- POLYTECH PARIS -
2013-2014 GM4A - GM4B

Examen 13 janvier 2014
Durée *2h*

Exercice 1
Dans une usine, on note X la variable aléatoire qui à chaque pièce de la production, associe son diamètre. On note $\mu = E(X)$ le diamètre moyen de toutes les pièces de la production, et $\sigma^2 = var(X)$ la variance. Les paramètres μ et σ^2 sont inconnus.
A la sortie de la chaîne de fabrication, on a prélevé un échantillon de 36 pièces, dont on a mesuré le diamètre (en mm). On note $X_1, \ldots, X_n$ les VA associées aux diamètres des $n = 36$ pièces. On a obtenu les résultats suivants :

diamètre x_i	200.1	200.8	201	201.5	202
Effectifs	3	11	14	6	2

Pour vous éviter des calculs trop longs, le calcul suivant a été réalisé :

En notant $\bar{x} = \frac{1}{36} \sum_{i=1}^{36} x_i$ alors :

$$\sum_{i=1}^{36} (x_i - \bar{x})^2 = 6.37$$

1. Calculer à partir de l'échantillon, l'estimation du diamètre moyen d'une pièce de la production.
2. Ce diamètre moyen est-il très variable ?
3. Quel est l'intérêt d'un intervalle de confiance par rapport à la première question ?
4. Construire un intervalle de confiance contenant le diamètre moyen μ d'une pièce avec probabilité 95%.
5. Si on dispose uniquement d'un échantillon de 10 pièces $X_1, \ldots, X_{10}$, peut-on construire un intervalle de confiance pour le diamètre moyen μ en utilisant la même méthode que dans la question 4 ? Justifier.
6. Déterminer le nombre n de mesures nécessaires pour que la marge d'erreur, i.e l'écart $|\bar{X} - \mu|$ entre μ le diamètre moyen d'un pièce de la production et $\bar{X}$ son estimation calculée avec n pièces, soit inférieure à 0.1mm avec une probabilité de 95%.
7. La norme pour le diamètre de ce type de pièces est de 200mm. Tester si le diamètre des pièces de la production est significativement différent de la norme. On affirmera que la norme n'est pas respectée si le test effectué sur les 36 pièces le prouve.

Exercice 2

Un viticulteur produit un certain cru qu'il met en bouteille de 75 cl. On note X la variable aléatoire qui à chaque bouteille de la production, associe la contenance de la bouteille. X est une variable aléatoire d'espérance μ inconnue, et de variance σ^2 inconnue.

Pour savoir si la contenance moyenne de ses bouteilles est inférieure à la contenance légale de 75 cl, le viticulteur prélève au hasard $n = 50$ bouteilles de sa production. On note $X_1, \dots, X_{50}$ les variables aléatoires donnant les contenances des 50 bouteilles. Le viticulteur a obtenu les résultats suivants : il mesure sur les 50 bouteilles une contenance moyenne de $\bar{x} = \frac{1}{50}\sum_{i=1}^{50} x_i = 74.82$ cl avec un écart-type estimé $s = \sqrt{\frac{1}{50}\sum_{i=1}^{50}(x_i - \bar{x})^2} = 0.99$ cl.

1. Le viticulteur va effectuer un test pour voir si les bouteilles de sa production, respectent la contenance légale de 75 cl, ou si elles sont trop peu remplies (de contenance moyenne inférieure à la contenance légale de 75 cl).

   Quel test va faire le viticulteur ? Celui-ci veut en priorité contrôler le risque de déclarer que les bouteilles ne sont pas assez remplies, si ce n'est pas le cas.

   Donner H_0, H_1 et justifier en interprétant les erreurs de première et deuxième espèce.
2. Effectuer le test au niveau 5% et conclure : peut-on affirmer que la contenance moyenne des bouteilles est inférieure à la contenance légale ?
3. Quelle reproche pouvez-vous faire sur cette expérience ?
4. Rappeler la définition de la puissance d'un test. Comment s'interprète-t'elle ici ?
5. Supposons que le viticulteur est malhonnête et qu'il s'est arrangé pour que la contenance moyenne réelle de ses bouteilles soit de $\mu = 74.8$ cl.
   (a) Quelle est la probabilité que le test détecte la fraude ?
   (b) Que proposez vous pour détecter cette fraude avec grande probabilité, tout en gardant un test de niveau 5% ?
   (c) Calculer le nombre de bouteilles nécessaires pour que la puissance du test soit au moins égale à 85%. (On supposera que sur cet échantillon de n bouteilles, l'écart-type estimé est encore égal à 0.99cl).
   (d) Faire à la main un graphique donnant l'allure de la courbe de la puissance en fonction de μ. Vous représenterez deux courbes : l'une correspondant à l'allure de la puissance si $n = 50$ et l'autre à l'allure de la puissance si $n = 178$.