Probabilités et Statistiques : éléments de cours

Les grandes lignes

- Probabilités : décrire/étudier des modèles théoriques. Exemples :

  — Modéliser un lancer de dé comme un tirage uniforme (= équiprobable) sur $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
  — Modéliser la durée de vie d'un composant électronique par une variable aléatoire de loi exponentielle.
  — Modéliser les dimensions d'une pièce usinée par une variable aléatoire gaussienne.

  mots clés : expériences, événements et variables aléatoires, probabilités, probabilités conditionnelles, indépendence, lois.

- Statistiques descriptives : décrire des données (des observations, des mesures) dont on dispose ; en tirer de l'information pertinente. Exemples :

  — Voilà les résultats de 1000 lancers de dés. Quelle est la fréquence de 6 ?
  — Voilà les durées de vie de composants électriques mesurés sur les 10 dernières années. Quelle est la valeur moyenne ? Cela ressemble-t-il à une distribution exponentielle ?
  — Voilà les dimensions mesurées sur des pièces usinées depuis 5 ans, et voilà les relevés de la température extérieure durant cette période. Les deux sont-ils corrélés ?

  mots clés : espérance, variance, écart-type, fonction de distribution, histogramme.

- Statistiques inférentielles : prendre des décisions à partir d'un échantillon, c'est-à-dire d'observations partielles (mais représentatives), en se basant sur un modèle probabiliste. Exemples :

  — Sur 20 lancers de dés, j'ai eu 7 fois 6. Le dé est-il pipé ?
  — Mon fournisseur prétend que ses composants ont une durée de vie moyenne de 2 ans. Or, 5 sur 10 étaient morts en moins d'un an. Dois-je changer de fournisseur ?
  — Combien de mesures dois-je effectuer pour m'assurer qu'une machine produit, à 95%, des pièces entre 0.9 et 1.1 cm ?

  mots clés : estimation, intervalle de confiance, test.

Chapitre 1 : Espace de Probabilité

1 Expérience aléatoire et évenements

Définition. On appelle expérience aléatoire toute expérience dont on ne peut pas prévoir le résultat à l'avance (résultat soumis au hasard).

Définition. L'ensemble de tous les résultats possibles d'une expérience aléatoire est appelé espace d'états ou univers, et noté Ω.

Définition. Un évenement A (associé à une expérience aléatoire) est un sous-ensemble (ou partie) de Ω, i.e un ensemble de résultats. On note donc $A \subset \Omega$.

Au vue de l'expérience aléatoire, on peut dire s'il est realisé ou non.

Définition.

— Si $a \in \Omega$ est un résultat, alors l'ensemble $\{a\}$ réduit à ce seul résultat est appelé événement élémentaire.

— L'événement impossible est noté $\emptyset$.

— L'événement certain est Ω.

— L'événement complémentaire de A est noté $\bar{A}$.

— Si A et B sont des événements , alors l'événement "A et B sont réalisés" est noté $A \cap B$.

— Si A et B sont des événements , alors l'événement "A ou B sont réalisés" est noté $A \cup B$ (ie A seul est réalisé, ou B seul, ou les deux sont réalisés).

— Si $A \cap B = \emptyset$ (ie A et B ne peuvent pas se réaliser en même temps), on dit que A et B sont disjoints ou incompatibles.

2 Probabilités

Définition. Soit Ω l'univers associé à une expérience aléatoire et $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble des évenements. On appelle probabilité $\mathbb{P}$ toute fonction de $\mathcal{P}(\Omega)$ dans $[0,1]$ qui vérifie :

1. $\mathbb{P}(\emptyset) = 0, \mathbb{P}(\Omega) = 1$
2. ($\sigma-$**additivité**) Si $(A_i)_{i\in I}$ est une famille finie ou dénombrable d'événements disjoints 2 à 2 (ie. $A_i \cap A_j = \emptyset$), alors :
$$\mathbb{P}(\bigcup_{i\in I} A_i) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}(A_i)$$

Propriétés. Soient A et B deux événements .

1. $\mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$
2. Si $A \subset B$ alors $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$
3. $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

Définition. Si $\Omega = \{w_1, \ldots, w_n\}$ est un ensemble fini, et si tous les éléments w_i (résultats de l'expérience aléatoire) ont la même probabilité d'apparitition, on dit alors que Ω est *équipropable*.

Dans ce cas, on a :

- pour tout w_i, $\mathbb{P}(\{w_i\}) = \frac{1}{\text{Card}(\Omega)}$
- pour tout événement A, $\mathbb{P}(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}$ (on dit souvent $\frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possible}}$)

On dit alors que $\mathbb{P}$ est la *probabilité uniforme* sur Ω.

Dans le cas où $\mathbb{P}$ est la probabilité uniforme sur un univers Ω fini, pour calculer la probabilité d'un événement A, il suffit de calculer son cardinal. On est ainsi ramené à un problème de dénombrement.

3 Probabilité conditionnelle et indépendance

Définition. Soient A et B deux événements tels que $\mathbb{P}(B) > 0$. La probabilité conditionnelle de A sachant B, notée $\mathbb{P}(A|B)$ est définie par :

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

Propriété. Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et B un événement tel que $\mathbb{P}(B) > 0$. Alors l'application de $\mathcal{P}(\Omega)$ dans $[0,1]$, qui a un événement $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ associe $\mathbb{P}(A|B)$ définit une nouvelle probabilité sur Ω, appelée probabilité conditionnelle sachant B. En particulier :

1. $\mathbb{P}(\Omega|B) = 1$.
2. $\mathbb{P}(\emptyset|B) = 0$
3. $\mathbb{P}(\bar{A}|B) = 1 - P(A|B)$
4. Si A_1 et A_2 disjoints, alors $\mathbb{P}(A_1 \cup A_2|B) = \mathbb{P}(A_1|B) + \mathbb{P}(A_2|B)$.

Remarque. Si $\mathbb{P}(A) > 0$ et $\mathbb{P}(B) > 0$, on a $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A|B) \times \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B|A) \times \mathbb{P}(A)$

Propriété. Soit $(B_i)_{i \in I}$ une famille finie ou dénombrable d'événements 2 à 2 disjoints tels que $\bigcup_{i \in I} B_i = \Omega$ (on dit que c'est une partition de Ω). Si pour chaque i, $\mathbb{P}(B_i) > 0$, alors on a :

1. *Formule des probabilités totales.*

$$\mathbb{P}(A) = \sum_i \mathbb{P}(A \cap B_i) = \sum_i P(A|B_i)\mathbb{P}(B_i) \quad \text{pour tout événement } A$$

2. *Formule de Bayes*

$$\mathbb{P}(B_i|A) = \frac{\mathbb{P}(B_i \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A|B_i)\mathbb{P}(B_i)}{\sum_j P(A|B_j)\mathbb{P}(B_j)} \quad \text{pour tout événement } A \text{ tel que } \mathbb{P}(A) > 0$$

Définition. Deux événements A et B sont dits indépendants si $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$. C'est équivalent à dire que $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$.

Propriété. Si les événements A et B sont indépendants, alors il en est de même de A et $\bar{B}$, $\bar{A}$ et B, $\bar{A}$ et $\bar{B}$.

Chapitre 2 : Variables aléatoires

Dans tout ce chapitre, $(\Omega, \mathbb{P})$ est un espace de probabilité.

1 Définitions

1.1 Variable aléatoire

Définition. On appelle variable aléatoire réelle, toute fonction $X : \Omega \to \mathbb{R}$, qui à chaque résultat w de l'expérience aléatoire, associe la valeur $X(w)$ prise par X. On note $X(\Omega)$ l'ensemble de valeurs prises par la variable aléatoire X.

Définition. On appelle *loi* d'une variable aléatoire X la probabilité $\mathbb{P}_X$ définie par $\mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(X \in A)$ pour tout A inclus dans $\mathbb{R}$.

Définition. Une variable aléatoire X est dite discrète si elle ne prend qu'un nombre fini ou dénombrable de valeurs :

$$X(\Omega) = \{x_k, k \in K \subset \mathbb{N}\}.$$

La loi d'une variable aléatoire discrète X est caractérisée par la donnée des $\mathbb{P}(X = x_k)$ pour tout k (noté p_k). $X(\Omega)$ est alors appelé le support de la loi de X.

Définition. Une variable aléatoire X est dite continue s'il existe une fonction f, positive, qui vérifie $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 1$ et telle que pour tout intervalle A de $\mathbb{R}$

$$\mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(X \in A) = \int_A f(x)dx.$$

La fonction f est alors appelée la *densité* de la variable aléatoire X. La loi d'une variable aléatoire continue est déterminée par sa densité f.

Propriété. Si X est une variable aléatoire continue alors $\forall a \in \mathbb{R},\ \mathbb{P}(X = a) = 0$

2 Caractéristiques des variables aléatoires

2.1 Espérance et variance

Cas d'une variable aléatoire discrète

Définition. Soit X une variable aléatoire discrète prenant les valeurs $\{x_k,\ \ k \in K \subset \mathbb{N}\}$ avec probabilités $p_k = \mathbb{P}(X = x_k)$. On dit que la variable aléatoire X est intégrable et on définit son espérance par :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k \in K} x_k p_k = \sum_{k \in K} x_k \mathbb{P}(X = x_k)$$

lorsque la série $\sum_{k \in K} |x_k| p_k < \infty$ (si K est finie, la somme existe toujours).

Cas d'une variable aléatoire continue

Définition. Soit X une variable aléatoire continue de densité f. On dit que la variable aléatoire X est intégrable et on définit son espérance par :

$$\mathbb{E}(X) = \int_{\mathbb{R}} x f(x)dx$$

lorsque l'intégrale $\int_{\mathbb{R}} |x| f(x)dx < \infty$.

Définition. Soit X une variable aléatoire telle que X^2 soit intégrable (c'est-à-dire telle que $\mathbb{E}(X^2) < \infty$). On définit la variance de la variable aléatoire X par

$$\mathrm{var}(X) = \mathbb{E}\left([X - \mathbb{E}(X)]^2\right)$$

et son écart-type par $\sigma(X) = \sqrt{\mathrm{var}(X)}$.

Propriétés.

1. L'espérance est linéaire : pour tout $a, b \in \mathbb{R}$,
$$\mathbb{E}(aX + b) = a\mathbb{E}(X) + b$$
2. La variance est positive : $\mathrm{var}(X) \geq 0$
3. $\mathrm{var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$
4. Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$,
   $\mathrm{var}(a) = 0$
   $\mathrm{var}(aX) = a^2\mathbb{E}(X)$
   $\mathrm{var}(X + b) = \mathrm{var}(X)$

Définition. On dit qu'un variable aléatoire X est centrée si $\mathbb{E}(X) = 0$, et on dit qu'elle est réduite si $\mathrm{var}(X) = 1$. Si $\mathbb{E}(X) = \mu$ et $\mathrm{var}(X) = \sigma^2$, alors $\frac{X-\mu}{\sigma}$ est une variable aléatoire centrée réduite.

2.2 Fonction de répartition

Définition. On appelle *fonction de répartition* d'une variable aléatoire réelle X, la fonction $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$ définie par :

$$F(t) = \mathbb{P}(X \leq t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Propriétés.

1. La fonction de répartiton caractérise la loi d'une variable aléatoire réelle, i.e deux variables aléatoires réelles ayant même fonction de répartition ont même loi.
2. La fonction de répartition est une fonction croissante.
3. La fonction de répartition est une fonction continue à droite.
4. $\underset{x\to-\infty}{lim} F(x) = 0$ et $\underset{x\to+\infty}{lim} F(x) = 1$

Propriété. Soit X une variable aléatoire continue de densité f.
Soit F sa fonction de répartition : $F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

1. La fonction de répartition F une fonction continue.
2. La fonction de répartition F est dérivable en tout point x où f est continue, et $F'(x) = f(x)$.
3. À l'inverse, si la fonction de répartition F de X est dérivable, alors X admet pour densité $f(x) = F'(x)$.

Définition. Soit X une variable aléatoire de fonction de répartition F. Soit $0 < p < 1$. On définit le quantile d'ordre p de la loi de X par $q_p = \inf\{x : F(x) \geq p\}$.

En particulier, si F est continue et strictement croissante, le quantile l'ordre p de la loi de X est la solution de $F(q_p) = p$.

On appelle médiane de la loi de X le quantile d'ordre $p = 1/2$, et on appelle permier et troisième quartiles les quantiles d'ordre $p = 1/4$ et $p = 3/4$.

2.3 Variables aléatoires indépendantes

Définition. Deux variables aléatoires X et Y sont indépendantes si pour tout $A \subset \mathbb{R}$ et tout $B \subset R$, les événements "$X \in A$" et "$Y \in B$" sont indépendants, c'est-à-dire :

$$\mathbb{P}(X \in A, Y \in B) = \mathbb{P}(X \in A)\mathbb{P}(Y \in B).$$

Définition.

1. Les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes si pour tous $A_1, \ldots, A_n \subset \mathbb{R}$,

$$\mathbb{P}(X_1 \in A_1, \ldots, X_n \in A_n) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i \in A_i)$$

2. La suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires est dite indépendante si pour tout n, la famille finie $X_1, \ldots, X_n$ est indépendante.

Définition. Lorsque n variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes et suivent la même loi, on dit que $X_1, \ldots, X_n$ sont i.i.d (indépendantes et identiquement distribuées).

Propriété. Soient g et h deux fonctions continues. Si X et Y sont indépendantes, alors $g(X)$ et $h(Y)$ sont aussi indépendantes.

Propriétés.

1. Si les variables aléatoires X et Y sont indépendantes, alors $\mathrm{var}(X+Y) = \mathrm{var}(X)+\mathrm{var}(Y)$
   Remarque : on a donc $\mathrm{var}(X - Y) = \mathrm{var}(X) + \mathrm{var}(Y)$
2. Si les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes, alors $\mathrm{var}(\sum_{i=1}^n X_i) = \sum_{i=1}^n \mathrm{var}(X_i)$

2.4 Covariance

Définition. Soient X et Y deux variables aléatoires .

1. On définit la covariance de X et de Y par (lorsqu'elle existe ie lorsqu'elle est $< \infty$) par :

$$\begin{aligned} \mathrm{cov}(X,Y) &= \mathbb{E}\big[(X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))\big] \\ &= \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) \quad \text{par linéarité de l'espérance} \end{aligned}$$

   et le coefficient de corrélation par :

$$\mathrm{corr}(X,Y) = \frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{var}(X)\mathrm{var}(Y)}} \in [-1, 1]$$

2. On dit que X et Y sont non corrélées si $\mathrm{cov}(X,Y) = 0$

Propriétés.

1. **Symétrie** $\mathrm{cov}(X,Y) = \mathrm{cov}(Y,X)$
2. $\mathrm{cov}(X,X) = \mathrm{var}(X)$
3. **Bilinéarité** $\mathrm{cov}(X_1 + X_2, Y) = \mathrm{cov}(X_1, Y) + \mathrm{cov}(X_2, Y)$ et $\mathrm{cov}(aX, bY) = ab\,\mathrm{cov}(X,Y)$
4. $\mathrm{var}(X + Y) = \mathrm{cov}(X + Y, X + Y) = \mathrm{var}(X) + \mathrm{var}(Y) + 2\mathrm{cov}(X,Y)$

Définition. Plus généralement, lorsque $X = (X_1, \dots, X_n)$ est un vecteur aléatoire, on définit son espérance comme le vecteur espérance $\mathbb{E}(X) = (\mathbb{E}(X_1), \dots, \mathbb{E}(X_n))$, et on définit la *matrice de covariance* comme la matrice de taille (n, n) dont les éléments sont $\mathrm{cov}(X_i, X_j)$. C'est donc une matrice symétrique, avec sur la diagonale les variances $\mathrm{var}(X_i)$.

Propriété. Lien indépendance et non corrélation.
Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes. Alors elles sont non corrélées.
La réciproque est fausse : on peut trouver deux variables dont la corrélation est nulle, mais qui ne sont pas indépendantes.

3 Lois usuelles

3.1 Lois discrètes

3.1.1 Loi uniforme

Définition. .
La variable aléatoire X dont la loi est donnée par $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$ et $\forall k \;\; \mathbb{P}(X = x_k) = \frac{1}{n}$ suit une loi uniforme sur $\{x_1, \dots, x_n\}$.

Exemple. Lancer d'un dé équilibré. La variable aléatoire X donnant le numéro obtenu suit une loi uniforme sur $\{1, \dots, 6\}$.

3.1.2 Loi de Bernoulli

Définition. On considère une expérience aléatoire à 2 issues possibles : succès ou échec. On note p la probabilité d'avoir un succès et $1 - p$ celle d'avoir un échec.
Soit X la variable aléatoire qui vaut 1 si on observe un succès, et 0 si on observe un échec.
La variable aléatoire X suit une loi de Bernoulli de paramètre p et on note $X \sim \mathcal{B}(p)$

Exemple. Lancer d'une piéce. La variable aléatoire X qui vaut 1 si on obtient PILE et 0 si on obtient FACE suit la loi $\mathcal{B}(p)$ avec $p = 1/2$ si la pièce est équilibrée.

Propriété. $X \sim \mathcal{B}(p)$, alors $\mathbb{E}(X) = p$ et $\mathrm{var}(X) = p(1 - p)$

3.1.3 Loi binomiale

Définition. On considère une expérience aléatoire à 2 issues possibles (succès ou échec) et on note p la probabilité d'avoir un succès. On répète cette expérience n fois de façon indépendante.
Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès.
X suit une loi binomiale de paramètres n et p et on note $X \sim \mathcal{B}(n, p)$

Exemple. Lancer 10 fois de suite une piéce équilibrée. La variable aléatoire X qui compte le nombre de PILE obtenu suit une loi $\mathcal{B}(n = 10, p = 1/2)$.

Propriété. Si $X \sim \mathcal{B}(n, p)$, alors $X(\Omega) = \{0, 1 \dots, n\}$ et $\forall k \in \{0, 1 \dots, n\}$:

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

où le coefficient binomial $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ est le nombre de combinaisons de p éléments parmi n.

Propriétés.

1. La somme de n variables aléatoires indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre p est une variable aléatoire de loi binomiale de paramètres n et p, autrement dit :
   si $X_1, \ldots, X_n$ sont i.i.d de loi $\mathcal{B}(p)$ alors $X = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \mathcal{B}(n, p)$.
2. Si $X \sim \mathcal{B}(n, p)$, alors $\mathbb{E}(X) = np$ et $\mathrm{var}(X) = np(1-p)$

Remarque. La loi binomiale suppose les expériences indépendantes. Dans le cadre des sondages, elle correspond à un tirage avec remise dans une population. Si on effectue un tirage sans remise, alors en théorie, c'est la loi hypergéométrique qui devrait être utilisée. La loi hypergéométrique fait intervenir deux paramètres de taille : celui de l'échantillon n et celui de la population de référence N. Si N est très élevé, on utilise rarement cette loi car sa formule est plus compliquée et il est plus pratique de l'approximer par la loi binomiale. En pratique lorsque $n/N \leq 10\%$, on l'approxime par la loi binomiale.

3.1.4 Loi géométrique

Définition. On considère une expérience aléatoire à 2 issues possibles (succès ou échec) et on note p la probabilité d'avoir un succès. On répète cette expérience de façon indépendante jusqu'à obtenir un succès.
Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre d'expériences nécessaires pour obtenir ce succès. La variable aléatoire X suit une loi géométrique de paramètre p et on note $X \sim \mathcal{G}(p)$.

Exemple. Lancer une pièce jusqu'à obtenir PILE.

Propriétés.

1. Si $X \sim \mathcal{G}(p)$, alors $X(\Omega) = \{1, 2 \ldots, \} = \mathbb{N}^*$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*$:
$$\mathbb{P}(X = k) = (1-p)^{k-1} p$$
2. Si $X \sim \mathcal{G}(p)$, alors $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}$ et $\mathrm{var}(X) = \frac{1-p}{p^2}$

3.1.5 Loi de poisson

Définition. .
La variable aléatoire X dont la loi est donnée par $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et $\forall k \in \mathbb{N}$,
$$\mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$
suit une loi de Poisson de paramètre λ. On note $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$.

La loi des Poisson est utilisée pour modéliser les événements rares. Par exemple, pour modéliser le nombre de pannes d'un composant entre 2 instants donnés.

Propriétés.

1. Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, alors $\mathbb{E}(X) = \mathrm{var}(X) = \lambda$
2. La somme de n variables aléatoires indépendantes de loi de Poisson suit une loi de Poisson : si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes suivant respectivement une loi de Poisson de paramètre λ et une loi de Poisson de paramètre μ, alors $X + Y$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$.
3. On peut approximer la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ par une loi de Poisson $\mathcal{P}(np)$ lorsque $n \to \infty, p \to 0$ et $np \to \lambda$. C'est à dire qu'en pratique lorsque $n \geq 30$, $p \leq 0.1$, $np < 15$, utiliser une loi Binomiale ou une loi de Poisson donne le même calcul de Probabilité.

3.2 Lois continues

3.3 Loi uniforme sur $[a, b]$

Définition.

$$X \sim \mathcal{U}([a, b]) \text{ si } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

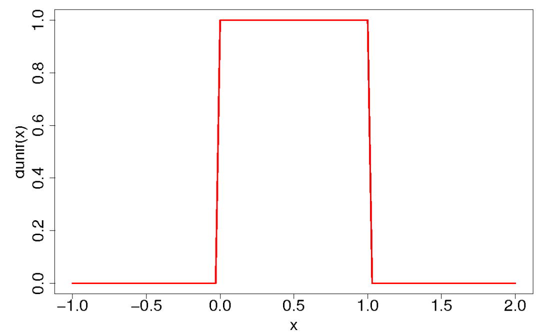

FIGURE 1 – densité de la loi uniforme sur $[0, 1]$.

Exemple. $X =$ l'angle entre la crevaison d'un pneu et la valve suit la loi $\mathcal{U}([0, 2\pi])$.

Propriété. $\mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2}$.

3.4 Loi exponentielle de paramètre λ

Définition.

$$X \sim \mathcal{E}xp(\lambda) \text{ si } f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

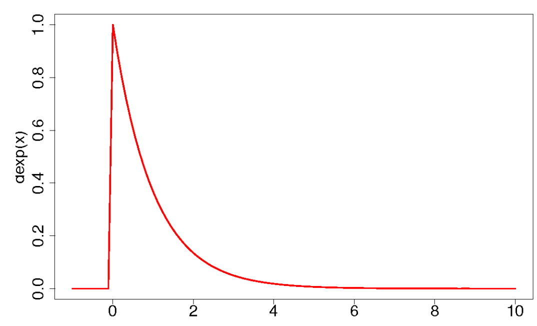

FIGURE 2 – densité de la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 1$

La loi exponentielle est utilisée pour modéliser les durées de vie ou le temps d'attente avant l'arrivée d'un événement spécifique. C'est l'équivalent continu de la loi géométrique.

Propriété. $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda}$ et $\text{var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$.

3.5 Loi normale ou Gaussienne de paramètres μ et σ^2

Définition.

$$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \text{ si } f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \forall x \in \mathbb{R}.$$

C'est une loi très utilisée pour décrire de nombreux phénomènes. Un théorème (TCL, cf. plus bas) montre que la loi normale est une bonne approximation pour de nombreuses lois. Typiquement, elle apparaît quand de nombreuses imprécisions indépendantes s'additionnent.

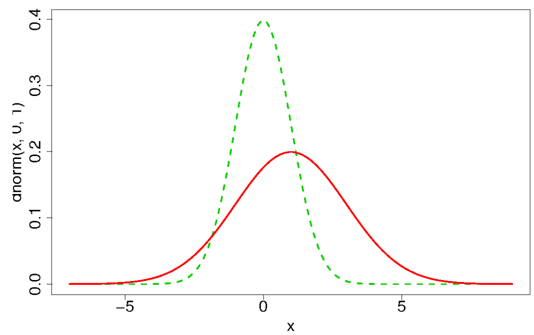

FIGURE 3 – densité de la loi $\mathcal{N}(\mu = 1, \sigma^2 = 4)$ en trait plein et de la loi $\mathcal{N}(0, 1)$ en pointillé.

Propriétés.

1. Si $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ alors $\mathbb{E}(X) = \mu$ et $\text{var}(X) = \sigma^2$.
2. Si $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ alors $aX + b \sim \mathcal{N}(a\mu + b, a^2\sigma^2)$.
3. Toute variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ peut se ramener à une loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$ (aussi appelée gaussienne standard) :

$$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \Leftrightarrow U = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

   On peut trouver des tableaux qui fournissent les quantiles de la loi $\mathcal{N}(0, 1)$. (voir TD)

4. Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires gaussiennes : $X_i \sim \mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i^2)$.
   Si $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes, alors la somme $\sum_{i=1}^n X_i$ suit aussi une loi gaussienne, et on a :

$$\sum_{i=1}^n X_i \sim \mathcal{N}\left(\sum_{i=1}^n \mu_i, \sum_{i=1}^n \sigma_i^2\right).$$

   Plus généralement, toute combinaison linéaire de gaussiennes indépendantes suit une loi gaussienne :

$$\sum_{i=1}^n a_i X_i \sim \mathcal{N}\left(\sum_{i=1}^n a_i\mu_i, \sum_{i=1}^n a_i^2\sigma_i^2\right).$$

   En particulier si $X_1, \ldots, X_n$ sont i.i.d de loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, alors :

$$\sum_{i=1}^n X_i \sim \mathcal{N}(n\mu, n\sigma^2). \tag{1}$$

3.6 D'autres lois.

D'autres lois sont fréquemment utilisées en statistique notamment lorsqu'on étudie les tests statistique :

Définition. Soient $X_1, \ldots, X_n$ n variables aléatoires i.i.d de loi $\mathcal{N}(0,1)$. On dit que la variable aléatoire $Z = \sum_{i=1}^n X_i^2$ suit une loi du Khi-deux à n degrés de libertés (d.d.l). On note $Z \sim \mathcal{X}^2(n)$.

Définition. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant respectivement une loi $\mathcal{N}(0,1)$ et une loi $\mathcal{X}^2(n)$. On dit que la variable aléatoire $T = \frac{X}{\sqrt{Y/n}}$ suit une loi de Student à n d.d.l. On note $T \sim \mathcal{S}tudent(n)$.

Définition. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant respectivement une loi $\mathcal{X}^2(n)$ et une loi $\mathcal{X}^2(m)$. On dit que la variable aléatoire $W = \frac{X/n}{Y/m}$ suit une loi de Fisher à n et m d.d.l. On note $W \sim \mathcal{F}(n,m)$.

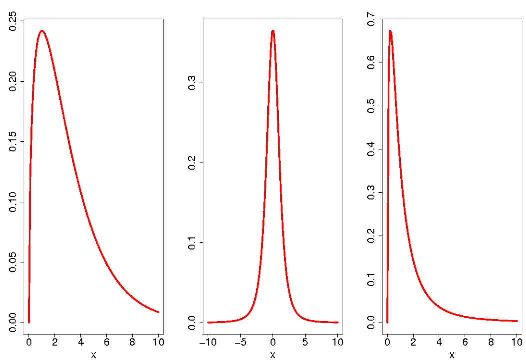

FIGURE 4 – densités respectivement des lois de Khi-deux à 3 ddl, Student à 10 ddl, et Fisher à 3 et 5 ddl.

Remarque. Lorsque n est grand, la loi de $\mathcal{S}tudent(n)$ peut eître approximée par la loi $\mathcal{N}(0,1)$.

4 Théorèmes asymptotiques

Théorème. Soit $(X_n, n \geq 1)$ une suite de variables aléatoires i.i.d, d'espérance μ et de variance σ^2 finies. Soit $\bar{X}_n = \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n}$ la moyenne empirique.

1. Loi des Grands Nombres (LGN) : $\bar{X}_n$ tend vers μ quand $n \to \infty$.
2. Théorème Central Limite (TCL) : quand n est grand, la loi de $\bar{X}_n$ est approximativement une loi normale d'espérance μ et de variance $\frac{\sigma^2}{n}$, autrement dit $\mathcal{N}(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$.

En pratique, cela revient à considérer que, pour n assez grand (on lit parfois *"en pratique, si* $n \geqslant 30, \ldots$*"*), $\sum_{i=1}^n X_i$ suit approximativement la loi $\mathcal{N}(n\mu, n\sigma^2)$.

Notez que, si les X_i sont gaussiennes, d'après l'équation (1) ci-dessus, $\sum_{i=1}^n X_i$ a *exactement* pour loi $\mathcal{N}(n\mu, n\sigma^2)$, il n'y a pas d'approximation dans ce cas particulier.

Conséquence du TCL : lorsque p est fixé, et $n \to \infty$, une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ peut être approchée par une loi normale $\mathcal{N}(np, np(1-p))$. En pratique, on considère que $n \geq 30, np \geq 5, np(1-p) \geq 5$ donne une bonne approximation.

Remarque : lorsque $n \to \infty, p \to 0$ de sorte que $np \to \lambda$, on a vu que l'on pouvait approximer la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ par une loi de Poisson.