

Examen  
11/01/2016

**Exercice 1**

Entre le premier et le second tour des élections présidentielles, un candidat C commande à un institut de sondage une évaluation de ses chances de gagner. Sur 1000 personnes interrogées et ayant l'intention d'exprimer leur suffrage, 516 déclarent avoir l'intention de voter pour C.

1. L'institut de sondage effectue un test statistique pour savoir si on peut réellement affirmer que le candidat C va l'emporter (c'est-à-dire reçoit plus de 50% des voix).  
L'institut de sondage ne veut pas crier victoire trop vite, et donc déclarera le candidat C vainqueur si le sondage effectué sur les 1000 personnes interrogées le prouve vraiment (c'est-à-dire le candidat C sera déclaré vainqueur avec un risque de se tromper inférieur à 5%).  
Quel test statistique va faire l'institut de sondage ? Pour répondre à cette question, donner  $H_0, H_1$  et justifier en interprétant les erreurs de première et deuxième espèce.
2. Effectuer ce test au niveau 5% et conclure (donnez une phrase avec la conclusion du test et, si oui ou non, vous contrôlez le risque de vous tromper). Commenter.
3. Rappeler la définition de la puissance d'un test. Comment s'interprète-t-elle ici ?
4. Supposons qu'effectivement le candidat C va l'emporter le jour des élections avec 51.5% des suffrages exprimés en sa faveur. Avec quelle probabilité le test effectué par l'institut de sondage sur les 1000 personnes interrogées est-il capable d'affirmer que le candidat C sera vainqueur ? Commenter et critiquer le sondage.
5. Le candidat C est déçu : il espérait plus de ce sondage. Supposons que le candidat C va remporter l'élection avec 51.5% des voix, combien de personnes aurait-il fallu interroger lors d'un sondage pour affirmer que ce candidat sera vainqueur avec un risque de se tromper toujours inférieur à 5%, et une puissance d'au moins 95% ?
6. Faire à la main un graphique donnant l'allure de la courbe de la puissance. Vous représenterez deux courbes : l'une correspondant à l'allure de la puissance si  $n = 1000$  personnes interrogées et l'autre à l'allure de la puissance si  $n = 9000$ .

**Exercice 2**

On a mesuré (en kg) les poids  $x_i$  de raisin par souche sur  $n = 40$  souches prises au hasard dans une vigne. Pour vous éviter des calculs trop longs, les calculs suivants ont été réalisés :

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = 4.7; \quad \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = 2.14$$

1. Construire un intervalle de confiance contenant le poids moyen de raisin par souche avec probabilité 95%.
2. Pour un niveau de confiance de 95%, que vaut la marge d'erreur, i.e l'écart  $|\bar{X} - \mu|$  entre  $\mu$  le poids moyen de raisin par souche et  $\bar{X}$  son estimation calculée avec les  $n = 40$  souches de raisin ? L'interpréter.
3. On cherche à déterminer le nombre  $n$  de mesures nécessaires pour que la marge d'erreur soit inférieure à 0.3kg avec une probabilité de 95%. Déterminer ce nombre  $n$ .
4. Tester au niveau 5% si le poids de raisin par souche est conforme au poids de 5kg. On affirmera que le poids est différent de 5kg si le test effectué sur cet échantillon de  $n = 40$  souches le prouve.