- POLYTECH PARIS -
2011-2012 GM4B - GM4C

Examen 13 janvier 2012
Durée *2h*

Exercice 1
On suppose que le nombre d'heure de sommeil par jour d'un bébé de six mois est une variable aléatoire normale d'espérance 10 heures et d'écart-type $1,2$ heures.

1. Quelle est la probabilité qu'un bébé de six mois dorme entre 8 et 12 heures ?
2. Déterminer la valeur de a telle que 33% des bébés de six mois dorment plus de a heures ?
3. Déterminer la valeur de a telle que 25% des bébés de six mois dorment moins de a heures ?
4. Déterminer h tel que le nombre d'heure de sommeil par jour d'un bébé de six mois soit compris dans l'intervalle $[10-h, 10+h]$ avec une probabilité de 95%.

Exercice 2
Un ascenseur peut porter une charge de 500kg. On admet que le poids d'un individu suit une loi normale de moyenne 75 et d'écart-type 4. On suppose que les poids d'individus différents dont indépendants. Quel est le nombre maximum de personnes que l'on peut autoriser à monter ensemble dans l'ascenseur si on veut que le risque de surcharge ne dépasse pas 0.001 ?

Exercice 3
On veut étudier la vitesse moyenne des voitures dans un virage d'une route à grand trafic. Pour cela, on a enregistré à l'aide d'un radar la vitesse X de 500 voitures dans des conditions de circulation homogènes (météo, visibilité, densité de trafic, ...). On suppose que les variables aléatoires associées $X_1, \ldots, X_{500}$ sont i.i.d d'espérance μ inconnue, et de variance σ^2 inconnue.

On a observé les valeurs suivantes :

$$\sum_{i=1}^{500} x_i = 45450km/h; \quad \sum_{i=1}^{500}(x_i - \bar{x})^2 = 44091.64(km/h)^2$$

1. Calculer à partir de l'échantillon, l'estimation de la vitesse moyenne des voitures dans ce virage.
2. Cette vitesse moyenne est-elle très variable ?
3. Quel est l'intérêt d'un intervalle de confiance par rapport à la première question ?
4. Construire un intervalle de confiance contenant la vitesse moyenne μ des voitures dans ce virage avec probabilité 95%.
5. La vitesse réglementaire sur cette route est de 90 km/h. Peut-on affirmer, avec un risque de 5% de se tromper, que la vitesse moyenne des voitures dans ce virage est différente de 90 km/h ?
6. Si on dispose uniquement d'un échantillon de 10 vitesses $X_1, \ldots, X_{10}$, peut-on construire un intervalle de confiance pour la vitesse moyenne μ en utilisant la même méthode que dans la question 4 ? Justifier.

Exercice 4

Une société utilise une machine pour remplir automatiquement des paquets de café moulu dont le poids garanti est de 100 grammes. On note X la variable aléatoire qui à chaque paquet de café de la production, associe son poids. X est une variable aléatoire d'espérance μ inconnue, et de variance σ^2 inconnue.

Pour savoir si le poids moyen des paquets de café de sa production est ou non inférieur au poids légal de 100g, le directeur de l'usine prélève au hasard $n = 32$ paquets de sa production. On note $X_1, \ldots, X_n$ les variables aléatoires donnant les poids des n paquets. Le directeur obtient les résultats suivants : il mesure sur les $n = 32$ paquets un poids moyen $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = 98.9$ g avec un écart-type estimé $s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} = 5$ g.

1. Le directeur va effectuer un test pour voir si les paquets de sa production respectent le poids légal de 100g, ou s'ils sont trop peu remplis.

   Quel test va faire le directeur ? Celui-ci veut en priorité contrôler le risque de déclarer que les paquets ne sont pas assez remplis, si ce n'est pas le cas.

   Pour répondre à cette question, donner H_0, H_1 et justifier en interprétant les erreurs de première et deuxième espèce.

2. Effectuer le test au niveau 5% et conclure : peut-on affirmer que le poids moyen des paquets de café est inférieur au poids légal ?

   Commenter votre résultat.

3. Supposons qu'il y a un mauvais réglage des machines et qu'en fait le poids moyen réel des paquets de café de la production est de $\mu = 99$g.

   (a) Quelle est la probabilité que le test détecte ce mauvais réglage ? Interpréter.
   A quoi correspond la probabilité que vous venez de calculer ?

   (b) Que proposez vous pour détecter le mauvais réglage avec grande probabilité, tout en gardant un test de niveau 5% ?

   (c) Calculer le nombre de paquets nécessaires pour que la puissance du test (pour $\mu =$ 99g) soit au moins égale à 95%. (On supposera que sur cet échantillon de n paquets, l'écart-type estimé est encore égal à 5g, meme si c'est une hypothèse abusive puisqu'on devrait réussir à réduire l'écart-type estimé en augmentant n).

   (d) Faire à la main un graphique donnant l'allure de la courbe de la puissance en fonction de μ. Vous représenterez deux courbes : l'une correspondant à l'allure de la puissance si $n = 32$ et l'autre à l'allure de la puissance si $n = 270$.