

Examen
Durée 2h

Exercice 1

Une machine est réglée pour fabriquer des plaques de chocolat d'un poids moyen garanti de 250 grammes. On note X la variable aléatoire qui à chaque plaque de chocolat de la production, associe son poids. X est une variable aléatoire d'espérance μ inconnue, et de variance σ^2 inconnue.

Le directeur demande une vérification de la machine. Pour savoir si le poids moyen des plaques de chocolat de la production est ou non inférieur au poids garanti de 250g, on prélève au hasard $n = 33$ plaques de chocolat.

Sur les $n = 33$ poids x_1, \dots, x_n obtenus, les calculs suivants ont été réalisés :

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = 248.1 \text{ g et } s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = 8 \text{ g.}$$

1. Le directeur va effectuer un test pour juger si les plaques de chocolat de sa production respectent bien le poids de 250g ou sont de poids inférieur à ce poids garanti.
Quel test va faire le directeur ? Celui-ci veut en priorité contrôler le risque de déclarer que le poids des plaques de chocolat est insuffisant si ce n'est pas le cas.
Pour répondre à cette question, donner H_0, H_1 et justifier en interprétant les erreurs de première et deuxième espèce.
2. Effectuer le test au niveau 5% et conclure (donnez une phrase avec la conclusion du test et, si oui ou non, vous contrôlez le risque de vous tromper). Commenter.
3. Rappeler la définition de la puissance d'un test. Comment s'interprète-t'elle ici ?
4. Supposons que les machines sont effectivement mal réglées et que le poids moyen des plaques de chocolat de la production est de $\mu = 248\text{g}$.
 - (a) Avec quelle probabilité le test de niveau 5% effectué sur un échantillon de taille $n = 33$ permet-il de détecter que les machines sont mal réglées ? Commenter.
 - (b) Comment faire pour avoir un test de niveau 5% et une puissance élevée ?
 - (c) Calculer le nombre de mesures n nécessaires pour que la puissance du test soit au moins égale à 80%. (On supposera que sur cet échantillon de n plaques de chocolat, l'écart-type estimé est encore égal à 8g).
5. Faire à la main un graphique donnant l'allure de la courbe de puissance. Vous représenterez deux courbes : l'une correspondant à l'allure de la puissance si $n = 33$ et l'autre à l'allure de la puissance si $n = 100$.

Exercice 2

Pour juger de la teneur en magnésium d'une eau minérale, on a effectué $n = 50$ mesures (en mg pour 10 litres), et on note X_1, \dots, X_n les $n = 50$ teneurs en magnésium obtenues. On suppose que la teneur en magnésium est une variable aléatoire d'espérance μ et de variance σ^2 . Les paramètres μ et σ^2 sont inconnus.

On a obtenu sur les 50 mesures les résultats suivants :

$$\sum_{i=1}^n x_i = 12365 \text{ et } s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = 3.33$$

1. Calculer à partir de l'échantillon, l'estimation de la teneur moyenne en magnésium de cette eau minérale.
2. Quelle quantité permet de juger si cette teneur moyenne en magnésium est très variable ?
3. Quel est l'intérêt d'un intervalle de confiance par rapport à la première question ?
4. Construire (donc justifier un minimum les étapes) un intervalle de confiance contenant la teneur moyenne en magnésium μ avec probabilité 95%.
5. Qu'est-ce-que la marge d'erreur lorsque l'on cherche à estimer la teneur moyenne en magnésium μ ?
Que vaut-elle pour un niveau de confiance de 95% et $n = 50$ mesures ? Interpréter.
6. On cherche à déterminer le nombre n de mesures nécessaires pour que la marge d'erreur soit inférieure à 0.5mg avec une probabilité de 95%. Expliquer comment on peut déterminer ce nombre n .
7. La teneur conseillée en magnésium d'une eau minérale est de 245mg. Tester si la teneur en magnésium de cette eau est significativement différente de 245mg. On affirmera que la teneur en magnésium de cette eau est différente de 245mg si le test effectué sur les $n = 50$ mesures le prouve.
8. On cherche maintenant à tester si la teneur en magnésium de cette eau est significativement supérieure à 245mg.
 - (a) Qu'est-ce-qui laisse penser cela ?
 - (b) Donner H_0 et H_1 . On affirmera à nouveau que la teneur en magnésium de cette eau est supérieure à 245mg si le test effectué sur les $n = 50$ mesures le prouve.
 - (c) Effectuer le test au niveau 5% et conclure.