Polytech'Paris - 2011-2012 NOM ....
- GM4 - PRENOM ....

- Contrôle - 14/11/2011

Exercice 1

Le digicode à l'entrée d'un immeuble est composé de 9 chiffres (1 à 9) et de 3 lettres (A, B, C). Pour ouvrir, il faut composer un code formé de 4 éléments (i.e appuyer sur 4 touches). Un code peut eventuellement comporter plusieurs fois le même élément.

1. Déterminer le nombre de codes possibles. Donner l'espace de proabilité (expérience aléatoire, univers, jusitfier la probabilité choisie).
2. Calculer la probabilité d'avoir un code qui réponde aux critères suivants :
   (a) les 4 éléments du code sont différents.
   (b) le code contient au moins une lettre
   (c) le code est composé de 4 chiffres impairs
   (d) le code est composé de 4 chiffres de même parité
   (e) le code est composé de 4 chiffres différents et de même parité
   (f) le code est composé de 4 chiffres différents et impairs
   (g) le code est composé de 2 chiffres suivis de 2 lettres
   (h) le code est composé de 3 chiffres différents suivis d'une lettre
   (i) le code est composé de 3 chiffres différents et d'une lettre

Exercice 2

Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

1. A la fin de chaque étape du tour de France , le vainqueur est soumis à un contrôle anti-dopage. Si le contrôle révèle que le cycliste est dopé, ce dernier est exclu. Malheureusement, ce contrôle n'est pas fiable à 100%. En effet, la probabilité d'exclure un cycliste sachant qu'il est effectivement dopé est de 0.6. En revanche, la probabilité d'exclure un cycliste sachant qu'il est non dopé est de 0.01. On suppose de plus qu'un cycliste sur 10 est dopé.
   (a) Traduire les données de l'énoncé.
   (b) Sachant qu'à une étape, le vainqueur a été exclu, calculer la probabilité qu'il soit effectivement dopé.
   (c) Calculer la probabilité de l'événement : *"le contrôle de dopage donne un résultat erroné"*.
2. Le tour de France comporte 21 étapes. On note X la variable aléatoire égale au nombre d'étapes gagnées par un cycliste dopé. On supposera que les étapes sont indépendantes entres elles.
   (a) Quelle est la loi de X ?
   (b) Combien d'étapes en moyenne peuvent espérer gagner des cyclistes non dopés ?
   (c) Calculer la probabilité qu'aucune étape ne soit gagnée par un cycliste dopé.
   (d) Calculer la probabilité qu'au moins une étape soient gagnées par un cyclistes dopé.

(e) Lorsque le nombre d'étapes du tour de France augmente, on augmente aussi la probabilité qu'au moins une étape soit gagnée par un cycliste dopé. Combien peut-on envisager d'étapes n pour que cette probabilité reste inférieure à 70% ?

Exercice 3
Au cours d'une étape de la course Paris-Dakar les probabilités de crevaisons des pneux d'une moto sont les suivantes : la probabilité de crevaison du pneu avant est de 0.5 et celle du pneu arrière est de 0.4. On sait de plus qu'il y a 3 chances sur 4 de crever le pneu avant sachant que le pneu arrière est crevé.
On considérera que le probabilité de crever d'un pneu déjà réparé au cour de l'étape est nulle.

1. Les évenements "crever le pneu avant" et "crever le pneu arrière" sont ils indépendants ?
2. Calculer les probabilités suivantes :
   (a) crever les 2 pneus (avant et arrière)
   (b) crever uniquement le pneu avant
   (c) crever uniquement le pneu arrière
   (d) ne pas avoir de crevaison
3. La durée de réparation d'une crevaison à l'arrière est de 30 minutes et à l'avant de 16 minutes (et ces deux durées s'ajoutent en cas de crevaison des deux pneus). On note X la variable aléatoire donnant le temps de réparation des crevaisons au cours de l'étape.
   (a) Quelles valeurs peut prendre la variable aléatoire X ? Donner le loi de X.
   (b) Quelle est la durée moyenne de réparation des crevaisons au cours de l'étape ?

Exercice 4

Une entreprise de produits pharmaceutiques fabrique en très grande quantité un certain type de comprimés. La probabilité qu'un de ces comprimés soit conforme à la législation est de 0,9.
A l'issue de la fabrication, un contrôle de qualité permet de tester chaque comprimé avant de le vendre. Mais ce contrôle n'est pas parfait : on constate que lorsqu'un comprimé est conforme, il est accepté à l'issue du contrôle de qualité 9 fois sur 10 ; lorsqu'un comprimé n'est pas conforme, il peut être néanmoins accepté 1 fois sur 10.

1. Traduire avec les notations proposées, les données numériques de l'énoncé.
2. On prélève au hasard un comprimé de la production et on le soumet au contrôle de qualité. Sachant que le comprimé est accepté à l'issue du contrôle de qualité, quelle est la probabilité qu'il soit réellement conforme ?
3. Calculer la probabilité de l'événement :*"le contrôle de qualité donne un résultat erroné"*.
4. Les évenements "le comprimé est conforme" et "le comprimé est accepté" sont -ils indépendants ? Justifier.

Exercice 5

Dans une usine du secteur de l'agroalimentaire, une machine à embouteiller est alimentée par un réservoir d'eau et par une file d'approvisionnement en bouteilles vides. L'exercice consiste en une étude statistique du bon fonctionnement de ce système.

Partie 1 : Défaut d'approvisionnement.

On considère qu'il y a défaut d'approvisionnement lorsque la file d'entrée des bouteilles est vide ('événement A), ou lorsque le réservoir est vide ('événement B). On suppose que les événements A et B sont indépendants et une étude statstique a montré que $P(A) = 0,04$ et $P(B) = 0,02$.

1. Calculer la probabilité qu'il y ait défaut d'approvisionnement.
2. Calculer la probabilité que la file d'entrée des bouteilles ne soit pas vide mais que le réservoir d'eau soit vide.

Partie 2 : Nombre de pannes de la machine sur une durée de 2000 jours consécutifs.

On note X la variable aléatoire qui à toute période de 2000 jours consécutifs, associe le nombre de pannes de la machine.

1. Une étude, menée par le constructeur sur un grand nombre de machines de ce type, permet d'admettre qu'en moyenne pour ce type de machine, il y a 1 panne pour une période de 2000 jours. Par quelle loi modéliser X ?
2. Calculer la probabilité que la machine ait au plus deux pannes pendant la période de 2000 jours consécutifs.

Partie 3 : Durée de vie de la machine

On désigne par T la variable aléatoire qui représente la durée de vie de la machine, c'est-à-dire son temps de bon fonctionnement avant une défaillance

1. Par quelle loi modèliser T. On appelera λ le paramètre de cette loi.
2. On appelle fiabilité la fonction définie par :
$$R(t) = P(T \geq t) \ \ \forall t \geq 0$$
Elle représente la probabilité qu'à la machine d'être encore en marche au temps t (de ne pas avoir eu de défaillance avant l'instant t).
Calculer la fonction de fiabilité $R(t)$ en fonction de λ.
3. Des essais effectués sur un grand nombre de ce type de machine, montre qu' à la date $t = 210$ jours, 90% des machines étaient en fonctionnement. En déduire le paramètre λ.
4. Quelle est en moyenne la durée de vie de la machine ?
5. On envisage de mettre un certain nombre de ces machines en parall'ele pour augmenter la fiabilité du syst'eme. Chaque machine peut tomber en panne de manière indépendante les une des autres. Soit donc un système constitué de 3 machines en paralléle, chacune de

ces machines ayant une durée de vie modélisée par une loi exponentielle de paramètre λ. Calculer la fiabilité du syst'eme. Combien de composants doit-on placer en parall'ele de telle sorte que la fiabilite du syst'eme à la date $t = 2000$ jours soit d'au moins 0.99%