes fonctionnent.
On sait que le moteur central fonctionne avec probabilité $\frac{199}{200}$, que le moteur sur l'aile 1 fonctionne avec probabilité $\frac{9}{10}$, et que le moteur sur l'aile 2 fonctionne aussi avec probabilité $\frac{9}{10}$, On suppose de plus que les trois moteurs fonctionnent indépendamment les uns des autres.
1) On note A l'événement *"les moteurs sur les deux ailes fonctionnent"*. Calculer $\mathbb{P}(A)$.
2) Calculer la probabilité que l'avion se maintienne en vol et en déduire la probabilité que l'avion tombe.