UNIVERSITE PIERRE ET MARIE CURIE (PARIS VI)

Ensemble de travaux présentés pour obtenir

L'HABILITATION A DIRIGER DES RECHERCHES

Spécialité : Mathématiques

par

Sergio GUERRERO RODRIGUEZ

Analyse et contrôle de quelques équations aux dérivées partielles

soutenue le 4 décembre 2009 devant le jury composé de MM.

Didier BRESCH
Jean-Michel CORON
Jean-Pierre PUEL
Jean-Pierre RAYMOND
Luc ROBBIANO
Marius TUCSNAK

et après rapports de MM.

Andrei V. FURSIKOV
Marius TUCSNAK
Enrique ZUAZUA

Remerciements

Mes premiers mots de remerciements sont adressés à Andrei Fursikov, Marius Tucsnak et Enrique Zuazua qui ont accepté la charge de rapporter ce mémoire. Je suis également très reconnaissant à Didier Bresch, Jean-Michel Coron, Jean-Pierre Puel, Jean-Pierre Raymond et Luc Robbiano : leur présence dans ce jury est pour moi un grand honneur.

Toute ma gratitude revient également à mes collaborateurs : Muriel Boulakia, Marianne Chapouly, Jean-Michel Coron, Olivier Glass, Oleg Imanuvilov, Jean-Pierre Puel et Lionel Rosier.

J'ai bénéficié à mon arrivée au Laboratoire Jacques-Louis Lions d'un accueil formidable de la part de tous ces membres : je souhaite bien entendu les remercier ici.

Qu'il me soit enfin donné de remercier ma famille : ma mère Mari Carmen, mon père Antonio, ma soeur Rocío, mon frère Juan Antonio, Ana et José Carlos.

Abstract

In this memoir, we present some recent works, regrouped in two main themes. The first theme is control theory for partial differential equations. The second one is the study of systems coupling a structure and a fluid.

The first part of this memoir regroups Chapters 2 and 3. It concerns control theory for some partial differential equations of parabolic and dispersive type. A big part of it will be dedicated to the singular optimal control, that is to say, to the control of a partial differential equation (parabolic or dispersive in our case) in a uniform way with respect to some parameter which will tend to zero.

In Chapter 2, we study the control of the transport equation in any dimension with the help of the controllability of a transport-diffusion equation with vanishing viscosity. Depending of the size of the final time of evolution, we can prove some results of convergence, or explosion, of the cost of the null controllability of this equation.

In Chapter 3, we study some dispersive equations. First, we consider again the transport equation as a limit of a dispersive equation when the dispersion parameter goes to zero. Then, we consider a diffusive-dispersive approach. In both situations, we establish some convergence and explosion results for the cost of the null controllability of the perturbed equations as the parameters go to zero. Then, we consider the Korteweg de-Vries equation in a bounded interval. We prove the existence of a countable set of critical lengths out of which we have the exact local controllability when the control acts on the right endpoint. Finally, we have studied the Korteweg de-Vries equation of order 5 which, as far as we know, had not been considered from the point of view of controllability. We prove a local exact controllability result.

The second part of this memoir concerns control theory for some systems of partial differential equations of parabolic type.

In Chapter 4, we study the insensitizing problem associated to a parabolic equation. We extend some results for different functionals. We also consider the situation of a general coupling between two parabolic equations.

In Chapter 5, we analyze the insensitizing problem for the Stokes system. This problem had been introduced by J.-L. Lions. Here, we prove the existence of insensitizing controls for several functionals. Finally, we deal with the case of a general coupling of two Stokes equations.

In Chapter 6, we study the controllability of the system of micropolar fluids, as well as the controllability of the Boussinesq system. We extend here the results obtained by A. V. Fursikov et O. Yu. Imanuvilov.

The third part of this memoir, which regroups Chapters 7 and 8, concerns control theory for some equations arising from fluid mechanics.

In Chapter 7, we regroup some controllability results for the Burgers equation. First, we present two negative results, telling that the Burgers equation is not null controllable when we control on one endpoint. Then, we establish a global controllability result towards non-vanishing constants.

In Chapter 8, we study some controllability properties for the Navier-Stokes system with few scalar controls. The goal of this part of the memoir is to extend some previous works produced during my PhD. We first consider the case of Dirichlet boundary conditions, for which we have to restrict ourselves to the Stokes system. Then, we study the case of the torus.

The forth and last part of this memoir concerns the study of some systems coupling an elastic solid and a compressible fluid. In both situations, the fluid equation is governed by the compressible Navier-Stokes equations.

In Chapter 9, we study the coupling between a rigid body and a compressible fluid, in dimension three. First, we show the local existence of regular solutions. Then, we establish some a priori estimates independently of the final time, which allow us to obtain the global existence and the uniqueness of regular solutions by applying a fixed-point argument.

In Chapter 10, we analyze the coupling between an elastic structure and a compressible fluid, in dimension three and with no regularizing term in the elasticity equations. We first establish some regu-

larity properties for an associated linear problem and then we show the local existence of a solution for the complete system.

The state of the art of the control of partial differential equations of parabolic type is presented in [46]. In particular, some results obtained during and after my PhD are studied in that reference.

In every chapter we have presented some open problems. The papers corresponding to the works contained in this memoir can be found on my personal web page at Laboratoire Jacques-Louis Lions (`http://www.ann.jussieu.fr/~guerrero`).

Présentation

Dans ce mémoire, nous présentons quelques travaux autour de deux thématiques principales : la théorie du contrôle des équations aux dérivées partielles et l'étude de systèmes de couplage entre un solide et un fluide.

La première partie de ce mémoire regroupe les Chapitres 2 et 3. Elle concerne la théorie du contrôle pour quelques équations paraboliques et dispersives. Une partie importante sera consacrée à ce que l'on appelle le contrôle optimal singulier, consistant à contrôler une équation aux dérivées partielles (en l'ocurrence parabolique ou dispersive) de façon uniforme par rapport à un paramètre qui est destiné à tendre vers zéro.

Dans le Chapitre 2, nous étudions le contrôle de l'équation de transport en toute dimension par l'intermédiaire de la contrôlabilité d'une équation de transport-diffusion avec viscosité évanescente. En fonction de la taille du temps final de l'évolution par rapport à la vitesse du transport, nous y démontrons des résultats de convergence et d'explosion du coût de la contrôlabilité à zéro de l'équation de transport-diffusion.

Dans le Chapitre 3, nous nous intéressons au contrôle de quelques équations dispersives. Dans un premier temps, nous étudions à nouveau l'équation de transport comme limite d'une équation dispersive lorsque le paramètre de dispersion tend vers zéro. Ensuite, nous considérons une approche de type diffusive-dispersive. Dans les deux, nous établissons des résultats de convergence et d'explosion du coût de la contrôlabilité à zéro des équations perturbées lorsque les paramètres de dispersion ou/et diffusion tend/-ent vers zéro. Deuxièmement, nous considérons l'équation de Korteweg de-Vries sur un intervalle borné. Nous démontrons l'existence d'un ensemble dénombrable de longueurs critiques en dehors duquel nous avons le contrôle exact local lorsque l'on contrôle la trace à l'extremié droite de l'intervalle. Enfin, nous nous sommes intéressés à l'équation de Korteweg de-Vries d'ordre 5 qui, à notre connaissance, n'avait pas était traitée du point de vue de la contrôlabilité. Nous y établissons un résultat de contrôle local pour tout temps.

La deuxième partie de ce mémoire concerne la théorie du contrôle pour quelques systèmes d'équations aux dérivées partielles de type parabolique.

Dans le Chapitre 4, nous étudions le problème de l'insensibilisation d'un problème de type parabolique associé à l'équation de la chaleur. Nous étendons certain résultats valables pour la fonctionnelle consistant à prendre la norme L^2 de l'état à d'autres fonctionnelles. Le cas du couplage de deux équations paraboliques générales est aussi considéré.

Dans le Chapitre 5, nous analysons le problème de l'insensibilisation pour le problème de Stokes, qui avait était introduit par J.-L. Lions. Nous y démontrons des résultats d'insensibilisation associés à de différentes fonctionnelles. Enfin, nous traitons le cas du couplage de deux équations de type Stokes générales.

Dans le Chapitre 6, nous nous intéressons à l'étude de la contrôlabilité des fluides micropolaires ainsi qu'à la contrôlabilité du système de Boussinesq. Nous étendons les résultats obtenus par A. V. Fursikov et O. Yu. Imanuvilov.

La troisième partie du mémoire, qui regroupe les Chapitres 7 et 8, concerne la thérie du contrôle pour quelques équations issues de la mécanique de fluides.

Dans le Chapitre 7, nous regroupons quelques résultats autour de la contrôlabilité de l'équation de Burgers. Dans un premier temps, nous présentons deux résultats négatifs de contrôlabilité, affirmant en particulier que l'équation de Burgers n'est pas globalement contrôlable à zéro lorsque l'on agit sur l'une des deux extrémités du bord. Ensuite, nous établissons un résultat global de contrôle exact vers les constantes non-nulles.

Dans le Chapitre 8, nous étudions quelques propriétés de contrôlabilité du système de Navier-Stokes avec un nombre réduit de contrôles. L'objectif de ce travaux est d'étendre quelques résultats obtenus lors de ma thèse. Nous considérons d'abord le cas des conditions au bord de type Dirichlet, où on doit se restreindre au cas du système de Stokes. Ensuite, nous étudions le cas du tore.

La quatrième et dernière partie de ce mémoire concerne l'étude de quelques systèmes de couplage entre un solide élastique et un fluide compressible. Dans les deux cas, le fluide sera modélisé par les équations de Navier-Stokes compressibles.

Dans le Chapitre 9, nous nous intéressons au couplage d'une structure rigide et un fluide compressible, en dimension 3. Dans un premier temps, nous démontrons l'existence locale de solution régulière. Nous établissons ensuite des estimations a priori indépendamment du temps final d'évolution, ce qui nous permet d'obtenir l'existence globale et l'unicité de solutions régulières à l'aide d'une méthode de point fixe.

Dans le Chapitre 10, nous analysons le couplage entre un solide élastique et un fluide compressible, en dimension trois et sans terme régularisant dans l'équation de l'élasticité. Nous étudions d'abord quelques propriétés de régularité pour le problème linéarisé pour passer ensuite au problème non linéaire et démontrer l'existence locale de solution.

L'état de l'art sur le contrôle d'équations paraboliques est présénté dans [46]. En particulier, une partie des résultats obtenus durant et après ma thèse sont étudiés dans cette référence.

Dans chaque chapitre nous avons posé quelques problèmes ouverts. Les articles correspondants aux chapitres suivants sont disponibles sous forme électronique sur ma page personnelle du Laboratoire Jacques-Louis Lions (`http://www.ann.jussieu.fr/~guerrero`). Nous y renvoyons le lecteur qui souhaite les obtenir individuellement.

Table des matières

Fluide-structure

Conclusions

Chapitre 1

Introduction générale

Dans cette partie, nous donnons quelques éléments introductifs sur les deux thématiques traitées dans ce mémoire, à savoir, la théorie du contrôle et l'intéraction entre un fluide et une structure.

1.1 Problèmes de contrôle

Un problème de contrôle est une équation d'évolution munie d'un paramètre dépendant du temps et qui peut agir sur le système dans le but de changer son comportement. La plupart des problèmes de contrôle peuvent être analysés à travers un modèle mathématique qui décrit le système physique considéré à travers l'équation d'état

$$L(y) = f(v). \tag{1.1}$$

Dans cette équation y est l'*état*, c'est-à-dire, la variable qui nous fournit de l'information sur le système et v est le contrôle, que l'on peut choisir dans un ensemble de contrôles admissibles U_{ad}.

En pratique, (1.1) est une équation ou un système fonctionnelle (intégral, différentiel ordinaire, aux dérivées partielles,...), qui peut éventuellement être complété par des conditions initiales et au bord.

Contrôler le système (1.1) est trouver $v \in U_{ad}$ tel que la solution de (1.1) satisfasse un objectif donné. Si un tel contrôle existe, on dit que le système est contrôlable.

Dans les trois premières parties de ce mémoire, nous considérons des problèmes de contrôle associés à quelques équations aux dérivées partielles. Nous décrivons maintenant quelques problèmes de contrôle classiques :

• Contrôlabilité approchée : on se donne deux états y_0 (état initial) et y_1 (état final) du système et un temps $T > 0$. Existe-t-il un contrôle v tel que la solution de (1.1) approche arbitrairement la cible y_1 à l'instant $t = T$?

• Contrôlabilité à zéro : soit y_0 un état et $T > 0$. Existe-t-il un contrôle v tel que la solution de (1.1) atteigne la cible 0 à l'instant $t = T$?

Si $\|y_0\|$ est petit, on dira que l'on a la contrôlabilité locale à zéro.

• Contrôlabilité exacte : avec les mêmes données que dans la notion de contrôlabilité approchée, existe-t-il un contrôle v telle que la solution de (1.1) partant de y_0 atteigne la cible y_1 à l'instant $t = T$?

Si $\|y_0\|$ et $\|y_1\|$ sont petits, on dira que l'on a la contrôlabilité locale exacte.

• Contrôlabilité exacte vers les trajectoires : soit y_0 un état, $T > 0$ et $(\bar{y}, \bar{v})$ une trajectoire de (1.1). Existe-t-il un contrôle v tel que la solution de (1.1) partant de y_0 atteigne la cible $\bar{y}(T)$ à l'instant $t = T$?

Si $\|y_0 - \bar{y}(0)\|$ est petit, on dira que l'on a la contrôlabilité locale exacte aux trajectoires.

Dans ce mémoire, on montrera de nouveaux résultats de contrôlabilité exacte pour quelques problèmes linéaires, ainsi que quelques résultats de contrôlabilité locale exacte aux trajectoires de quelques systèmes nonlinéaires.

Beaucoup de progrès ont été faits ces dernières années dans le cadre de la contrôlabilité des équations paraboliques. Dans un premier temps, tant que les conditions aux limites sont de type Dirichlet, la contrôlabilité à zéro du système

$$\begin{cases} y_t - \nu \Delta y = v 1_\omega & \text{dans }]0,T[\times\Omega, \\ y = 0 & \text{sur }]0,T[\times\partial\Omega, \\ y(0) = y_0 & \text{dans } \Omega \end{cases} \tag{1.2}$$

a été démontrée, d'une part par Lebeau et Robbiano dans [84] et d'autre part par Fursikov et Imanuvilov dans [52] en utilisant une méthode qui peut s'adapter à des systèmes plus généraux reposant sur des *inégalités de Carleman globales*. Ce type d'inégalités constitue une estimation très importante du point de vue de la contrôlabilité. Plus précisément, les inégalités globales de Carleman impliquent en particulier l'observabilité pour le problème adjoint associé au problème de contrôle linéaire et il est bien connu que l'observabilité du problème adjoint entraîne la contrôlabilité à zéro.

Dans [108], l'auteur résout pour la première fois la contrôlabilité d'un système nonlinéaire, à l'aide d'un argument de point fixe. Depuis, des avancées fructueuses ont été faites dans ce domaine. Un exemple est le travail [40], qui démontre la *contrôlabilité approchée* du système de réaction-diffusion nonlinéaire

$$\begin{cases} y_t - \nu \Delta y + f(y) = v 1_\omega & \text{dans }]0,T[\times\Omega, \\ y = 0 & \text{sur }]0,T[\times\partial\Omega, \\ y(0) = y_0 & \text{dans } \Omega. \end{cases} \tag{1.3}$$

Dans [51], E. Fernández-Cara et E. Zuazua ont étudié la contrôlabilité à zéro du système (1.3) avec non linéarités “explosive”. En fait, pour des f satisfaisant

$$\lim_{|s|\to\infty} \frac{f(s)}{s \log^{3/2}(1+|s|)} = 0, \tag{1.4}$$

ils démontrent que le système (1.3) est contrôlable à zéro.

Dans ce mémoire, nous considérons une équation de la chaleur comme (1.2) avec un terme de transport. Nous étudions le coût de la contrôlabilité de ce système lorsque le paramètre de diffusion ν tend vers zéro (voir [26] et [69]).

Dans un régime dispersif, nous considérons le système de KdV suivant ($L > 0$) :

$$\begin{cases} y_t + \varepsilon y_{xxx} + y_x + y y_x = 0 & \text{dans }]0,T[\times]0,L[, \\ y_{|x=0} = y_{x|x=L} = y_{|x=L} = 0 & \text{dans }]0,L[, \\ y_{|t=0} = y_0 & \text{dans }]0,L[. \end{cases} \tag{1.5}$$

Plusieurs problèmes de contrôle associés à (1.5) ont été étudiés de manière intense ces dernières années ; voir en particulier [99] et [103]. Des différentes situations ont été considérées : le cas où les trois conditions au bord sont contrôlées [102], le cas avec un seul contrôle Neumann (voir, par exemple, [99], [25], [16] et [17]), le cas avec un contrôle Dirichlet à gauche (voir [101] et [57]) et le cas d'un contrôle additionnel dans le membre de droite [20].

Dans le même cadre que [101] (le contrôle agit en $x = 0$), nous avons considéré l'équation linéarisé en 0 avec un terme de transport additionnel. Nous avons démontré des résultats de contrôlabilités à zéro lorsque le paramètre de dispersion ε tend vers zéro (voir [57]).

Le résultat que l'on a obtenu dans le cadre d'un contrôle de type Dirichlet en $x = L$ peut être comparé à celui présenté dans [99] lorsque le contrôle agit sur la condition de Neumann à droite. Plus précisément, nous démontrons l'existence d'un ensemble dénombrable de longueurs critiques en dehors duquel on a la contrôlabilité exacte locale du système (1.5) (voir [60]).

La contrôlabilité de systèmes de type Navier-Stokes a été aussi très étudiée ces derniers temps. Quelques résultats concernant la *contrôlabilité approchée* ont été démontrés par Coron [23], Fabre [39] et Lions et Zuazua [89]. En ce qui concerne la contrôlabilité exacte pour les équations de Navier-Stokes avec conditions au bord de type Dirichlet, le seul résultat positif était dû à Imanuvilov. Dans [76], il montre la contrôlabilité exacte locale aux trajectoires du système de Navier-Stokes avec conditions aux limites de type Dirichlet :

$$\begin{cases} y_t - \Delta y + (y, \nabla) y + \nabla p = v 1_\omega & \text{dans }]0,T[\times\Omega, \\ \nabla \cdot y = 0 & \text{dans }]0,T[\times\Omega, \\ y = 0 & \text{sur }]0,T[\times\partial\Omega, \\ y(0) = y^0 & \text{dans } \Omega. \end{cases} \tag{1.6}$$

Ce résultat a été étendu dans [49] à des trajectoires moins régulières, en simplifiant la preuve présentée dans [76]. L'approche présentée dans le travail [49] n'était pas encore satisfaisante, notamment pour traiter des problèmes de type Stokes couplés. Dans les deuxième et troisième parties de ce mémoire on utilisera une amélioration de ce résultat, qui a été introduite dans [67]. En particulier, ceci nous permettra de contrôler le système de Stokes tridimensionnel avec deux contrôles scalaires distribués dans n'importe quel ouvert à l'intérieur de Ω (voir [27]).

1.2 Problèmes d'intéraction fluide-structure

La motivation de l'étude de problèmes d'intéraction fluide-structure est très diverse : modélisation, étude théorique, étude numérique. Ce type de problèmes interviennent dans beaucoup de phénomènes physiques où une structure (rigide ou élastique) intéragit avec un fluide, notamment dans l'aérodynamique. Ces situations correspondent au cas où un solide (avion) est immergé dans un fluide mais on peut aussi considérer le cas où un fluide évolue à l'intérieur d'une paroi déformable.

Nous présentons le problème mathématique dans le cas générale d'une structure élastique, qui est libre de se déplacer à l'intérieur du fluide (translation et rotation) ainsi que de se déformer. Tant le fluide que le solide se trouvent à l'intérieur d'une cavité fixe bornée Ω assez régulière.

On note $\Omega_S(0)$ le domaine occupé par le solide à l'instant initial et $\Omega_F(0) := \Omega \setminus \overline{\Omega_S(0)}$ le domaine occupé par le fluide à l'instant initial. On suppose que $\Omega_S(0)$ n'intersecte pas $\partial\Omega$. La position x à l'instant t d'une particule qui se trouvée en y à l'instant initial est donnée par

$$x = X_S(t, 0, y),$$

où X_S est un flot défini sur $\Omega_S(0)$. Le mouvement solide se décompose en un mouvement rigide et un mouvement élastique :

$$X_S(t, 0, y) = a(t) + Q(t)(y - a_0) + Q(t)\xi(t, y), \ \forall y \in \Omega_S(0), \ \forall t \in [0, T],$$

où a est le vecteur de translation, Q est la matrice de rotation, ξ est le vecteur de déformation élastique et a_0 est le centre de gravité à l'instant initial. La matrice de rotation est déterminée par un seul vecteur ω :

$$\dot{Q}(t)Q(t)^{-1}y = \omega(t) \wedge y, \ \forall y \in \mathbb{R}^3.$$

A chaque instant, le solide occupe le domaine $\Omega_S(t) := X_S(t, 0, \Omega_S(0))$ et le fluide occupe le domaine $\Omega_F(t) := \Omega \setminus \overline{\Omega_S(t)}$.

Dans la quatrième partie de ce mémoire nous nous intéressons à ce type de couplage lorsque le fluide est visqueux et compressible. Son mouvement sera régi par les équations de Navier-Stokes compressibles :

$$\partial_t(\rho u) + div(\rho u \otimes u) - div(\sigma(u, p)) = 0 \ \text{ dans } \Omega_F(t),$$

où

$$\sigma(u, p) := \mu \nabla u + ((\mu + \mu')div(u) - p)Id.$$

Ici, les coefficients de viscosité vérifient $\mu > 0$ et $2\mu + 3\mu' > 0$. On se placera dans le cadre barotropique, où le pression p ne dépend que de la densité ρ.

La densité volumique du fluide ρ suit la loi de conservation de la masse :

$$\partial_t \rho + div(\rho u) = 0 \ \text{ dans } \Omega_F(t).$$

Dans le cas d'un solide rigide, les équations du mouvement de la structure sont données par

$$\begin{cases} m\ddot{a} = \displaystyle\int_{\partial\Omega_S(t)} \big(2\mu\epsilon(u) + \mu'(\nabla\cdot u)Id - pId\big)n\,d\gamma, \\ J\dot{\omega} = \big(J\omega\big)\wedge\omega + \displaystyle\int_{\partial\Omega_S(t)} (x-a)\wedge\Big(\big(2\mu\epsilon(u) + \mu'(\nabla\cdot u)Id - pId\big)n\Big)\,d\gamma, \end{cases} \tag{1.7}$$

où le tenseur J est donné par

$$J(t)b\cdot\tilde{b} = \int_{\Omega_S(0)} \rho_{0,S}(y)\big(b\wedge Q(t)y\big)\cdot\big(\tilde{b}\wedge Q(t)y\big)\,dy \quad \forall b,\,\tilde{b}\in\mathbb{R}^3.$$

Ici, $\rho_{0,S} > 0$ désigne la densité initiale de la structure.

Dans le cas d'un solide élastique, les équations sont

$$\xi_{tt} - \nabla\cdot(2\lambda\epsilon(\xi) + \lambda'(\nabla\cdot\xi)Id) = 0 \text{ dans } (0,T)\times\Omega_S(0),$$

où $\lambda > 0$ et $\lambda' \geq 0$.

Dans tous ces cas, ces équations sont complétées par des conditions de couplage. L'intéraction entre le fluide et la structure s'exprime à travers la continuité des vitesses à l'interface et des tenseurs du fluide et du solide appliqués à la normale.

Pour une déduction rigoureuse de ces équations, on renvoie le lecteur à la thèse de Boulakia [9].

Pour une étude detaillée de la littérature de problèmes d'intéraction fluide-structure, on renvoie le lecteur aux introductions des Chapitres 9 et 10.

Chapitre 2

Contrôle optimal singulier pour une équation de transport-diffusion

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous nous intéressons au problème de la contrôlabilité uniforme d'une équation de transport-diffusion avec viscosité évanescente.

A ce jour, l'équation de transport est très bien comprise. Dans cette partie du mémoire nous considérons cette équation en dimension $N \geq 1$ sur un domaine régulier et borné Ω et avec un coefficient $M(t,x) \in \mathbb{R}^N$ dépendant des variables temporelles et spatiales.

L'équation parabolique associée avec viscosité évanescente est donnée par

$$y_t + M(t,x) \cdot \nabla y - \varepsilon \Delta y = 0, \tag{2.1}$$

qui approche de façon naturelle l'équation de transport lorsque $\varepsilon > 0$ est petit.

On sera intéressé par le problème de la contrôlabilité à zéro de cette équation, avec un contrôle distribué dans un petit ouvert $\omega \subset\subset \Omega$ ou sur une petite partie du bord $\Gamma \subset \partial\Omega$.

L'objectif principal de cette section est d'étudier le comportement du coût de cette contrôlabilité par rapport à ε, en le comparant avec la solution du problème de transport associé.

Dans un cadre ondes-chaleur, un problème similaire a été étudié dans [92]. Les auteurs ont montré que la contrôlabilité à zéro de l'équation de la chaleur peut être obtenue comme limite singulière des propriétés de contrôle exacte des équations d'ondes dissipatives :

$$u_t - \Delta u + \varepsilon u_{tt} = v 1_\omega.$$

Dans ce travail, les auteurs considèrent des conditions au bord homogènes de type Dirichlet et ω est un voisinage d'une partie du bord γ, qui doit être suffisamment grande pour pouvoir appliquer la technique de multiplicateurs permettant d'avoir le contrôle exact de l'équation des ondes (voir [86]).

Pour être plus précis sur le problème que l'on étudie, on considère l'équation parabolique (2.1) complétée avec condition au bord de type Dirichlet contrôlée et avec une condition initiale :

$$\begin{cases} y_t + M(t,x) \cdot \nabla y - \varepsilon \Delta y = 0 & \text{dans }]0,T[\times\Omega, \\ y = v 1_\Gamma & \text{sur }]0,T[\times\partial\Omega, \\ y_{|t=0} = y_0 & \text{dans } \Omega, \end{cases} \tag{2.2}$$

où $y_0 \in H^{-1}(\Omega)$ et $M \in L^\infty(0,T;W^{1,\infty}(\Omega)^N)$. Pour chaque $\varepsilon > 0$, on sait (voir [52]) qu'il existe $v \in L^2(0,T;H^{-1/2}(\partial\Omega))$ tel que la solution de (2.2) satisfait $y(T,x) = 0$ pour tout $x \in \Omega$. Appelons $U(\varepsilon,T,M,y_0)$ l'ensemble de tous ces contrôles. Le coût de cette observabilité est défini par

$$K(\varepsilon,T,M) := \sup_{\|y_0\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq 1} \{\min\{\|v\|_{L^2(0,T;H^{-1/2}(\partial\Omega))} : v \in U(\varepsilon,T,M,y_0)\}\}. \tag{2.3}$$

2.2 Résultats d'explosion du coût

• Pour mieux illustrer le problème, considérons d'abord le cas $N = 1$, $\Omega :=]0, 1[$, $M > 0$ constant et $\Gamma := \{0\}$. Pour l'équation de transport associée ((2.2) avec $\varepsilon = 0$), il est clair que la solution ne sera jamais (quelque soit le choix du contrôle) identiquement nulle au temps $t = T$ lorsque $T < 1/M$. De plus, on peut démontrer que

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} K(\varepsilon, T, M) = +\infty \quad \text{quand } T < 1/M$$

(voir Proposition 1 dans [26]). En étant plus précis, on peut donner une borne inférieure de $K(\varepsilon, T, M)$. L'estimation suivante est démontrée dans [26] :

Théorème 1. *Il existe $C > 0$ tel que pour tout $\varepsilon > 0$, $T > 0$ et $M > 0$, on a*

$$K(\varepsilon, T, M) \geq C\frac{\varepsilon^{-3/2}T^{-1/2}M^{1/2}}{1 + M^3\varepsilon^{-3}} \exp\left\{\frac{M}{2\varepsilon}(1 - TM) - \pi^2\varepsilon T\right\}.$$

La preuve de ce théorème est basée sur des techniques d'analyse harmonique.

• Dans le cas général, on introduit les trajectoires associées à M :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}X(t, t_0, x_0) = M(X(t, t_0, x_0), t), \\ X(t_0, t_0, x_0) = x_0. \end{cases} \tag{2.4}$$

pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^N$ et tous $t, t_0 \geq 0$ (dans le cas précédent, $X(t, t_0, x_0) = M(t - t_0) + x_0$). De façon analogue au cas précédent, on fait l'hypothèse qu'il existe une trajectoire pour $t_0 := T$ qui reste à l'interieur de Ω tout au long de l'intervalle $[0, T]$, c'est-à-dire,

$$\exists x_0 \in \Omega : X(t, T, x_0) \in \Omega \quad \forall t \in [0, T]. \tag{2.5}$$

Nous avons le résultat suivant ([69]) :

Théorème 2. *Sous l'hypothèse (2.5), il existe $C > 0$ et $\varepsilon_0 > 0$ tel que*

$$K(\varepsilon, T, M) \geq \exp\{C/\varepsilon\}$$

pour tout $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0[$.

Introduisons le problème adjoint associé à (2.2) :

$$\begin{cases} \varphi_t + \nabla \cdot (\varphi M(t, x)) + \varepsilon\Delta\varphi = 0 & \text{dans }]0, T[\times\Omega, \\ \varphi = 0 & \text{sur }]0, T[\times\partial\Omega, \\ \varphi_{|t=T} = \varphi_T & \text{dans } \Omega, \end{cases} \tag{2.6}$$

pour $\varphi_T \in H_0^1(\Omega)$. On démontre par un calcul direct que K est la meilleure constante telle que l'inégalité suivante (dite *inégalité d'observabilité*) est satisfaite :

$$\|\varphi_{|t=0}\|_{L^2(\Omega)} \leq \varepsilon K \left\|\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right\|_{L^2(0,T;H^{1/2}(\Gamma))} \qquad \forall \varphi_T \in H_0^1(\Omega). \tag{2.7}$$

L'idée de la preuve du Théorème 2 est de construire une solution $\widehat{\varphi}$ de (2.6) associée à un certain $\widehat{\varphi}_T \in C_0^\infty(\Omega)$ de telle sorte que $\frac{\partial\widehat{\varphi}}{\partial n}$ se comporte comme $e^{-C/\varepsilon}$ et $\widehat{\varphi}_{|t=0}$ se comporte comme une constante par rapport à ε. Ceci implique immédiatement le Théorème 2. Tous les détails de cette preuve sont donnés dans la Section 3 de [69].

2.3 Résultats de convergence du coût

• Dans le cadre unidimensionnel, l'équation de transport associée avec contrôle nul satisfait que sa solution est identiquement nulle à l'instant T lorsque $T > 1/M$. Similairement, pour le problème visqueux, on a (voir [26]) :

Proposition 1. *Soit $T^* \in]1/M, T[$. Alors, pour tout $\varphi_T \in L^2(0,1)$, la solution du problème adjoint (2.6) satisfait*

$$\|\varphi_{|t=0}\|^2_{L^2(0,1)} \leq \frac{1}{4\varepsilon\pi T^*} \exp\left\{ - \left(\frac{MT^* - 1}{2\varepsilon T^*} \right)^2 \right\} \|\varphi_{|t=T^*}\|^2_{L^2(0,1)}. \tag{2.8}$$

Pour la preuve, on considère la solution $\widetilde{\varphi}$ du système suivant

$$\begin{cases} \widetilde{\varphi}_t + M\widetilde{\varphi}_x + \varepsilon\widetilde{\varphi}_{xx} = 0 & \text{dans }]0,T[\times\mathbb{R} \\ \widetilde{\varphi}_{|t=T} = |\varphi_T| 1_{]0,1[} & \text{dans } \mathbb{R}, \end{cases}$$

qui, d'après le principe du maximum, satisfait

$$|\varphi(t,x)| \leq \widetilde{\varphi}(t,x) \quad \forall (t,x) \in]0,T[\times]0,1[. \tag{2.9}$$

On rappelle l'expression de $\widetilde{\varphi}$:

$$\widetilde{\varphi}(t,x) = \frac{1}{2(\varepsilon\pi T)^{1/2}} \int_0^L \exp\left\{ -\frac{(x - MT - y)^2}{4\varepsilon T} \right\} |\varphi(t,y)|\, dy.$$

En utilisant (2.9), un calcul direct montre (2.8).

Par ailleurs, avec une technique de type "inégalité de Carleman", nous pouvons obtenir l'estimation suivante :

$$\int_0^1 \int_{2T/3}^{(2+3\gamma)T/3} |\varphi|^2 dt\, dx \leq Ce^{2.61/(\varepsilon T)} \left(\frac{\varepsilon^2 T}{M} \int_0^T |\varphi_x(t,0)|^2 dt + \frac{1}{M} \int_0^L |\varphi(0,x)|^2 dx \right). \tag{2.10}$$

Faissons maintenant l'hypothèse

$$T > \frac{4.3}{M}. \tag{2.11}$$

On applique l'inégalité de dissipation (2.8) au terme de gauche de (2.10) car $2T/3 > 1/M$, ce qui donne l'inégalité

$$\|\varphi_{|t=0}\|^2_{L^2(0,1)} \leq K^* \|\varphi_{x|x=0}\|^2_{L^2(0,T)},$$

avec

$$K^* = C\varepsilon T^2 \exp\left\{ \left(\frac{3}{4} \left(\frac{2TM}{3} - 1 \right)^2 - 2.61 \right) / \varepsilon T \right\}.$$

Remarquons que la meilleure constante K^* coïncide avec K (défini dans (2.3)) où on remplace $H^{-1}(\Omega)$ par $L^2(\Omega)$ et $L^2(0,T; H^{-1/2}(\partial\Omega))$ par $L^2(]0,T[\times\partial\Omega)$.

Grâce à (2.11), on obtient le résultat suivant (voir [26]) :

Théorème 3. *Supposons que (2.11) est satisfait. Alors, il existe $C > 0$ tel que*

$$K^* \leq e^{-C/\varepsilon}.$$

Récemment, cette constante a été amélioré dans [55]. En utilisant l'approche décrite dans [41] basée sur des techniques d'analyse complexe, il est démontré que la condition $T > 4.2/M$ suffit pour avoir la contrôlabilité uniforme.

• Pour le cas général, on fait l'hypothèse de l'existence d'un temps de sortie T_s tel que toute trajectoire associée à M (voir (2.4)) et définie sur un intervalle de longueur T_s, admet au moins un point à l'exterieur de $\overline{\Omega}$.

Théorème 4. *Soit $M \in W^{1,\infty}(]0,T[\times\Omega)$. Sous l'hypothèse de l'existence du temps de sortie T_s, il existe une constante $L > 1$ qui dépend seulement de $\|M\|_{W^{1,\infty}}$ et de T_s, telle que si $T > LT_s$, il existe une constante positive C indépendante de ε telle que*

$$K \leq e^{-C/\varepsilon}$$

pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit.

Comme dans le cas monodimensionnel, ce résultat est une conséquence d'une inégalité de Carleman combinée avec un résultat de dissipation. L'inégalité de Carleman est obtenue de façon classique (voir [52]) :

$$\|\varphi(t,\cdot)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq e^{C^*/\varepsilon} \iint_{(0,T)\times\Gamma} \left|\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|^2 dt\,dx, \quad \forall t \in]\eta_0 T, \eta_1 T[, \tag{2.12}$$

pour tout $0 < \eta_0 < \eta_1 < 1$ et un certain C^* qui dépend de η_0 et η_1.

Pour présenter le résultat de dissipation, on introduit pour chaque $r > 0$ et chaque $0 \leq s_1 < s_2 \leq T$, l'ensemble

$$D_r(x_0, s_1, s_2) := \{(X(s_1, s_2, x), t)/|x - x_0| \leq r,\, t \in [s_1, s_2]\}.$$

Avec cette notation, l'hypothèse d'existence du temps de sortie se traduit par l'existence de $T_s \in]0, T[$ et de $r_0 > 0$ tels que pour tout $x_0 \in \overline{\Omega}$ et tout $t_0 \in [T_s, T]$, il existe $t_1 \in [t_0 - T_s, t_0]$ tel que

$$(x, t_1) \in D_{2r_0}(x_0, t_0 - T_s, t_0) \Rightarrow x \notin \overline{\Omega}. \tag{2.13}$$

Nous démontrons le résultat de dissipation suivant ([69]) :

Proposition 2. *Sous l'hypothèse d'existence du temps de sortie, il existe une constante $C_0 > 0$ qui dépend de r_0, de T_s et de $\|M\|_{L^\infty(W^{1,\infty})}$ mais indépendante de $\varepsilon \in]0,1]$, telle que pour chaque entier $m \in [1, T/T_s]$, il existe une constante C indépendante de ε telle que l'inégalité suivante est satisfaite pour les solutions du problème adjoint (2.6) :*

$$\|\varphi_{|t=0}\|_{L^2(\Omega)} \leq Ce^{-mC_0/\varepsilon}\|\varphi_{|t=t^*}\|_{L^2(\Omega)} \tag{2.14}$$

pour tout $t^* \in [mT_s, T]$ et tout $\varepsilon \in]0,1]$.

Comme le système (2.6) est dissipatif (rappelons que $M \in L^\infty(W^{1,\infty})$), il suffit de démontrer l'estimation suivante :

$$\|\varphi_{|t=t_0-T_s}\|_{L^2(\Omega)} \leq Ce^{-C_0/\varepsilon}\|\varphi_{|t=t_0}\|_{L^2(\Omega)}.$$

On considère un recouvrement fini de $\overline{\Omega}$

$$B_j := \{x : |x - x_j| \leq r_0\}, \;\; j = 2, \cdots, J$$

et une partition de l'unité χ_j associée. D'après l'hypothèse (2.13), on appelle t_j le temps associé à chaque x_j. Soit maintenant ζ_j une fonction lipschitzienne satisfaisant

$$\begin{cases} \zeta_j \geq 0 & \text{dans } [t_0 - T_s, t_0] \times \mathbb{R}^N, \\ -\zeta_{j,t} + |\nabla\zeta_j|^2 - M \cdot \nabla\zeta_j \leq 0 & \text{p. p. dans } [t_0 - T_s, t_0] \times \mathbb{R}^N, \\ \zeta_j = 0 & \text{dans } D_{r_0}(x_j, t_0 - T_s, t_0), \\ \zeta_j(t,x) \geq c_0 r_0^2 & \text{dans } (D_{2r_0}(x_j, t_0 - T_s, t_0))^c. \end{cases}$$

L'existence d'une telle fonction est démontrée dans [69], Section 2.2.

Soit φ_j la solution du problème rétrograde (2.6) avec donnée $\chi_j(x)\varphi_{|t=t_0}(x)$. Alors, on a

$$\varphi = \sum_{j=2}^{J} \varphi_j.$$

Comme $\zeta_{j|t=t_0} = 0$ dans le support de χ_j et $\zeta_{j|t=t_j} \geq c_0 r_0^2$ dans $\overline{\Omega}$, nous obtenons

$$\|\varphi_{j|t=t_j}\|_{L^2(\Omega)} \leq c_1 e^{-c_2/\varepsilon}\|\varphi_{j|t=t_0}\|_{L^2(\Omega)},$$

grâce à l'inégalité d'Agmon (voir [69], Lemma 1). Ici, c_1 et c_2 ne dépendent pas de j ni de ε. En faisant la somme en j et en tenant compte de la dissipation, nous obtenons le résultat désiré.

Pour conclure la preuve du Théorème 4, nous appliquons (2.12) dans l'intervalle $[(1-3\delta)T, T]$ pour $\eta_0 := 1-2\delta$ et $\eta_1 := 1-\delta$ ($\delta > 0$ petit) et on a

$$\|\varphi_{|t=(1-2\delta)T}\|_{L^2(\Omega)} \leq C e^{\widehat{C}/\varepsilon} \iint_{]0,T[\times\Gamma} \left|\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|^2 dt\, d\sigma,$$

avec $\widehat{C} > 0$ indépendant de ε. Grâce à (2.14) pour $mT_s \leq (1-2\delta)T$, on arrive à

$$\|\varphi_{|t=0}\|_{L^2(\Omega)} \leq C e^{(\widehat{C}-mc_0)/\varepsilon} \iint_{]0,T[\times\Gamma} \left|\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|^2 dt\, d\sigma.$$

Par conséquent, le Théorème 4 est démontré pour $L := m/(1-2\delta)$, où $m := 1 + [\widehat{C}/c_0]$.

Chapitre 3

Résultats de contrôlabilité pour quelques équations dispersives

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons quelques résultats de contrôlabilité pour des équations dispersives de type Korteweg-de-Vries (noté KdV dans tout ce qui suit). Dans les deux premiers paragraphes, nous établissons des résultats de contrôlabilité uniforme pour une équation de transport-KdV linéaire dans la limite de zéro-dispersion, ainsi que pour une équation de transport-KdV-chaleur dans la limite de zéro-dispersion et zéro-diffusion. Dans les deux derniers paragraphes, nous traitons le problème de la contrôlabilité exacte de l'équation de KdV linéaire lorsque le contrôle agit sur la condition de Dirichlet à droite et le problème de la contrôlabilité locale d'une équation de type KdV d'ordre 5. Nous donnons plus de détails sur les problèmes que nous allons traiter.

• Dans le premier problème, nous considérons le système de transport-KdV linéaire suivant :

$$\begin{cases} y_t + \nu y_{xxx} - M y_x = 0 & \text{dans }]0,T[\times]0,1[, \\ y_{|x=0} = v, \quad y_{|x=1} = y_{x|x=1} = 0 & \text{dans }]0,T[, \\ y_{|t=0} = y_0 & \text{dans }]0,1[. \end{cases} \tag{3.1}$$

Ici, $\nu > 0$ est le coefficient de dispersion, $M \in \mathbb{R}$ est un coefficient de transport et v est le contrôle. Les résultats principaux que l'on peut démontrer concernant ce système sont, d'une part, un résultat d'explosion du coût de la contrôlabilité à zéro lorsque $T < 1/|M|$ et $\nu \to 0^+$ et d'autre part, un résultat de convergence exponentielle du coût de la contrôlabilité à zéro lorsque $T > C/M$ (seulement pour $M > 0$) pour un certain $C > 1$. Par contre, la question (très intéressante) de la contrôlabilité (locale) uniforme de l'équation (non linéaire) de KdV reste ouverte.

A ν fixé, la contrôlabilité à zéro de (3.1) a été établie dans [101] avec un coût de l'ordre de $\exp\{C/\nu\}$, ce qui ne sera pas suffisant pour nous. Nous avons donc établi un nouveau résultat où le coût est de l'ordre de $\exp\{C/\nu^{1/2}\}$.

Tous les résultats que nous obtenons pour le système (3.1) sont indépendants de la taille du domaine spatial, contrairement au cas du contrôle de type Neumann (par la droite) qui a été établi dans [99]. Dans ce cadre, en effet, L. Rosier a démontré que (3.1) avec $M = -1$ est exactement contrôlable si et seulement si la longueur de l'intervalle n'appartient pas à un ensemble dénombrable de longueurs critiques.

• Ensuite, nous traitons le cas d'une équation de type transport-dispersion-diffusion linéaire :

$$\begin{cases} y_t + \delta y_{xxx} - \varepsilon y_{xx} - M y_x = 0 & \text{dans }]0,T[\times]0,1[, \\ y_{|x=0} = v, \quad y_{|x=1} = y_{x|x=1} = 0 & \text{dans }]0,T[, \\ y_{|t=0} = y_0 & \text{dans }]0,1[, \end{cases} \tag{3.2}$$

où $\delta > 0$ et $\varepsilon, M \in \mathbb{R}$. Pour $\varepsilon \in \mathbb{R}$ et $\delta > 0$ fixés, la contrôlabilité à zéro de (3.2) est démontrée dans [101]. En effet, l'auteur étudie le cas $\varepsilon = 0$ mais on peut se ramener à ce cas là à l'aide d'un changement d'inconnu du type

$$u(t,x) := e^{ax} y(t,x),$$

avec a constant.

Comme dans le cas purement dispersif l'objectif est, d'une part, de démontrer l'explosion du coût de la contrôlabilité à zéro lorsque $T < 1/|M|$ et sa convergence lorsque $T > L/|M|$ pour un certain $L > 1$ (δ, $\varepsilon \to 0^+$).

Le problème que l'on se pose dans ce paragraphe provient de la dynamique des milieux continus. En particulier, dans l'élastodynamique non linéaire, les termes en ε et δ peuvent modéliser des effets capillaires. Ceux-ci sont particulièrement importants dans la théorie d'ondes de choc non-classiques (voir le livre [85]). Malgré le caractère linéaire de ce système, les résultats que nous obtenons peuvent être vus comme une première approche pour contrôler des lois de conservation non linéaires dans la limite dispersive-dissipative. Nous avons démontré un résultat dans la limite purement dissipative pour l'équation de Burgers (voir [56]). Une limite purement dispersive serait aussi très intéressante pour l'équation de Burgers, voir [83].

• Troisièmement, nous considérons le système de contrôle suivant associé à l'équation de KdV ($L > 0$) :

$$\begin{cases} y_t + y_{xxx} + y_x + yy_x = 0 & \text{dans }]0,T[\times]0,L[, \\ y_{|x=0} = y_{x|x=L} = 0,\ y_{|x=L} = v & \text{dans }]0,L[, \\ y_{|t=0} = y_0 & \text{dans }]0,L[. \end{cases} \tag{3.3}$$

Le problème que l'on étudie est la contrôlabilité exacte dans $L^2(0,L)$; étant donnés y_0, $y_1 \in L^2(0,L)$ et $T > 0$, existe-t-il un contrôle $v \in L^2(0,T)$ tel que la solution y de (3.3) satisfait $y_{|t=T} \equiv y_1$ dans $]0,L[$? Si les normes $\|y_0\|_{L^2(0,L)}$ et $\|y_1\|_{L^2(0,L)}$ sont petites, il s'agit de la contrôlabilité locale exacte près de zéro.

Le problème de la contrôlabilité de (3.3) a été étudié de manière intense dans ces dernières années ; voir en particulier [99], [100], [101], [102], [103]. Des différentes situations ont été considérées : le cas où les trois conditions au bord sont contrôlées [102], le cas avec un seul contrôle Neumann (voir, par exemple, [99], [25], [16] et [17]), le cas avec un contrôle Dirichlet à gauche (voir [101] et [57]) et le cas d'un contrôle additionnel dans le membre de droite [20].

Le résultat que l'on a obtenu dans ce cadre là peut être comparé à celui présenté dans [99] lorsque le contrôle agissait sur la condition de Neumann à droite. Plus précisément, nous démontrons l'existence d'un ensemble dénombrable de longueurs critiques en dehors duquel on a la contrôlabilité exacte locale du système (3.3).

• Enfin, nous considérons un système de contrôle associé à l'équation de KdV d'ordre 5 :

$$\begin{cases} u_t + \alpha u_{5x} + \mu u_{xxx} + \beta u u_{xxx} + \delta u_x u_{xx} + P'(u) u_x = 0 & \text{dans }]0,T[\times]0,1[, \\ u_{|x=0} = u_{x|x=0} = u_{xx|x=0} = 0,\ u_{|x=1} = v_1,\ u_{x|x=1} = v_2 & \text{dans }]0,T[, \\ u_{|t=0} = u_0 & \text{dans }]0,L[, \end{cases} \tag{3.4}$$

où α, μ, β, $\delta \in \mathbb{R}$ et $P(u) := pu + qu^2 + ru^3$ ($p, q, r \in \mathbb{R}$). Ces équations ont été introduites dans [82]. Elles comprennent, en particulier, l'équation de Kawahara [80] qui modélise des ondes magnéto-acoustiques et quelques modèles obtenus par Olver dans [96] pour la propagation unidirectionnelle d'ondes dans des eaux peu profondes quand le terme d'ordre 3 est petit.

Il y a une littérature importante concernant le problème de Cauchy sur la droite réelle (voir, par exemple, [82], [98], [81]) mais rien sur un intervalle borné. Nous avons donc obtenu des résultats d'existence et de régularité pour (3.4).

Concernant le contrôle de ce système, notre résultat principal établie la contrôlabilité exacte locale aux trajectoires du système (3.4).

3.2 Contrôle optimal singulier pour une équation de transport-dispersion linéaire

Nous rappelons que le système de travail est (3.1) avec $\nu > 0$ et $M \in \mathbb{R}$.

• Comme dans le chapitre précédent (équation de transport-diffusion), nous commençons par le résultat d'explosion du coût (voir [58]) :

Théorème 5. *Soit $M \neq 0$ et $T < 1/|M|$. Alors, il existe $C > 0$, $\ell \in \mathbb{N}$ (indépendants de ν) et des conditions initiales $y_0 \in L^2(0,1)$ tels que tout contrôle $v \in L^2(0,T)$ qui conduit la solution de (3.1) de y_0 à 0 satisfait*

$$\|v\|_{L^2(0,T)} \geq \nu^\ell \exp\{C/\nu^{1/2}\}\|y_0\|_{L^2(0,1)},$$

pour tout $\nu \in]0,\nu_0[$, où $\nu_0 > 0$ ne dépend que de T.

On donne les détails de la preuve dans le cas $M > 0$. On rappelle que la constante qui borne le contrôle en fonction de la donnée initiale coïncide avec la constante d'observabilité C_{obs} avec

$$\|\varphi_{|t=0}\|_{L^2(0,1)} \leq \nu C_{obs}\|\varphi_{xx|x=0}\|_{L^2(0,T)} \quad \forall \varphi_T \in L^2(0,1),$$

où φ est la solution du problème adjoint

$$\begin{cases} \varphi_t + \nu\varphi_{xxx} - M\varphi_x = 0 & \text{dans }]0,T[\times]0,1[, \\ \varphi_{|x=0} = \varphi_{x|x=0} = \varphi_{|x=1} = 0 & \text{dans }]0,T[, \\ \varphi_{|t=T} = \varphi_T & \text{dans }]0,1[. \end{cases} \tag{3.5}$$

Soit $R > 0$ tel que $0 < 2R < 1 - MT$ et $\widehat{\varphi}_T \in C_0^\infty(0,1)$ satisfaisant

$$\begin{cases} \text{Supp}(\widehat{\varphi}_T) \subset]R, 2R[, \\ \widehat{\varphi}_T \geq 0, \\ \|\widehat{\varphi}_T\|_{L^2(0,1)} = 1. \end{cases}$$

Soit $\widehat{\varphi}$ la solution du problème adjoint (3.5) avec donnée $\widehat{\varphi}_T$. Démontrons d'abord que

$$\int_0^1 |\widehat{\varphi}_{|t=0}|^2 dx \geq C > 0. \tag{3.6}$$

Soit θ la solution de

$$\begin{cases} \theta_t - M\theta_x = 0 & \text{dans }]0,T[\times]0,1[, \\ \theta_{|t=T} = \widehat{\varphi}_T & \text{dans }]0,T[. \end{cases}$$

Evidemment, on a $\text{Supp}(\theta(t,\cdot)) \subset]0,1[$. En multipliant l'équation de $\widehat{\varphi}$ par θ et en intégrant par parties en t et en x, on obtient

$$\int_0^1 (\theta(0,x)\,\widehat{\varphi}(0,x) - |\widehat{\varphi}_T|^2)\,dx + \nu\int_0^T\int_0^1 \widehat{\varphi}\,\theta_{xxx}\,dx\,dt = 0.$$

Ceci, combiné avec

$$\frac{d}{dt}\int_0^1 |\widehat{\varphi}|^2 dx \geq 0 \quad \text{dans }]0,T[,$$

donne

$$\int_0^1 \theta(0,x)\,\widehat{\varphi}(0,x)\,dx \geq \frac{1}{2} \quad \text{pour } \nu \in]0,\nu_0[.$$

La propriété (3.6) suit aisément.

Ensuite, à l'aide d'une inégalité d'énergie à poids, on peut démontrer

$$\int_0^{R/4} |\widehat{\varphi}(t,x)|^2 dx \leq C\exp\left\{-\frac{R^2}{500(\nu TR)^{1/2}}\right\}\int_0^1 |\widehat{\varphi}_T|^2 dx,$$

pour $\nu \in]0,\nu_0[$. La dernière étape de la preuve consiste à établir la propriété de régularité suivante :

$$\|\widehat{\varphi}\|_{L^2(0,T;H^3(0,R/16))} \leq C(\nu)\|\widehat{\varphi}\|_{L^2(]0,T[\times]0,R/4[)}, \tag{3.7}$$

où $C(\nu)$ croît polynomialement en ν^{-1}. Une multiplication de l'équation de $\widehat{\varphi}$ par $(R/4-x)^3\widehat{\varphi}$ montre que

$$\|(R/4-x)\widehat{\varphi}\|_{L^2(0,T;H^1(0,R/4))} \leq C\|\widehat{\varphi}\|_{L^2(]0,T[\times]0,R/4[)}. \tag{3.8}$$

De façon analogue (mais avec une puissance de $(R/4-x)$ plus grande), on peut établir cette autre inégalité de régularité (voir Proposition 3.3 dans [58]) :

$$\|\widehat{\varphi}\|_{L^2(0,T;H^4(0,R/16))} \leq C(\nu)\|\widehat{\varphi}\|_{L^2(0,T;H^1(0,R/8))}.$$

Le terme à droite peut être estimé par le terme de gauche de (3.8). En combinant ces deux estimations, on obtient (3.7).

• Quant aux résultats de convergence du coût de la contrôlabilité à zéro, on commence par un résultat à l'aide de trois contrôles frontières (voir [57]) :

Théorème 6. *Il existe une constante $K_0>0$ telle que pour tout $M>0$, il existe $\nu_0>0$ tel que pour tout $T\geq K_0/M$, tout $y_0\in W^{1,\infty}(0,1)$ et tout $\nu\in]0,\nu_0[$, il existe trois contrôles v_1, v_2 et v_3 dans $L^2(0,T)$ tels que la solution $y\in L^2(]0,T[\times]0,1[)\cap C^0([0,T];H^{-1}(0,1))$ de*

$$\begin{cases} y_t+\nu y_{xxx}-My_x=0 & \text{dans } (0,T)\times]0,1[, \\ y_{|x=0}=v_1, \quad y_{|x=1}=v_2, \quad y_{x|x=1}=v_3 & \text{dans }]0,T[, \\ y_{|t=0}=y_0 & \text{dans }]0,1[\end{cases}$$

satisfait $y(T,\cdot)=0$ dans $]0,1[$. De plus, les contrôles sont majorés indépendemment de ν :

$$\|v_1\|_{L^2(0,T)}+\|v_2\|_{L^2(0,T)}+\|v_3\|_{L^2(0,T)}\leq K_1\|y_0\|_{W^{1,\infty}(0,1)}$$

avec K_1 indépendant de ν et de y_0.

La preuve repose sur une étude de la solution de l'équation de KdV linéaire sur toute la droite. A l'aide de la fonction d'Airy ($Ai(x):=\pi^{-1}\int_0^\infty\cos(t^3/3+xt)dt$, $\forall x\in\mathbb{R}$; voir [74]), on peut établir des estimations pour cette solution.

Nous présentons un autre résultat de convergence (voir [58]) :

Théorème 7. *Il existe une constante $C_0>0$ telle que pour tout $T\geq C_0/M$, il existe $C_1>0$ et $C_2>0$ tels que pour tout $\nu\in]0,1]$ et tout $y_0\in L^2(0,1)$, il existe $v\in L^2(0,T)$ qui amène la solution de (3.1) à 0 et satisfaisant :*

$$\|v\|_{L^2(0,T)}\leq\frac{C_2}{(\nu M)^{1/2}}\exp\left\{-\frac{C_1M^{1/2}}{\nu^{1/2}}\right\}\|y_0\|_{L^2(0,1)}.$$

Ce résultat améliore le Théorème 6 car nous n'utilisons qu'un contrôle et le coût est plus petit.

Corollaire 1. *Sous les mêmes hypothèses du Théorème 7, nous pouvons construire des contrôles $v\in H^1(0,T)$ qui amènent la solution de (3.1) à 0 et qui satisfont*

$$\|v\|_{H^1(0,T)}\leq\frac{C_2(\nu,M)}{M^{1/2}}\exp\left\{-\frac{C_1M^{1/2}}{\nu^{1/2}}\right\}\|y_0\|_{L^2(0,1)},$$

où $C_2(\nu,M)$ croît polynomialement en ν^{-1} et M.

Preuve du Théorème 7 : D'abord, à l'aide d'une inégalité de type Carleman et de l'inégalité d'énergie, on a

$$\int_0^1|\varphi(t_1,x)|^2dx\leq\int_0^1|\varphi(t_2,x)|^2dx, \quad 0\leq t_1\leq t_2\leq T$$

pour les solutions de (3.5), nous trouvons l'estimation suivante :

$$\int_0^1|\varphi_{|t=0}|^2dx\leq C^*\int_0^{1/M}|\varphi_{xx|x=0}|^2dt,$$

avec

$$C^* := C \exp\left(\frac{CM^{1/2}}{\nu^{1/2}}\right).$$

Les poids utilisés pour obtenir cette estimation sont du type

$$\exp\left\{\frac{\beta(x)}{(t(T-t))^{1/2}}\right\}.$$

Pour conclure la preuve, il suffit d'établir le résultat suivant :

Proposition 3. *Soit $T > 0$, $\nu > 0$, $M > 0$ et $0 \leq t_1 < t_2 \leq T$ avec $t_2 - t_1 \geq 1/M$. Alors,*

$$\int_0^1 |\varphi(t_1, x)|^2 dx \leq K(t_1, t_2) \int_0^1 |\varphi(t_2, x)|^2 dx, \tag{3.9}$$

avec

$$K(t_1, t_2) \leq \exp\left\{-\frac{2(M(t_2 - t_1) - 1)^{3/2}}{3\sqrt{3}(1 + \sqrt{2})^2 (t_2 - t_1)^{1/2} \nu^{1/2}}\right\}. \tag{3.10}$$

La preuve de ce résultat est inspirée par [30]. D'abord, on multiplie (3.5) par

$$\exp\{r(M(T-t) - x)\}\, \varphi$$

avec $r > 0$ à choisir. Après quelques intégrations par parties, nous obtenons

$$-\frac{d}{dt}\left(\exp\left\{-\nu r^3 (T-t) \int_0^1 \exp\{r(M(T-t) - x)\} |\varphi(t, x)|^2 dx\right\}\right) \leq 0$$

pour tout $t \in]0, T[$. En intégrant entre t_1 et t_2, on a l'inégalité (3.9) avec

$$K(t_1, t_2) := \exp\{\nu(t_2 - t_1) r^3 + (1 - M(t_2 - t_1)) r\}. \tag{3.11}$$

On choisit le r qui minimise $K(t_1, t_2)$, c'est-à-dire,

$$r := \frac{(M(t_2 - t_1) - 1)^{1/2}}{\sqrt{3}(t_2 - t_1)^{1/2} \nu^{1/2}}.$$

En remplaçant ceci dans (3.11), on obtient (3.9)-(3.10).

3.3 Contrôle optimal singulier pour une équation de transport-dispersion-diffusion linéaire

Nous présentons à nouveau notre système de travail :

$$\begin{cases} y_t + \delta y_{xxx} - \varepsilon y_{xx} - M y_x = 0 & \text{dans }]0, T[\times]0, 1[, \\ y_{|x=0} = v, \quad y_{|x=1} = y_{x|x=1} = 0 & \text{dans }]0, T[, \\ y_{|t=0} = y_0 & \text{dans }]0, 1[. \end{cases} \tag{3.12}$$

• De façon analogue au cas purement dispersif, nous avons le résultat d'explosion du coût de la contrôlabilité à zéro suivant (voir [58]) :

Théorème 8. *Soit $M \neq 0$ et $T < 1/|M|$. Alors, il existe $C > 0$, $\ell \in \mathbb{N}$ (indépendants de δ et de ε) et des conditions initiales $y_0 \in L^2(0, 1)$ tels que tout contrôle $v \in L^2(0, T)$ conduisant la solution de (3.12) de y_0 à 0 satisfait*

$$\|v\|_{L^2(0,T)} \geq C\delta^\ell \exp\left\{\frac{C}{\max\{\delta^{1/2}, \varepsilon\}}\right\} \|y_0\|_{L^2(0,1)},$$

pour tout $\delta \in]0, \delta_0[$ et tout $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0[$, où $\delta_0 > 0$ et $\varepsilon_0 > 0$ ne dépendent que de T.

La preuve suit les mêmes étapes que celle du cas purement dispersif (voir Théorème 5 ci-dessus).

• Le premier résultat de convergence du coût de la contrôlabilité à zéro est similaire au cas purement dispersif présenté dans le Théorème 7 (voir [58]) :

Théorème 9. *Il existe $\widetilde{C}_0 > 0$ tel que pour tout $M > 0$ et tout $T > \widetilde{C}_0/M$, il existe deux constantes $\widetilde{C}_1 > 0$ et $\widetilde{C}_2 > 0$ (qui ne dépendent que de T) telles que pour tout $(\delta, \varepsilon) \in]0,1] \times [0,1]$ il existe $v \in L^2(0,T)$ qui conduit les solutions de (3.12) de $y_0 \in L^2(0,1)$ à 0 tel que*

$$\|v\|_{L^2(0,T)} \leq \frac{\widetilde{C}_2}{(M\delta)^{1/2}} \exp\left\{ -\frac{\widetilde{C}_1 M}{\max\{(M\delta)^{1/2}, \varepsilon\}} \right\} \|y_0\|_{L^2(0,1)}.$$

Comme pour le Théorème 7, on peut trouver des contrôles dont la norme $H^1(0,T)$ est majorée comme précédemment avec $\widetilde{C}_2(\delta, M)$ qui croît polynomialement par rapport à δ^{-1} et M (voir Corollaire 1 ci-dessus).

Contrairement au cas purement dispersif, pour le système (3.12) nous pouvons démontrer un résultat de convergence du coût de la contrôlabilité à zéro lorsque $M < 0$ (voir [58]) :

Théorème 10. *Soit $0 < \gamma \leq 1$. Alors, il existe $C_3 > 0$ tel que pour tout $M < 0$ et tout $T \geq C_3/|M|$, il existe deux constantes $C_4 > 0$ et $C_5 > 0$ telles que pour tout $(\delta, \varepsilon) \in]0,1]^2$ satisfaisant*

$$\varepsilon^2 \geq \gamma\delta|M|, \tag{3.13}$$

on peut trouver un contrôle $v \in L^2(0,T)$ qui conduit la solution de (3.12) de y_0 à 0 tel que

$$\|v\|_{L^2(0,T)} \leq \frac{C_4}{(|M|\delta)^{1/2}} \exp\left\{ -\frac{C_5|M|}{\varepsilon} \right\} \|y_0\|_{L^2(0,1)}.$$

Ce résultat n'est pas surprenant car le même type de résultat a été démontré dans le cas purement dissipatif ($\delta = 0$) dans [26] et dans [69] (voir Théorème 4 ci-dessus).

Pour la preuve du Théorème 10, nous suivons les pas de la preuve du Théorème 7. La seule différence par rapport à la preuve du Théorème 7 est l'estimation de dissipation (3.9)-(3.10). Ici, on prend le paramètre r négatif mais satisfaisant

$$r \geq -\frac{2\varepsilon}{3\delta}. \tag{3.14}$$

Avec les mêmes intégrations par parties que dans la preuve du Théorème 7, nous obtenons l'inégalité (3.9) avec

$$K(t_1, t_2) := \exp\{\delta(t_2 - t_1)r^3 + \varepsilon(t_2 - t_1)r^2 + (-1 - M(t_2 - t_1))r\}. \tag{3.15}$$

Prenons maintenant

$$r^* := -\frac{2\gamma\left(|M| - \frac{1}{t_2 - t_1}\right)}{3\varepsilon}.$$

Grâce à l'hypothèse (3.13), r^* satisfait (3.14). En injectant r^* dans (3.15), on trouve

$$K(t_1, t_2) \leq \exp\left\{ -\frac{t_2 - t_1}{\varepsilon} \left(-\frac{4}{9}\gamma^2 + \frac{2}{3}\gamma \right) \left(|M| - \frac{1}{t_2 - t_1} \right)^2 \right\}.$$

Avec $\gamma \leq 1$ on obtient un résultat de dissipation, qui suffira pour la preuve du Théorème 10.

3.4 Contrôlabilité de KdV avec un contrôle Dirichlet à droite

Nous considérons le système de contrôle suivant :

$$\begin{cases} y_t + y_{xxx} + y_x + yy_x = 0 & \text{dans }]0,T[\times]0,L[, \\ y_{|x=0} = y_{x|x=L} = 0, \ y_{|x=L} = v & \text{dans }]0,L[, \\ y_{|t=0} = y_0 & \text{dans }]0,L[. \end{cases} \tag{3.16}$$

Nous rappelons que $y_0 \in L^2(0,L)$ et que l'on cherche à démontrer la contrôlabilité exacte locale de ce système. Pour ce faire, nous commençons par étudier le problème linéarisé autour de zéro.

• En effet, le résultat central de ce paragraphe concerne le système linéaire suivant (linéarisé de (3.16) autour de zéro) :

$$\begin{cases} y_t + y_{xxx} + y_x = 0 & \text{dans }]0,T[\times]0,L[, \\ y_{|x=0} = y_{x|x=L} = 0, \ y_{|x=L} = v & \text{dans }]0,L[, \\ y_{|t=0} = y_0 & \text{dans }]0,L[. \end{cases} \tag{3.17}$$

Le résultat suivant est démontré dans [60] :

Théorème 11. *Il existe un ensemble dénombrable $\mathcal{N} \subset]0,+\infty[$ tel que*

$$L \notin \mathcal{N} \Leftrightarrow (3.17) \text{ est exactement contrôlable.}$$

Preuve : Dans une première étape, nous démontrons que (3.17) n'est pas exactement contrôlable dans H^{-1}, si et seulement si, il existe ψ non trivial satisfaisant pour un certain $\lambda \in \mathbb{C}$:

$$\begin{cases} \psi_{xxx} + \psi_x = \lambda\psi & \text{dans }]0,L[, \\ \psi(0) = \psi'(0) = \psi(L) = \psi''(L) = 0. \end{cases} \tag{3.18}$$

La preuve de ceci est très similaire à celle développée dans [99] où la quatrième condition au bord était $\psi'(L) = 0$ au lieu de $\psi''(L) = 0$.

Ensuite, nous établissons le résultat suivant :

Proposition 4. *Le système (3.17) n'est pas exactement contrôlable, si et seulement si, il existe $a, b \in \mathbb{C}$ tels que*

$$ae^a = be^b = -(a+b)e^{-(a+b)} \tag{3.19}$$

et

$$L^2 = -(a^2 + ab + b^2). \tag{3.20}$$

En résolvant le système (3.18), on trouve

$$\psi(x) = c_0 e^{\mu_0 x} + c_1 e^{\mu_1 x} + c_2 e^{\mu_2 x}, \ x \in [0,L],$$

où μ_0, μ_1 et μ_2 sont les racines de l'équation caractéristique de φ. En imposant enfin les conditions au bord de (3.18), on arrive à

$$\mu_0 e^{-\mu_0 L} = \mu_1 e^{-\mu_1 L} = \mu_2 e^{-\mu_2 L}.$$

La proposition est démontrée.

Ensuite, on montre que l'équation (3.19) a au plus une quantité dénombrable de solutions $(a,b) \in \mathbb{C}^2$. Pour établir ceci, on démontre que chaque solution de (3.19) est isolée (voir Proposition 3 dans [60]).

Enfin, on démontre que (3.19) a au moins une quantité dénombrable de solutions satisfaisant $a^2 + ab + b^2 \in \mathbb{R}^-$. Pour montrer ceci, posons $a := \overline{b}$:

$$a := \rho e^{i\theta}, \quad b := \rho e^{-i\theta},$$

avec $\rho > 0$ et $\theta \in]-\pi,\pi[\backslash\{0\}$. En imposant (3.19), on arrive facilement à

$$\rho = -\frac{\theta}{\sin\theta} + k\frac{\pi}{\sin\theta}, \ k \in \mathbb{Z} \tag{3.21}$$

et

$$2\cos\theta = (-1)^{k+1} e^{-3(\theta - k\pi)\cot\theta}. \tag{3.22}$$

On voit maintenant que pour k pair et suffisamment négatif, (3.22) a une solution $\theta_k \in]-7\pi/12, -\pi/2[$. On constate finalement que ρ_k (donné par (3.21)) et θ_k satisfont

$$(a_k)^2 + a_k b_k + (b_k)^2 = (\rho_k)^2(1 + 2\cos(2\theta_k)) \in \mathbb{R}^-.$$

• Quant à l'équation de KdV (3.16), nous avons un résultat local (voir [60]) :

Théorème 12. *Soit $L \in (\mathbb{R}^+)^* \setminus \mathcal{N}$. Il existe $\mu > 0$ tel que pour tout y_0, $y_1 \in L^2(0,L)$ satisfaisant*

$$\|y_0\|_{L^2(0,L)} + \|y_1\|_{L^2(0,L)} < \mu,$$

il existe $v \in H^{1/6}(0,T)$ tel que la solution $y \in L^2(0,T;H^1(0,L)) \cap C^0([0,T];L^2(0,L))$ de (3.16) satisfait

$$y_{|t=T} \equiv y_1 \quad \textit{dans }]0,L[.$$

Le preuve de ce résultat suit les idées de [99]. Nous avons besoin de contrôles dans $H^{1/6}(0,T)$, donc les contrôles fournis par le Théorème 11 ne suffisent pas. C'est pour cela que l'on réduit d'abord notre problème de contrôlabilité à un problème de contrôlabilité à zéro.

Pour $z_1 \in L^2(0,L)$, il existe une unique solution $z \in L^2(0,T;H^1(0,L)) \cap C^0([0,T];L^2(0,L))$ du problème

$$\begin{cases} z_t + z_{xxx} + z_x = 0 & \text{dans }]0,T[\times]0,L[, \\ z_{|x=0} = z_{xx|x=0} = z_{x|x=L} = 0 & \text{dans }]0,T[, \\ z_{|t=T} = z_1 & \text{dans }]0,L[\end{cases} \tag{3.23}$$

(voir Proposition 5 dans [60]). Ceci nous permet de démontrer le Théorème 11 avec des contrôles dans $H^{1/2-\varepsilon}(0,T)$ pour tout $\varepsilon > 0$.

Nous démontrons le Théorème 12 à l'aide d'un argument de point fixe. Soient $\mathcal{L} : L^2(0,L) \to L^2(0,T;H^1(0,L)) \cap C^0([0,T];L^2(0,L))$ l'opérateur qui à chaque z_1 associe la solution z de (3.23) et $\mathcal{L}_0 : L^2(0,L) \to L^2(0,L)$ l'opérateur qui associe $(Lz_1)_{|t=0}$ à chaque z_1. Ensuite, on définit $\mathcal{L}_1 : L^2(0,L) \to L^2(0,T;H^1(0,L)) \cap C^0([0,T];L^2(0,L))$ qui associe à chaque $\widehat{y}_0$ la solution w de

$$\begin{cases} w_t + w_{xxx} + w_x = 0 & \text{dans }]0,T[\times]0,L[, \\ w_{|x=0} = w_{x|x=L} = 0,\ w_{|x=L} = v & \text{dans }]0,T[, \\ w_{|t=0} = \widehat{y}_0,\ w_{|t=T} = 0 & \text{dans }]0,L[, \end{cases}$$

construite comme avant (avec $v \in H^{1/2-\varepsilon}(0,T)$). Enfin, soit $\mathcal{L}_2 : L^1(0,T;L^2(0,L)) \to L^2(0,T;H_0^1(0,L)) \cap C^0([0,T];L^2(0,L))$ l'opérateur qui associe à chaque f la solution u de

$$\begin{cases} u_t + u_{xxx} + u_x = f & \text{dans }]0,T[\times]0,L[, \\ u_{|x=0} = u_{|x=L} = u_{x|x=L} = 0 & \text{dans }]0,T[, \\ u_{|t=0} = 0 & \text{dans }]0,L[. \end{cases}$$

Notre application de point fixe est

$$\Lambda(u) := \mathcal{L}_2(-uu_x) + \mathcal{L}[y_1 + \mathcal{L}_2(uu_x)(T)] + \mathcal{L}_1[y_0 - \mathcal{L}_0(y_1 + \mathcal{L}_2(uu_x)(T))].$$

On voit facilement que $\Lambda : B(0;R) \subset L^2(0,T;H^1(0,L)) \to L^2(0,T;H^1(0,L))$ ($R > 0$ à choisir) est bien défini. Montrons que Λ est contractif et $\Lambda(B(0;R)) \subset B(0;R)$:

- Soient u_1, $u_2 \in B(0;R)$. Grâce à la continuité des opérateurs $\mathcal{L}_i$, on a

$$\|\Lambda(u_1) - \Lambda(u_2)\|_{L^2(0,T;H^1(0,L))} \leq \overline{C}\|(u_1)^2 - (u_2)^2\|_{L^2(0,T;H^1(0,L))} \leq 2R\overline{C}\|u_1 - u_2\|_{L^2(0,T;H^1(0,L))}.$$

On prend donc $R < 1/4\overline{C}$.

- Soit $u \in B(0;R)$. On a

$$\|\Lambda(u)\|_{L^2(0,T;H^1(0,L))} \leq C(\|y_0\|_{L^2(0,L)} + \|y_1\|_{L^2(0,L)} + R^2).$$

Comme $\|y_0\|_{L^2(0,L)} + \|y_1\|_{L^2(0,L)} << 1$, on a $\|\Lambda(u)\|_{L^2(0,T;H^1(0,L))} < R$.

3.5 Contrôlabilité de l'équation de KdV d'ordre 5

Notre système de travail est le problème de contrôle suivant :

$$\begin{cases} u_t + \alpha u_{5x} + \mu u_{xxx} + \beta u u_{xxx} + \delta u_x u_{xx} + P'(u) u_x = 0 & \text{dans }]0,T[\times]0,1[, \\ u_{|x=0} = u_{x|x=0} = u_{xx|x=0} = 0,\ u_{|x=1} = v_1,\ u_{x|x=1} = v_2 & \text{dans }]0,T[, \\ u_{|t=0} = u_0 & \text{dans }]0,L[, \end{cases} \tag{3.24}$$

où α, μ, β, $\delta \in \mathbb{R}$ et $P(u) := pu + qu^2 + ru^3$ $(p,q,r \in \mathbb{R})$ et v_1, v_2, les contrôles, agissent au bord $x = 1$.

Nous présentons notre résultat principal (voir [59]) :

Théorème 13. *Soit $T > 0$ et $\overline{u} \in L^\infty(0,T; W^{3,\infty}(0,L))$ une trajectoire de (3.24) avec $\overline{u}_{|x=0} = \overline{u}_{x|x=0} = \overline{u}_{xx|x=0} = 0$. Alors, il existe $\gamma > 0$ tel que pour tout $u_0 \in L^2(0,1)$ avec*

$$\|u_0 - \overline{u}_{|t=0}\|_{L^2(0,1)} \leq \gamma,$$

il existe deux contrôles v_1, v_2 tels que la solution u de (3.24) appartient à $L^2(0,T; H^2(0,1)) \cap C^0([0,T]; L^2(0,1))$ et satisfait

$$u_{|t=T} \equiv \overline{u}_{|t=T} \quad \textit{dans }]0,1[.$$

La preuve de ce théorème est divisée en deux parties :

• Contrôlabilité à zéro d'un problème linéarisé.

Nous considérons le problème de contrôle suivant :

$$\begin{cases} y_t + \alpha y_{5x} = \displaystyle\sum_{k=0}^{3} a_k(t,x) \partial_x^k y + h(t,x) & \text{dans }]0,T[\times]0,1[, \\ y_{|x=0} = y_{x|x=0} = y_{xx|x=0} = 0,\ y_{|x=1} = v_1,\ y_{x|x=1} = v_2 & \text{dans }]0,T[, \\ y_{|t=0} = y_0 & \text{dans }]0,1[, \end{cases} \tag{3.25}$$

où h et a_k sont des fonctions données. Nous regardons son problème adjoint associé :

$$\begin{cases} \varphi_t + \alpha \varphi_{5x} = \displaystyle\sum_{k=0}^{3} (-1)^{k+1} \partial_x^k (a_k(t,x)\varphi) + f(t,x) & \text{dans }]0,T[\times]0,1[, \\ \varphi_{|x=0} = \varphi_{x|x=0} = \varphi_{|x=1} = \varphi_{x|x=1} = \varphi_{xx|x=1} = 0 & \text{dans }]0,T[, \\ \varphi_{|t=T} = \varphi_T & \text{dans }]0,1[. \end{cases} \tag{3.26}$$

En utilisant des poids du type

$$\exp\left\{\frac{\eta(x)}{t^{1/4}(T-t)^{1/4}}\right\}$$

avec $\eta(x)$ convenablement choisi, nous obtenons une inégalité de Carleman :

$$\begin{aligned} &\|e^{-\kappa_0/(T-t)^{1/4}} \varphi\|_{L^2(]0,T[\times]0,1[)} + \|\varphi_{|t=0}\|_{L^2(0,1)} \leq C(\|e^{-\kappa_1/(T-t)^{1/4}} f\|_{L^2(]0,T[\times]0,1[)} \\ &+ \|(T-t)^{-1/8} e^{-\kappa_1/(T-t)^{1/4}} \varphi_{4x|x=1}\|_{L^2(0,T)} + \|(T-t)^{-3/8} e^{-\kappa_1/(T-t)^{1/4}} \varphi_{xxx|x=1}\|_{L^2(0,T)}), \end{aligned}$$

où $0 < \kappa_1 < \kappa_0$ sont deux constantes satisfaisant

$$2\kappa_0 < \kappa_1. \tag{3.27}$$

A partir de cette inégalité de Carleman, on peut démontrer un résultat de contrôlabilité à l'aide d'un argument de dualité :

Proposition 5. *Soit h tel que $(T-t)^{9/8}e^{\kappa_0/(T-t)^{1/4}}h \in L^2(]0,T[\times]0,1[)$ et $y_0 \in L^2(0,1)$. Alors, il existe v_1, $v_2 \in L^2(0,T)$ satisfaisant*

$$e^{\kappa_1/(T-t)^{1/4}}((T-t)v_1,(T-t)^{3/8}v_2) \in (L^2(0,T))^2$$

tels que la solution y de (3.25) satisfait

$$e^{\kappa_1/(T-t)^{1/4}}y \in L^2(]0,T[\times]0,1[).$$

En particulier, $y_{|t=T} \equiv 0$ dans $]0,1[$. De plus, il existe $C>0$ tel que

$$\|e^{\kappa_1/(T-t)^{1/4}}y\|_{L^2(]0,T[\times]0,1[)} \leq C(\|y_0\|_{L^2(0,1)} + \|(T-t)^{9/8}e^{\kappa_0/(T-t)^{1/4}}h\|_{L^2(]0,T[\times]0,1[)}). \tag{3.28}$$

En utilisant des propriétés de régularité (que l'on a démontrées dans [59]), nous pouvons améliorer (3.28) :

$$\begin{aligned}&\|(T-t)^{5/4}e^{\kappa_1/(T-t)^{1/4}}y\|_{L^2(0,T;H^4(0,1))\cap L^\infty(0,T;H^2(0,1))}\\ &\qquad\leq C(\|y_0\|_{H^2(0,1)} + \|(T-t)^{9/8}e^{\kappa_0/(T-t)^{1/4}}h\|_{L^2(]0,T[\times]0,1[)}).\end{aligned}$$

• Passage au problème non linéaire.

On pose $y := u - \overline{u}$, où u est la solution de (3.24). D'abord, on se ramème au cas $y_0 \in H_0^2(0,1)$. Ensuite, on remarque que le linéarisé en 0 du système satisfait par y est (3.25) avec

$$\begin{cases} a_0 := \beta\overline{u}_{xxx} + 2q\overline{u}_x + 6r\overline{u}\overline{u}_x, \\ a_1 := \delta\overline{u}_{xx} + p + 2q\overline{u} + 3r\overline{u}^2, \\ a_2 := \delta\overline{u}_x, \\ a_3 := \mu + \beta\overline{u}. \end{cases}$$

On introduit l'opérateur

$$Ly := y_t + \alpha y_{5x} - \sum_{k=0}^{3} a_k(t,x)\partial_x^k y$$

et les espaces

$$E_0 := \{y \in L^2(]0,T[\times]0,L[) : e^{\kappa_1/(T-t)^{1/4}}y \in L^2(]0,T[\times]0,1[)\},$$

$$\begin{aligned}E_1 = \{&y \in E_0 \ / \ (T-t)^{5/4}e^{\frac{\kappa_1}{(T-t)^{1/4}}}y \in L^2(0,T;H^4(0,1)) \cap C^0([0,T];H_0^2(0,1)),\\ &y_{|x=0} = y_{x|x=0} = y_{xx|x=0} = 0,\ (T-t)^{9/8}e^{\frac{\kappa_0}{(T-t)^{1/4}}}Ly \in L^2(]0,T[\times]0,1[)\}\end{aligned} \tag{3.29}$$

et

$$Y_1 := \{f \in L^2(]0,T[\times]0,1[) : (T-t)^{9/8}e^{\kappa_0/(T-t)^{1/4}}f \in L^2(]0,T[\times]0,1[)\}.$$

On introduit l'application $\Lambda : E_1 \to H_0^2(0,1) \times Y_1$ qui à chaque y associe

$$(y_{|t=0}, Ly + \beta yy_{xxx} + \delta y_x y_{xx} + (2q + 6r\overline{u})yy_x + 3r\overline{u}y^2 + 3ry^2y_x).$$

D'après la définition des espaces E_1 et Y_1 et en utilisant la propriété (3.27), on voit que Λ est bien défini et C^1. Enfin, la contrôlabilité du problème linéarisé (voir Proposition 5 ci-dessus) donne la surjectivité de $\Lambda'(0)$.

Chapitre 4

Contrôlabilité à zéro de quelques systèmes de deux équations paraboliques avec un seul contrôle

4.1 Introduction

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ($N \geq 1$) un domaine borné dont la frontière $\partial\Omega$ est régulière. Soit $T > 0$ et $\omega \subset \Omega$ l'ouvert de contrôle.

Dans cette partie du mémoire, nous nous intéressons au contrôles insensibilisants. Plus précisément, nous voulons insensibiliser une fonctionnelle associée à un système d'état, qui sera une équation parabolique linéaire. On introduit maintenant un ouvert $\mathcal{O} \subset \Omega$, que l'on appellera *observatoire* (ou ouvert d'observation).

On présente le système de travail :

$$\begin{cases} y_t - \Delta y + ay + B \cdot \nabla y = v 1_\omega + f & \text{dans }]0,T[\times\Omega, \\ y = 0 & \text{sur }]0,T[\times\partial\Omega, \\ y|_{t=0} = y_0 + \tau \widehat{y}_0 & \text{dans } \Omega. \end{cases} \tag{4.1}$$

Ici, v est le contrôle, $y_0 \in L^2(\Omega)$ est la donnée initiale et $a \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathbb{R}^N$ sont deux constantes. De plus, on suppose que $\widehat{y}_0$ est inconnu mais $\|\widehat{y}_0\|_{L^2(\Omega)} = 1$ et que τ est un nombre réel petit mais inconnu également. Alors, l'interprétation du système (4.1) est que y est la température d'un corps, v est la source de chaleur localisée (où on a accès au corps) à choisir, f est une autre source calorifique et l'état initial du corps est partiellement inconnu.

En général, la fonctionnelle J_τ que l'on aimerait insensibiliser (et que l'on appelle *sentinelle*) doit être différentiable. Dans ce cadre, l'objectif est de trouver un contrôle v tel que l'influence des données inconnues $\tau\widehat{y}_0$ ne soit pas perceptible par J_τ (voir (4.3) ci-dessous).

Dans la littérature, la fonctionnelle usuelle est donnée par la norme L^2 de l'état (voir [6], [31] ou [97], par example). Ici, nous nous intéressons à l'insensibilisation de la norme L^2 du gradient de l'état (solution de (4.1)). On introduit donc la fonctionnelle

$$J_\tau(y) = \iint_{]0,T[\times\mathcal{O}} |\nabla y|^2 \, dx \, dt \tag{4.2}$$

où y est la solution de (4.1).

L'objectif est de trouver un contrôle v tel que

$$\frac{\partial J_\tau}{\partial \tau}(y)|_{\tau=0} = 0 \quad \text{pour tout } \ \widehat{y}_0 \in L^2(\Omega) \ \text{ satisfaisant } \ \|\widehat{y}_0\|_{L^2(\Omega)} = 1. \tag{4.3}$$

Si cette propriété est satisfaite, on dira que le contrôle v insensibilise la fonctionnelle J_τ.

Les problèmes d'insensibilisation sont formulés de façon équivalente comme un problème de contrôlabilité d'un système en cascade (voir, par example, [87] et [6] pour une déduction rigoureuse de ceci). En effet, si l'on considère l'état adjoint de (4.1), il est facile de voir que la condition (4.3) est équivalente à $w|_{t=0} \equiv 0$ dans Ω, où w est z satisfont

$$\begin{cases} z_t - \Delta z + az + B \cdot \nabla z = v1_\omega + f & \text{dans }]0,T[\times\Omega, \\ -w_t - \Delta w + aw - B \cdot \nabla w = \nabla \cdot (\nabla z 1_{\mathcal{O}}) & \text{dans }]0,T[\times\Omega, \\ z = 0,\ w = 0 & \text{sur }]0,T[\times\partial\Omega, \\ z|_{t=0} = y_0,\ w|_{t=T} = 0 & \text{dans } \Omega. \end{cases} \tag{4.4}$$

Ici, on a utilisé la notation $z \equiv y|_{\tau=0}$. Supposons que $y_0 \in L^2(\Omega)$ et $f,\, v \in L^2(]0,T[\times\Omega)$. Alors, on peut démontrer qu'il existe un seule solution (z,w) de (4.4) qui appartient à $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))^2$ et qui dépend continûment de (y_0,f,v) dans $L^2(\Omega)\times L^2(]0,T[\times\Omega)^2$.

J.-L. Lions [88] a été le premier à étudier ce type de problèmes. Dans cette référence il présente ce problème pour des équations paraboliques d'ordre 2 et 4 et pour le système de Navier-Stokes. Comme on a avancé ci-dessus, tous les résultats connus concernent la fonctionnelle $\tilde{J}_\tau(y) = \|y\|^2_{L^2(]0,T[\times\mathcal{O})}$ avec y solution d'une équation parabolique. Dans [6], les auteurs montrent l'existence de contrôles ε-insensibilisant (c'est-à-dire, tels que $|\tilde{J}'_\tau(y)|_{\tau=0}| \leq \varepsilon$) pour les solutions d'une équation de la chaleur semi linéaire avec des non linéarités C^1 et globalement Lipschitziennes. L'existence de contrôles insensibilisants pour le même système est montré dans [31]. Pour une extension à des non linéarités plus générales, voir [7] et ses références.

Comme on verra dans l'énoncé de notre résultat principal (Théorème 14 ci-dessous), on prendra $y_0 \equiv 0$. Pour une justification de ceci et le choix possible de conditions initiales plus générales, voir [31].

Dans ce chapitre on supposera que $\omega \cap \mathcal{O} \neq \emptyset$. Cette condition a toujours été imposée dans les problèmes d'insensibilisation. Récemment, l'existence de contrôles ε-insensibilisant pour l'équation de la chaleur linéaire a été démontrée pour la fonctionnelle $\tilde{J}_\tau$, sans imposer cette condition (voir [32]).

Le résultat de contrôlabilité pour le système (4.4) est donné dans le théorème suivant ([66]) :

Théorème 14. *Soit $m > 3$ et $y_0 \equiv 0$. Alors, il existe une constante $K_0 > 0$ qui dépend de $\Omega,\omega,\mathcal{O},T,a$ et B telle que pour tout $f \in L^2(]0,T[\times\Omega)$ satisfaisant $\|e^{K_0/t^m} f\|_{L^2(]0,T[\times\Omega)} < +\infty$, il existe un contrôle v tel que la solution (w,z) de (4.4) satisfait $w|_{t=0} \equiv 0$ dans Ω.*

Corollaire 2. *Il existe des contrôles insensibilisants v pour la fonctionnelle J_τ donnée par* (4.2).

Expliquons brièvement les difficultées du résultat de contrôlabilité pour le système (4.4). Pour faire cela, on introduit le système adjoint associé :

$$\begin{cases} -\psi_t - \Delta\psi + a\psi - B \cdot \nabla\psi = \nabla \cdot ((\nabla\varphi) 1_{\mathcal{O}}) & \text{dans }]0,T[\times\Omega, \\ \varphi_t - \Delta\varphi + a\varphi + B \cdot \nabla\varphi = 0 & \text{dans }]0,T[\times\Omega, \\ \psi = 0,\ \varphi = 0 & \text{sur }]0,T[\times\partial\Omega, \\ \psi|_{t=T} = 0,\ \varphi|_{t=0} = \varphi^0 & \text{dans } \Omega. \end{cases} \tag{4.5}$$

Le résultat que l'on veut démontrer pour le système (4.4) est équivalent à l'inégalité d'observabilité suivante :

$$\iint_Q e^{-K_0/t^m} |\varphi|^2 \, dx \, dt \leq C \iint_{]0,T[\times\omega} |\psi|^2 \, dx \, dt, \tag{4.6}$$

où $m > 0$ et C et K_0 sont deux constantes positives qui dépendent de $\Omega,\omega,\mathcal{O},T$, a et B mais indépendantes de φ^0. L'idée principale que l'on utilise souvent pour démontrer (4.6) est une combinaison d'inégalités d'observabilité pour ψ et pour φ (comme solutions d'équations paraboliques) et essayer d'éliminer le terme local (distribué dans $]0,T[\times\omega$) de φ. La difficulté que l'on rencontre ici pour le système (4.5) est l'obtention de

$$\iint_{]0,T[\times\tilde{\omega}} |\varphi|^2 \, dx \, dt \leq C \iint_{]0,T[\times\omega} |\Delta\varphi|^2 \, dx \, dt, \quad \tilde{\omega} \subset \omega \cap \mathcal{O}$$

en utilisant juste des arguments locaux car on peut toujours supposer que ω ne touche pas $\partial\Omega$.

Cela veut dire que l'on doit trouver une autre façon d'estimer localement φ en fonction de ψ. L'idée que l'on suit est d'abord d'obtenir une inégalité d'observabilité de la forme

$$\iint_{]0,T[\times\Omega} e^{-K_1/t^m}|\varphi|^2\,dx\,dt \le C\iint_{]0,T[\times\omega}|\Delta\varphi|^2\,dx\,dt. \tag{4.7}$$

La raison pour laquelle une telle estimation n'est par triviale à obtenir est dû au fait que les conditions au bord de $\Delta\varphi$ ne sont pas prescrites.

• Le second résultat de ce chapitre est un résultat de contrôlabilité pour des équations paraboliques couplées. Quant à la littérature sur la contrôlabilité d'équations paraboliques fortement couplées, un résultat local a été démontré pour le système de champs de phase dans [4], et la version globale a été démontrée ultérieurement dans [1]. Pour d'autres systèmes paraboliques avec un seul contrôle, voir [2] et [62].

Ici, on sera juste intéressé par la contrôlabilité de systèmes de deux équations paraboliques où les termes de couplage sont des dérivées d'ordre 1 dans une équation et d'ordre 2 dans l'autre, l'objectif étant d'agir sur une seule équation mais d'amener les deux à zéro au temps $t = T$.

Nous considérons ici le cas où le contrôle est dans l'équation avec le terme de couplage d'ordre inférieur :

$$\begin{cases} w_t - \Delta w + cw + E\cdot\nabla w = P_2(t,x;D)(z\,\theta_2) & \text{dans }]0,T[\times\Omega,\\ z_t - \Delta z + hz + K\cdot\nabla z = P_1(t,x;D)(w\,\theta_1) + v1_\omega & \text{dans }]0,T[\times\Omega,\\ w = z = 0 & \text{sur }]0,T[\times\partial\Omega,\\ w|_{t=0} = w^0, \quad z|_{t=0} = z^0 & \text{dans } \Omega, \end{cases} \tag{4.8}$$

où c, E, h et K sont constants et $P_i(t,x;D)$ $(i = 1,2)$ est un opérateur différentiel d'ordre i dans les variables spatiales tel que

$$P_i(t,x;D)u = \sum_{|\beta|\le i} m_{i,\beta}(t,x)\partial_x^\beta u, \quad m_{i,\beta}\in L^\infty(0,T;W^{2/i,\infty}(\Omega)) \tag{4.9}$$

(c'est-à-dire, $m_{2,\beta}$, $\partial_x(m_{2,\beta})$, $m_{1,\beta}$, $\partial_x(m_{1,\beta})$, $\partial_x^2(m_{1,\beta}) \in L^\infty(Q)$). Dans (4.8), $\theta_i \in C^2(\overline{\Omega})$ $(1 \le i \le 2)$. On suppose qu'il existe un ouvert non vide $\omega_2 \subset \omega$ et une constante $C > 0$ tels que $|\theta_2| \ge C > 0$ dans ω_2. En particulier, on peut prendre θ_1 et θ_2 avec un support aussi petit que l'on veut (on peut aussi prendre $\theta_1 \equiv \theta_2 \equiv 1$ dans Ω, ce qui est la meilleure situation possible).

L'objectif est d'amener w et z à zéro au temps T à l'aide d'un contrôle v. On considère donc le système adjoint associé :

$$\begin{cases} -\varphi_t - \Delta\varphi + c\varphi - E\cdot\nabla\varphi = (P_1^*(t,x;D)\psi)\theta_1 & \text{dans }]0,T[\times\Omega,\\ -\psi_t - \Delta\psi + h\psi - K\cdot\nabla\psi = (P_2^*(t,x;D)\varphi)\theta_2 & \text{dans }]0,T[\times\Omega,\\ \varphi = \psi = 0 & \text{sur }]0,T[\times\partial\Omega,\\ \varphi|_{t=T} = \varphi^0, \quad \psi|_{t=T} = \psi^0 & \text{dans } \Omega, \end{cases} \tag{4.10}$$

où P_1^* et P_2^* sont les opérateurs adjoints de P_1 et P_2, respectivement.

La propriété de contrôlabilité précédente est équivalente à l'inégalité d'observabilité :

$$\|\varphi|_{t=0}\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\psi|_{t=0}\|^2_{L^2(\Omega)} \le C\iint_{]0,T[\times\omega}|\psi|^2\,dx\,dt,$$

avec $C = C(\Omega,\omega,T) > 0$ indépendant de (φ^0,ψ^0).

Pour démontrer ceci, on doit faire quelques hypothèses sur l'opérateur P_2 :

$$m_{2,\beta} \ \text{ sont constants} \tag{4.11}$$

et

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \le C\|P_2^*u\|_{L^2(\Omega)} \quad \forall u\in H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega), \tag{4.12}$$

pour une certaine constante $C = C(\Omega) > 0$.

Théorème 15. *Supposons que les conditions* (4.11)-(4.12) *sont satisfaites. Alors, il existe un contrôle* v *tel que la solution de* (4.8) *satisfait* $w|_{t=T} \equiv z|_{t=T} \equiv 0$ *dans* Ω.

Pour le cas d'un contrôle dans l'équation où le terme de couplage est d'ordre 2, on renvoie le lecteur à [66].

4.2 Contrôles insensibilisants

Comme on l'avait annoncé dans l'introduction, l'existence de contrôles insensibilisants est réduite à la contrôlabilité à zéro du système (4.4), c'est-à-dire, le Théorème 14.

Le problème adjoint associé est le suivant :

$$\begin{cases} -\psi_t - \Delta\psi + a\psi - B\cdot\nabla\psi = \nabla\cdot((\nabla\varphi)1_{\mathcal{O}}) & \text{dans }]0,T[\times\Omega, \\ \varphi_t - \Delta\varphi + a\varphi + B\cdot\nabla\varphi = 0 & \text{dans }]0,T[\times\Omega, \\ \psi = 0,\ \varphi = 0 & \text{sur }]0,T[\times\partial\Omega, \\ \psi|_{t=T} = 0,\ \varphi|_{t=0} = \varphi^0 & \text{dans } \Omega, \end{cases} \tag{4.13}$$

où $\varphi^0 \in L^2(\Omega)$. Il est classique de voir que la contrôlabilité à zéro du système (4.4) est équivalente à l'inégalité d'observabilité suivante :

$$\iint_Q e^{-K_0/t^m}|\varphi|^2\,dx\,dt \leq C\iint_{]0,T[\times\omega}|\psi|^2\,dx\,dt, \tag{4.14}$$

où $m > 0$ et K_0 et C sont deux constantes positives indépendantes de φ^0.

Pour la preuve de (4.14), on suivra une approche classique, consistant à obtenir une inégalité de Carleman. On définit donc quelques fonctions poids :

$$\begin{gathered} \alpha_m(x,t) = \frac{\exp\{\frac{k(m+1)}{m}\lambda\|\eta^0\|_\infty\} - \exp\{\lambda(k\|\eta^0\|_\infty + \eta^0(x))\}}{t^m(T-t)^m}, \\ \alpha_m^*(t) = \max_{x\in\overline{\Omega}}\alpha_m(x,t) = \alpha_m|_{\partial\Omega}(x,t), \quad \xi_m(x,t) = \frac{e^{\lambda(k\|\eta^0\|_\infty + \eta^0(x))}}{t^m(T-t)^m}, \\ \xi_m^*(t) = \min_{x\in\overline{\Omega}}\xi_m(x,t) = \xi_m|_{\partial\Omega}(x,t), \end{gathered} \tag{4.15}$$

où $m > 3$ et $k > m$. Ici, $\eta^0 \in C^2(\overline{\Omega})$ satisfait

$$|\nabla\eta^0| \geq C > 0 \ \text{ dans } \Omega\setminus\overline{\omega_0}, \quad \eta^0 > 0 \ \text{ dans } \Omega \quad \text{et} \quad \eta^0 \equiv 0 \ \text{ sur } \partial\Omega, \tag{4.16}$$

avec $\emptyset \neq \omega_0 \subset \omega\cap\mathcal{O}$ un ouvert. La preuve de l'existence d'une telle fonction est faite dans [52]. Les fonctions poids (4.15) ont déjà été considérées dans [47].

Pour $s, \lambda > 0$ deux paramètres, on définit la quantité suivante :

$$\begin{aligned} I(s,\lambda;g) := {}& s^{-1}\iint_{]0,T[\times\Omega} e^{-2s\alpha_m}\xi_m^{-1}\left(|g_t|^2 + |\Delta g|^2\right)dx\,dt \\ & + s\lambda^2\iint_{]0,T[\times\Omega} e^{-2s\alpha_m}\xi_m|\nabla g|^2\,dx\,dt + s^3\lambda^4\iint_{]0,T[\times\Omega} e^{-2s\alpha_m}\xi_m^3|g|^2\,dx\,dt. \end{aligned} \tag{4.17}$$

On désignera par $I_w(s,\lambda,\cdot)$ les deux derniers termes de l'expression de $I(s,\lambda,\cdot)$.

On peut démontrer le résultat suivant :

Proposition 6. *Il existe une constante positive* C *qui ne dépend que de* Ω, *de* ω *et de* T *telle que*

$$\begin{aligned} I_w(\Delta\varphi) + s^2\lambda^4\iint_{]0,T[\times\Omega} e^{-3s\alpha_m}\xi_m^2(s^2\lambda^2\xi_m^2|\psi|^2 + |\nabla\psi|^2)\,dx\,dt \\ \leq C(1+T^2)s^7\lambda^8\iint_{]0,T[\times\omega} e^{-2s\alpha_m}\xi_m^7|\psi|^2\,dx\,dt, \end{aligned} \tag{4.18}$$

pour tout $\lambda \geq C$ et tout $s \geq C(T^{2m} + T^m)$.

Remarque 4.1. *A partir de l'inégalité de Carleman* (4.18)*, on peut obtenir l'inégalité d'observabilité* (4.14) *de manière assez directe. En effet, il suffit de combiner $\psi|_{t=T} \equiv 0$ avec la dissipation de $\|\nabla\varphi(t)\|_{L^2(\Omega)}$.*

La preuve de la Proposition 6 est divisée en deux parties. Dans la première, on ne travaille que avec l'équation de φ (qui est indépendante de ψ). Dans la seconde, on combine les deux équations pour conclure l'inégalité cherchée (4.18).

Le premier résultat est le suivant

Lemme 1. *Il existe une constante positive C qui dépend de Ω et de ω_0 telle que*

$$I_w(\Delta\varphi) \leq Cs^3\lambda^4 \iint_{]0,T[\times\omega_0} e^{-2s\alpha_m}\xi_m^3|\Delta\varphi|^2\,dx\,dt, \tag{4.19}$$

pour tout $\lambda \geq C$ et tout $s \geq C(T^{2m} + T^m)$.

Remarque 4.2. *En particulier, cette inégalité nous donne la propriété de continuation unique :*

$$\Delta\varphi = 0 \quad dans\ ]0,T[\times\omega_0 \Rightarrow \varphi \equiv 0 \quad dans\ ]0,T[\times\Omega. \tag{4.20}$$

Il semble que le fait que la propriété (4.20) *puisse être quantifiée par l'intermédiaire d'une inégalité (comme, par exemple,* (4.19)*) n'était pas connu. D'un autre côté, nous ne savons pas si* (4.20) *est vrai lorsque a et B dépendent de la variable spatiale.*

La preuve du Lemme 1 est basée sur une inégalité de Carleman pour l'équation satisfaite par $\Delta\varphi$:

$$(\Delta\varphi)_t - \Delta(\Delta\varphi) + a\Delta\varphi + B\cdot\nabla\Delta\varphi = 0 \quad \text{dans }]0,T[\times\Omega.$$

L'inégalité suivante a été démontrée dans [45] :

$$I_w(\Delta\varphi) \leq C\left(s^3\lambda^4\iint_{]0,T[\times\omega_0} e^{-2s\alpha_m}\xi_m^3|\Delta\varphi|^2\,dx\,dt + s\lambda\iint_{]0,T[\times\partial\Omega} e^{-2s\alpha_m^*}\xi_m^*\left|\frac{\partial}{\partial n}\Delta\varphi\right|^2 dx\,dt\right),$$

pour tout $\lambda \geq C$ et tout $s \geq C(T^{2m} + T^m)$. Il reste à estimer le terme frontière. Pour ce faire, nous définissons la fonction

$$\varphi^* := (s\lambda)^{1/2}e^{-s\alpha_m^*}(\xi_m^*)^{1/2}\varphi$$

et nous estimons sa norme $L^2(0,T;H^{7/2+\varepsilon}(\Omega))$ $(\varepsilon > 0)$, en fonction de quelques termes qui peuvent être absorbés par $I_w(\Delta\varphi)$ en choisissant $\lambda \geq C$ et $s \geq C(T^m + T^{2m})$. Dans cette preuve, le fait que $m > 3$ dans (4.15) est essentiel. Tous les détails peuvent être trouvés dans [66].

Pour le deuxième résultat, on applique l'inégalité de Carleman établie dans [79] à ψ (on regarde $\nabla\cdot((\nabla\varphi)1_{\mathcal{O}})$ comme un terme dans $L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$) et on trouve :

Lemme 2. *Soit $\widehat{\alpha}_m(t) = \min_{x\in\overline{\Omega}}\alpha_m(x,t)$ et $\widehat{\xi}_m(t) = \max_{x\in\overline{\Omega}}\xi_m(x,t)$. On a*

$$\begin{aligned} &s^4\lambda^6\iint_{]0,T[\times\Omega} e^{-3s\alpha_m}\xi_m^4|\psi|^2\,dx\,dt + s^2\lambda^4\iint_{]0,T[\times\Omega} e^{-3s\alpha_m}\xi_m^2|\nabla\psi|^2\,dx\,dt \\ &\qquad \leq C\left(s^4\lambda^6\iint_{]0,T[\times\omega_0} e^{-3s\alpha_m}\xi_m^4|\psi|^2\,dx\,dt + s^3\lambda^4\iint_{]0,T[\times\mathcal{O}} e^{-3s\alpha_m}\xi_m^3|\nabla\varphi|^2\,dx\,dt\right), \end{aligned}$$

pour $\lambda \geq C$.

Il suffit enfin de combiner cette inégalité avec (4.19) et utiliser quelques techniques de localisation classiques pour obtenir l'estimation désirée (4.18).

4.3 Résultat de contrôlabilité pour deux équations paraboliques couplées

Dans ce paragraphe on donne quelques idées de la preuve du Théorème 15. Par simplicité on appellera toujours η^0 la fonction définie dans (4.16) et l'ouvert ω_0 sera strictement contenu dans ω_2 (qui était lui même contenu dans ω).

On rappelle le système de travail (voir (4.10)) :

$$\begin{cases} -\varphi_t - \Delta\varphi + c\varphi - E\cdot\nabla\varphi = (P_1^*(t,x;D)\psi)\theta_1 & \text{dans }]0,T[\times\Omega, \\ -\psi_t - \Delta\psi + h\psi - K\cdot\nabla\psi = (P_2^*\varphi)\theta_2 & \text{dans }]0,T[\times\Omega, \\ \varphi = \psi = 0 & \text{sur }]0,T[\times\partial\Omega, \\ \varphi|_{t=T} = \varphi^0, \quad \psi|_{t=T} = \psi^0 & \text{dans } \Omega. \end{cases} \tag{4.21}$$

D'après (4.11), P_2^* est un opérateur différentiel d'ordre 2 en espace avec coefficients constants.

Pour démontrer le Théorème 15, il suffit d'établir l'inégalité d'observabilité suivante pour les solutions de (4.21) :

Proposition 7. *Il existe $C(\Omega,\omega,T)>0$ indépendant de (φ^0,ψ^0) tel que*

$$\|\varphi|_{t=0}\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\psi|_{t=0}\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C \iint_{]0,T[\times\omega} |\psi|^2\,dx\,dt. \tag{4.22}$$

Comme dans la section précédente, la stratégie que l'on suit est d'établir une inégalité de Carleman pour les solutions du système (4.21) :

Lemme 3. *Il existe une constante positive $C(\Omega,\omega)$ telle que*

$$\begin{aligned} I_w(P_2^*\varphi) + s^6\lambda^8 \iint_{]0,T[\times\Omega} e^{-2s\alpha_m}\xi_m^6|\psi|^2\,dx\,dt \\ \leq C(1+T^2)s^{10}\lambda^8 \iint_{]0,T[\times\omega} e^{-6s\alpha_m+4s\alpha_m^*}\xi_m^{10}|\psi|^2\,dx\,dt \end{aligned} \tag{4.23}$$

pour tout $\lambda \geq C$ et tout $s \geq C(T^{2m}+T^m)$.

Grâce à (4.12), l'inégalité d'observabilité (4.22) est une conséquence directe de (4.23).

Comme pour le Lemme 1, la première étape consiste à travailler avec l'équation satisfaite par $P_2^*\varphi$:

$$(P_2^*\varphi)_t + \Delta(P_2^*\varphi) + cP_2^*\varphi + E\cdot\nabla(P_2^*\varphi) = P_2^*((P_1^*(t,x;D)\psi)\theta_1) \quad \text{dans }]0,T[\times\Omega.$$

On obtient le résultat suivant :

Lemme 4. *L'inégalité suivante est satisfaite :*

$$\begin{aligned} I_w(P_2^*\varphi) \leq C \Bigg(& s^3\lambda^4 \iint_{]0,T[\times\omega_0} e^{-2s\alpha_m}\xi_m^3|P_2^*\varphi|^2\,dx\,dt \\ & + s^{1-2/m}\lambda^2 \int_0^T e^{-2s\alpha_m^*}(\xi_m^*)^{1-2/m}\|(P_1^*(t,x;D)\psi)\theta_1)\|^2_{H^2(\Omega)}\,dt \\ & + s^2\lambda^2 \iint_{]0,T[\times\Omega} e^{-2s\alpha_m}\xi_m^2(|\Delta\psi|^2+|\nabla\psi|^2+|\psi|^2)\,dx\,dt \Bigg), \end{aligned} \tag{4.24}$$

pour tout $\lambda \geq C$ et tout $s \geq C(T^{2m}+T^m)$.

Ensuite, on applique l'inégalité de Carleman avec second membre dans $L^2(]0,T[\times\Omega)$ démontrée dans [52] à la fonction ψ :

$$s^6\lambda^8 \iint_{]0,T[\times\Omega} e^{-2s\alpha_m}\xi_m^6|\psi|^2\,dx\,dt + s^4\lambda^6 \iint_{]0,T[\times\Omega} e^{-2s\alpha_m}\xi_m^4|\nabla\psi|^2\,dx\,dt$$

$$+s^2\lambda^4 \iint_{]0,T[\times\Omega} e^{-2s\alpha_m}\xi_m^2|\Delta\psi|^2\,dx\,dt \leq C\left(s^6\lambda^8 \iint_{]0,T[\times\omega_0} e^{-2s\alpha_m}\xi_m^6|\psi|^2\,dx\,dt\right.$$

$$\left.+s^3\lambda^4 \iint_{]0,T[\times\Omega} e^{-2s\alpha_m}\xi_m^3|P_2^*\varphi|^2\,dx\,dt\right),$$

pour tout $\lambda \geq C$ et tout $s \geq C(T^{2m}+T^{2m-1})$.

Finalement, on combine cette inégalité avec (4.24) et on utilise des résultats de régularité pour les équations paraboliques. Ceci abouti à (4.23).

Chapitre 5

Contrôlabilité de systèmes d'équations de Stokes : existence de contrôles insensibilisants

5.1 Introduction

Comme dans le chapitre précédent, on considère $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ($N = 2$ or 3) un domaine régulier et borné. Soit $T > 0$ et $\omega \subset \Omega$ l'ouvert de contrôle.

On rappelle la définition de quelques espaces habituels dans le contexte des fluides incompressibles :

$$V = \left\{ y \in H_0^1(\Omega)^N : \nabla \cdot y = 0 \text{ dans } \Omega \right\}$$

et

$$H = \{ y \in L^2(\Omega)^N : \nabla \cdot y = 0 \text{ dans } \Omega,\ y \cdot n = 0 \text{ sur } \partial\Omega \}. \tag{5.1}$$

• Les deux premiers résultats importants de ce chapitre concernent l'existence de contrôles insensibilisants. Plus précisément, nous voulons insensibiliser deux fonctionnelles associées à un état qui sera solution d'un système de Stokes avec condition au bord de type Dirichlet homogène. Pour ce faire, on pose $\mathcal{O} \subset \Omega$ l'observatoire qui satisfait $\mathcal{O} \cap \omega \neq \emptyset$.

Le système d'état est l'équation de Stokes avec termes d'ordre 0 et 1 :

$$\begin{cases} y_t - \Delta y + ay + B \cdot \nabla y + \nabla p = v1_\omega + f, \quad \nabla \cdot y = 0 & \text{dans }]0, T[\times\Omega, \\ y = 0 & \text{sur }]0, T[\times\partial\Omega, \\ y|_{t=0} = y_0 + \tau \widehat{y}_0 & \text{dans } \Omega. \end{cases} \tag{5.2}$$

Ici, v est le contrôle, $y_0 \in L^2(\Omega)^N$ et $a \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathbb{R}^N$ sont constants. De plus, on suppose que $\widehat{y}_0$ est inconnu mais avec $\|\widehat{y}_0\|_{L^2(\Omega)^N} = 1$ et que τ est un nombre réel petit. Alors, l'interprétation du système (5.2) est que y est la vitesse des particules d'un fluide incompressible, v est la source localisée (où on a accès au fluide), et f est une autre source ; enfin, la donnée initiale du fluide est partiellement connue.

Comme on avait dit dans le chapitre précédent, la fonctionnelle (à insensibiliser) la plus utilisée dans la littérature est la norme L^2 de l'état. Ici, nous nous intéressons à l'insensibilisation de deux fonctionnelles correspondantes à la norme L^2 de l'état (solution de (5.2)) et à la norme L^2 de son rotationnel ($\nabla \times y$). On introduit les fonctionnelles :

$$J_{1,\tau}(y) = \iint_{]0,T[\times\mathcal{O}} |y|^2 \, dx \, dt \tag{5.3}$$

et

$$J_{2,\tau}(y) = \iint_{]0,T[\times\mathcal{O}} |\nabla \times y|^2 \, dx \, dt, \tag{5.4}$$

où y est la solution de (5.2).

Notre objectif est de trouver un contrôle v_i tel que

$$\frac{\partial J_{i,\tau}}{\partial \tau}(y_i)|_{\tau=0} = 0 \quad \text{pour tout } \widehat{y}_0 \in L^2(\Omega)^N \quad \text{tel que } \|\widehat{y}_0\|_{L^2(\Omega)^N} = 1, \tag{5.5}$$

pour $i = 1, 2$, où y_i est la solution de (5.2) associée à v_i.

On peut démontrer que la condition (5.5) est équivalente à $z|_{t=0} \equiv 0$ dans Ω, où z et w satisfont

$$\begin{cases} w_t - \Delta w + aw + B \cdot \nabla w + \nabla p^0 = v1_\omega + f, \quad \nabla \cdot w = 0 & \text{dans }]0,T[\times\Omega, \\ -z_t - \Delta z + az - B \cdot \nabla z + \nabla q = w1_{\mathcal{O}}, \quad \nabla \cdot z = 0 & \text{dans }]0,T[\times\Omega, \\ w = 0, \ z = 0 & \text{sur }]0,T[\times\partial\Omega, \\ w|_{t=0} = y_0, \ z|_{t=T} = 0 & \text{dans } \Omega \end{cases} \tag{5.6}$$

pour J_1 et

$$\begin{cases} w_t - \Delta w + aw + B \cdot \nabla w + \nabla p^0 = v1_\omega + f, \quad \nabla \cdot w = 0 & \text{dans }]0,T[\times\Omega, \\ -z_t - \Delta z + az - B \cdot \nabla z + \nabla q = \nabla \times ((\nabla \times w)1_{\mathcal{O}}), \quad \nabla \cdot z = 0 & \text{dans }]0,T[\times\Omega, \\ w = 0, \ z = 0 & \text{sur }]0,T[\times\partial\Omega, \\ w|_{t=0} = y_0, \ z|_{t=T} = 0 & \text{dans } \Omega \end{cases} \tag{5.7}$$

pour J_2. Ici, on a utilisé la notation $w \equiv y|_{\tau=0}$ et $p^0 \equiv p|_{\tau=0}$.

La contrôlabilité à zéro du système (5.6) est donnée dans le théorème suivant :

Théorème 16. *Soit $m > 3$ et $y_0 \equiv 0$. Alors, il existe une constante $\overline{C} > 0$ qui ne dépend que de $\Omega, \omega, \mathcal{O}, T, a$ et B telle que pour tout $f \in L^2(]0,T[\times\Omega)^N$ satisfaisant $\|e^{\overline{C}/t^m} f\|_{L^2(]0,T[\times\Omega)^N} < +\infty$, il existe un contrôle v_1 tel que la solution (w, p^0, z, q) de* (5.6) *satisfait $z|_{t=0} \equiv 0$ dans Ω.*

On présente maintenant le résultat pour le système (5.7) :

Théorème 17. *Sous les mêmes hypothèses du Théorème 16, il existe un contrôle v_2 tel que la solution (w, p^0, z, q) de* (5.7) *satisfait $z|_{t=0} \equiv 0$ dans Ω.*

On donnera les idées de leur preuve dans les paragraphes suivants.

• D'autres résultats concernant deux systèmes de type Stokes couplés peuvent être obtenus en utilisant des techniques analogues à celles des preuves des deux théorèmes précédents.

On considère d'abord un problème où le couplage dans l'équation contrôlée est fait à travers un opérateur d'ordre 2 :

$$\begin{cases} y_t - \Delta y + P_1(x,t;D)y + \nabla p = v1_\omega + P_2(x,t;D)z & \text{dans }]0,T[\times\Omega, \\ z_t - \Delta z + e_0 z - (E_0 \cdot \nabla)z + \nabla q = m_0 \nabla \times y & \text{dans }]0,T[\times\Omega, \\ \nabla \cdot y = 0, \quad \nabla \cdot z = 0 & \text{dans }]0,T[\times\Omega, \\ y = 0, \ z = 0 & \text{sur }]0,T[\times\partial\Omega, \\ y|_{t=0} = y_0, \ z|_{t=0} = z^0 & \text{dans } \Omega, \end{cases} \tag{5.8}$$

où y_0, $z^0 \in H$, e_0, $m_0 \in \mathbb{R}$, $E_0 \in \mathbb{R}^N$ et $P_j(x,t;D)$ est un opérateur différentiel général d'ordre $j = 1, 2$ avec coefficients lipschitziens.

D'un autre côté, soit $Q_1(t,x;D)$ un opérateur différentiel général d'ordre 1 avec coefficients dans $L^\infty(0,T;W^{3,\infty}(\Omega)^N)$. On considère le système suivant :

$$\begin{cases} y_t - \Delta y + P_1(t,x;D)y + \nabla p = v1_\omega + Q_1(t,x;D)z & \text{dans }]0,T[\times\Omega, \\ z_t - \Delta z + e_1 z - (E_1 \cdot \nabla)z + \nabla q = m_1 \Delta y & \text{dans }]0,T[\times\Omega, \\ \nabla \cdot y = 0, \quad \nabla \cdot z = 0 & \text{dans }]0,T[\times\Omega, \\ y = 0, \ z = 0 & \text{sur }]0,T[\times\partial\Omega, \\ y|_{t=0} = y_0, \ z|_{t=0} = z^0 & \text{dans } \Omega, \end{cases} \tag{5.9}$$

où y_0, $z^0 \in H$, e_1, $m_1 \in \mathbb{R}$ et $E_1 \in \mathbb{R}^N$.

Dans les deux cas, l'objectif est de trouver un contrôle v tel que

$$y|_{t=T} = 0, \quad z|_{t=T} = 0 \quad \text{dans } \Omega. \tag{5.10}$$

La contrôlabilité à zéro du système de Stokes a été démontrée dans [76] comme résultat auxiliaire pour établir la contrôlabilité locale du système de Navier-Stokes. Ce résultat a été amélioré dans [?]. Par contre, il semble que nos résultats sont les premiers qui concernent des systèmes de Stokes couplés.

Nous énonçons maintenant les résultats pour les systèmes (5.8) et (5.9) :

Théorème 18. *Soit y_0, $z^0 \in H$. Supposons que les coefficients des opérateurs différentiels P_1 et P_2 sont dans $L^\infty(0,T;W^{2,\infty}(\Omega))$. Alors, il existe un contrôle $v \in L^2(]0,T[\times\Omega)^N$ tel que la solution (y,p,z,q) du système* (5.8) *satisfait* (5.10)*.*

Théorème 19. *Soit y_0, $z^0 \in H$. Supposons que les coefficients de l'opérateur P_1 satisfont les hypothèses du Théorème 18 et les coefficients de Q_1 appartiennent à $L^\infty(0,T;W^{3,\infty}(\Omega)^N)$. Alors, il existe un contrôle $v \in L^2(]0,T[\times\Omega)^N$ tel que la solution (y,p,z,q) du système* (5.9) *satisfait* (5.10)*.*

Pour les preuves des Théorèmes 18 et 19 ainsi que pour quelques remarques concernant des extensions de ces résultats, on renvoie le lecteur à [67].

5.2 Contrôles insensibilisants pour le système de Stokes

Considérons les problèmes adjoints correspondant aux problèmes (5.6) et (5.7)

$$\begin{cases} -\varphi_t - \Delta\varphi + a\varphi - B\cdot\nabla\varphi + \nabla\pi = \psi 1_{\mathcal{O}}, \quad \nabla\cdot\varphi = 0 & \text{dans }]0,T[\times\Omega, \\ \psi_t - \Delta\psi + a\psi + B\cdot\nabla\psi + \nabla h = 0, \quad \nabla\cdot\psi = 0 & \text{dans }]0,T[\times\Omega, \\ \varphi = 0, \ \psi = 0 & \text{sur }]0,T[\times\partial\Omega, \\ \varphi|_{t=T} = 0, \ \psi|_{t=0} = \psi^0 & \text{dans } \Omega \end{cases} \tag{5.11}$$

et

$$\begin{cases} -\varphi_t - \Delta\varphi + a\varphi - B\cdot\nabla\varphi + \nabla\pi = \nabla\times((\nabla\times\psi)1_{\mathcal{O}}), \quad \nabla\cdot\varphi = 0 & \text{dans }]0,T[\times\Omega, \\ \psi_t - \Delta\psi + a\psi + B\cdot\nabla\psi + \nabla h = 0, \quad \nabla\cdot\psi = 0 & \text{dans }]0,T[\times\Omega, \\ \varphi = 0, \ \psi = 0 & \text{sur }]0,T[\times\partial\Omega, \\ \varphi|_{t=T} = 0, \ \psi|_{t=0} = \psi^0 & \text{dans } \Omega, \end{cases} \tag{5.12}$$

où $\psi^0 \in L^2(\Omega)^N$. Il est bien connu que la contrôlabilité à zéro des systèmes (5.6) et (5.7) est impliquée par l'inégalité d'observabilité suivante pour les solutions de (5.11) et (5.12) respectivement :

$$\iint_{]0,T[\times\Omega} e^{-C_2/t^m}|\varphi|^2\,dx\,dt \le C\iint_{]0,T[\times\omega}|\varphi|^2\,dx\,dt, \tag{5.13}$$

pour quelques constantes positives C_2, C et m indépendantes de ψ^0.

Avec ces notations, on peut démontrer le résultat suivant :

Proposition 8. *Il existe une constante positive C qui dépend de Ω, ω et T telle que*

$$\tilde{I}(s,\lambda;\psi) + s^2\lambda^4\iint_{]0,T[\times\Omega}(se^{-3s\alpha}\xi^3|\varphi|^2 + e^{-3s\alpha^*}(\xi^*)^{2-1/m}|\nabla\varphi|^2)\,dx\,dt \le CE(s,\lambda;\varphi) \tag{5.14}$$

pour tout s, $\lambda \ge C$, où $\tilde{I}(s,\lambda;\psi) = I_0(s,\lambda;\nabla\times\psi)$ et

$$E(s,\lambda;\varphi) = s^{15}\lambda^{16}\iint_{]0,T[\times\omega} e^{-s\alpha}\xi^{15}|\varphi|^2\,dx\,dt$$

pour les solutions du système (5.11) *et* $\tilde{I}(s,\lambda;\psi) = I_0(s,\lambda;\nabla\times\Delta\psi)$ *et*

$$E(s,\lambda;\varphi) = s^{6+1/m}\lambda^4 \iint_{]0,T[\times\omega} e^{-4s\widehat{\alpha}+2s\alpha^*}(\widehat{\xi})^{6+1/m}|\varphi|^2\,dx\,dt$$

pour les solutions de (5.12).

Remarque 5.1. *A partir de l'inégalité de Carleman* (5.14)*, on peut établir de façon directe l'inégalité d'observabilité* (5.13)*. En fait, il suffit de combiner des estimations de type énergie pour les fonctions* $e^{-1/t^m}\varphi$ *et* $e^{-1/t^m}\psi$.

Dans les deux paragraphes qui suivent, on donnera les idées de la preuve de la Proposition 8, pour les deux systèmes (5.11) et (5.12). Dans les deux preuves, on travaille d'abord avec l'équation de ψ (qui est indépendante de φ) et ensuite on combine des estimations pour les deux équations.

5.2.1 Preuve pour le système (5.11)

Rappelons que ψ satisfait le problème

$$\begin{cases} \psi_t - \Delta\psi + a\psi + B\cdot\nabla\psi + \nabla h = 0, \quad \nabla\cdot\psi = 0 & \text{dans }]0,T[\times\Omega, \\ \psi = 0 & \text{sur }]0,T[\times\partial\Omega, \\ \psi|_{t=0} = \psi^0 & \text{dans } \Omega. \end{cases} \tag{5.15}$$

Pour cette fonction ψ, on peut démontrer l'estimation suivante :

Lemme 5. *Il existe une constante positive K qui dépend de Ω et de ω_0 telle que*

$$I_0(s,\lambda;\nabla\times\psi) \le Ks^3\lambda^4 \iint_{]0,T[\times\omega_0} e^{-2s\alpha}\xi^3|\nabla\times\psi|^2\,dx\,dt, \tag{5.16}$$

pour tout $\lambda \ge K$ *et tout* $s \ge K(T^{2m}+T^m)$.

Remarque 5.2. *En particulier, cette inégalité nous donne la propriété de continuation unique suivante*

$$\nabla\times\psi = 0 \quad \textit{dans }]0,T[\times\omega_0 \Rightarrow \psi\equiv 0 \quad \textit{dans }]0,T[\times\Omega. \tag{5.17}$$

Comme dans le cas de la chaleur, il semble que le fait que (5.17) *puisse être quantifié par une inégalité pour les solutions de* (5.15) *n'était pas connu.*

La preuve du Lemme 5 est basée sur une inégalité de Carleman sur $\nabla\times\psi$, solution de l'équation parabolique :

$$(\nabla\times\psi)_t - \Delta(\nabla\times\psi) + a(\nabla\times\psi) + B\cdot\nabla(\nabla\times\psi) = 0 \quad \text{dans }]0,T[\times\Omega.$$

Comme nous n'avons pas de condition au bord pour $\nabla\times\psi$, cette estimation dépend des valeurs au bord de $\nabla\times\psi$. Ce terme sur le bord est ensuite estimé en utilisant des propriétés de régularité du système de Stokes, voir [67] pour tous les détails de la preuve.

On regarde maintenant le système en φ, $\psi 1_{\mathcal{O}}$ étant le second membre de son équation. A cette équation, on applique l'inégalité de Carleman pour le système de Stokes démontrée dans [?] :

$$L(s,\lambda;\varphi) \le C\Bigg(s^{16}\lambda^{40}\iint_{]0,T[\times\omega_0} e^{-12s\widehat{\alpha}+9s\alpha^*}(\widehat{\xi})^{16}|\varphi|^2\,dx\,dt \\ + s^{15/2}\lambda^{20}\iint_{]0,T[\times\mathcal{O}} e^{-6s\widehat{\alpha}+3s\alpha^*}(\widehat{\xi})^{15/2}|\psi|^2\,dx\,dt\Bigg)$$

pour $s,\,\lambda \geq C$, où $L(s,\lambda;\cdot)$ est donné par

$$L(s,\lambda;g) := s^{-1}\iint_{]0,T[\times\Omega} e^{-3s\alpha}\xi^{-1}\left(|g_t|^2+|\Delta g|^2\right)\,dx\,dt$$
$$+\ s\lambda^2\iint_{]0,T[\times\Omega} e^{-3s\alpha}\xi|\nabla g|^2\,dx\,dt + s^3\lambda^4\iint_{]0,T[\times\Omega} e^{-3s\alpha}\xi^3|g|^2\,dx\,dt.$$

En combinant cette inégalité avec (5.16), on obtient

$$\begin{aligned}L(s,\lambda;\varphi)+I_0(s,\lambda;\nabla\times\psi) \leq C\Bigg(& s^{16}\lambda^{40}\iint_{]0,T[\times\omega_0} e^{-12s\widehat{\alpha}+9s\alpha^*}(\widehat{\xi})^{16}|\varphi|^2\,dx\,dt\\ &+s^3\lambda^4\iint_{]0,T[\times\omega_0}\xi^3 e^{-2s\alpha}|\nabla\times\psi|^2\,dx\,dt\Bigg),\end{aligned}\tag{5.18}$$

pour tout $s,\,\lambda\geq C$. Enfin, le terme local en $\nabla\times\psi$ peut être estimée en utilisant son expression explicite :

$$\nabla\times\psi = -(\nabla\times\varphi)_t - \Delta(\nabla\times\varphi) + a\nabla\times\varphi - B\cdot\nabla(\nabla\times\varphi)\quad\text{dans }]0,T[\times\omega_0.\tag{5.19}$$

Le point important ici est que dans cette expression on ne voit plus la pression π.

La dernière partie de la preuve consiste à absorber toutes les intégrales en φ (qui viennent du second membre de (5.19)) à l'aide du terme $L(s,\lambda;\varphi)$. Après quelques lignes de calculs, on arrive à (5.14).

5.2.2 Preuve pour le système (5.12)

De façon analogue au Lemme 5, on peut démontrer une autre inégalité pour ψ solution de (5.15) :

Lemme 6. *Il existe une constante positive K qui dépend de Ω et de ω_0 telle que*

$$\widetilde{I}_j(s,\lambda;\psi)+I_0(s,\lambda;\nabla\times\Delta\psi) \leq Ks^3\lambda^4\iint_{\omega_0\times(0,T)} e^{-2s\alpha}\xi^3|\nabla\times\Delta\psi|^2\,dx\,dt,\tag{5.20}$$

pour tout $\lambda\geq K$ et tout $s\geq K(T^{2m}+T^m)$, où

$$\widetilde{I}_j(s,\lambda;\psi) = s^{(6-j)+(3-j)/m}\lambda^4\int_0^T e^{-2s\alpha^*}(\xi^*)^{(6-j)+(3-j)/m}\|\psi\|^2_{H^j(\Omega)^N}\quad j\geq 3.$$

L'idée de la preuve du Lemme 6 et d'appliquer une inégalité de Carleman à l'équation de la chaleur satisfaite par $\nabla\times\Delta\psi$:

$$(\nabla\times\Delta\psi)_t - \Delta(\nabla\times\Delta\psi) + a(\nabla\times\Delta\psi) + B\cdot\nabla(\nabla\times\Delta\psi) = 0\quad\text{dans }]0,T[\times\Omega.$$

Ceci donne une inégalité avec le terme $I_0(s,\lambda;\nabla\times\Delta\psi)$ à gauche, qui est estimé en fonction d'un terme local en $\nabla\times\Delta\psi$ et d'un terme qui tient compte des valeurs au bord de $\nabla\times\Delta\psi$. Ce terme frontière est absorbé à l'aide de résultats de régularité pour le système de Stokes ainsi que de l'inégalité

$$\|\psi\|_{H^3(\Omega)^N}\leq C\|\nabla\times\Delta\psi\|_{L^2(\Omega)^N}$$

pour un certain $C>0$ dépendant de Ω.

Maintenant, on regarde l'équation de φ et donc on traite $\nabla\times((\nabla\times\psi)1_{\mathcal{O}})$ comme un second membre. Dû au manque de régularité du second membre (par exemple, dans $L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)^N)$), une nouvelle inégalité de Carleman a été démontrée dans [67] (en appendice) :

$$\begin{aligned}&s^3\lambda^4\iint_{]0,T[\times\Omega} e^{-3s\alpha}\xi^3|\varphi|^2\,dx\,dt + s^2\lambda^4\iint_{(0,T)\times\Omega} e^{-3s\alpha^*}(\xi^*)^{2-1/m}|\nabla\varphi|^2\,dx\,dt\\ &\leq C\Bigg(s^{16}\lambda^{40}\iint_{]0,T[\times\omega_0} e^{-12s\widehat{\alpha}+9s\alpha^*}(\widehat{\xi})^{16}|\varphi|^2\,dx\,dt\\ &\quad+s^{47/4}\lambda^{30}\iint_{]0,T[\times\mathcal{O}} e^{-9s\widehat{\alpha}+6s\alpha^*}(\widehat{\xi})^{47/4}|\nabla\times\psi|^2\,dx\,dt\Bigg),\end{aligned}$$

pour s, $\lambda \geq C$. En combinant cette inégalité avec (5.20), on obtient

$$\begin{aligned} s^2\lambda^4 \iint_{]0,T[\times\Omega} &(se^{-3s\alpha}\xi^3|\varphi|^2 + e^{-3s\alpha^*}(\xi^*)^{2-1/m}|\nabla\varphi|^2)\,dx\,dt + I_0(s,\lambda;\nabla\times\Delta\psi) \\ &\leq C\left(s^{16}\lambda^{40}\iint_{]0,T[\times\omega_0} e^{-12s\widehat{\alpha}+9s\alpha^*}(\widehat{\xi})^{16}|\varphi|^2\,dx\,dt\right. \\ &\left. + s^3\lambda^4\iint_{]0,T[\times\omega_0}\xi^3 e^{-2s\alpha}|\nabla\times\Delta\psi|^2\,dx\,dt\right), \end{aligned} \tag{5.21}$$

pour tout s, $\lambda \geq C$.

La dernière étape consiste à estimer le dernier terme de (5.21), en utilisant l'expression

$$\nabla\times\Delta\psi = -(\nabla\times\varphi)_t - \nabla\times\Delta\varphi + a\nabla\times\varphi - B\cdot\nabla(\nabla\times\varphi) \quad \text{dans }]0,T[\times\omega_0.$$

Encore une fois, il est très important d'avoir une expression de $\nabla\times\Delta\psi$ indépendante de la pression.

Chapitre 6

Résultats supplémentaires

6.1 Contrôlabilité exacte locale des fluides micropolaires

6.1.1 Introduction

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un ouvert connexe et borné à frontière $\partial\Omega$ suffisamment régulière. Soit $\mathcal{O} \subset \Omega$ un ouvert (petit) et $T > 0$. On désignera par $n(x)$ le vecteur unitaire extérieur à Ω au point $x \in \partial\Omega$.

On considère le système de contrôle suivant :

$$\begin{cases} y_t - \Delta y + (y \cdot \nabla)y + \nabla p = \nabla \times \omega + u 1_{\mathcal{O}} & \text{dans }]0,T[\times\Omega, \\ \omega_t - \Delta\omega - \nabla(\nabla \cdot \omega) + (y \cdot \nabla)\omega = \nabla \times y + v 1_{\mathcal{O}} & \text{dans }]0,T[\times\Omega, \\ \nabla \cdot y = 0 & \text{dans }]0,T[\times\Omega, \\ y = 0, \quad \omega = 0 & \text{sur }]0,T[\times\partial\Omega, \\ y(0) = y^0, \quad \omega(0) = \omega^0 & \text{dans } \Omega. \end{cases} \tag{6.1}$$

Ici, $y = y(x,t)$ représente le champ de vitesse du fluide, $\omega = \omega(x,t)$ est sa vitesse angulaire et y^0 et ω^0 sont la vitesse et la vitesse angulaire respectivement au temps $t = 0$. Enfin, u et v sont les contrôles.

A notre connaissance, les fluides micropolaires ont été introduits dans [38]. La différence principale avec les fluides modélisés par les équations de Navier-Stokes est que l'on tient compte de la rotation des particules.

En particulier, le système couplé non linéaire (6.1) peut être utilisé pour modéliser le comportement de cristaux liquides, de fluides polymériques et du sang (voir, par exemple, [15], [37] et [105]). Ce type de systèmes a été étudié dans [93].

Dans ce paragraphe, on étudie la contrôlabilité exacte locale aux trajectoires de (6.1). Soit donc $(\overline{y}, \overline{p}, \overline{\omega})$ une trajectoire de (6.1) :

$$\begin{cases} \overline{y}_t - \Delta\overline{y} + (\overline{y} \cdot \nabla)\overline{y} + \nabla\overline{p} = \nabla \times \overline{\omega} & \text{dans }]0,T[\times\Omega, \\ \overline{\omega}_t - \Delta\overline{\omega} - \nabla(\nabla \cdot \overline{\omega}) + (\overline{y} \cdot \nabla)\overline{\omega} = \nabla \times \overline{y} & \text{dans }]0,T[\times\Omega, \\ \nabla \cdot \overline{y} = 0 & \text{dans }]0,T[\times\Omega, \\ \overline{y} = 0, \quad \overline{\omega} = 0 & \text{sur }]0,T[\times\partial\Omega. \end{cases} \tag{6.2}$$

On supposera que cette trajectoire est suffisamment régulière :

$$\overline{y}, \overline{\omega} \in X := L^\infty(]0,T[\times\Omega) \cap L^2(0,T;H^2(\Omega)) \cap H^1(0,T;L^2(\Omega)). \tag{6.3}$$

Quant aux conditions initiales, on imposera

$$(y^0, \omega^0) \in Y := (H^2(\Omega) \cap V) \times H_0^1(\Omega). \tag{6.4}$$

On dira que (6.1) est localement exactement contrôlable vers la trajectoire $(\overline{y}, \overline{p}, \overline{\omega})$ au temps T s'il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout y^0 et ω^0 satisfaisant (6.4) et

$$\|(y^0, \omega^0) - (\overline{y}(0), \overline{\omega}(0))\|_Y \le \delta, \tag{6.5}$$

il existe des contrôles u et v dans L^2 tels que la solution associée (y, p, ω) satisfait

$$y(T) = \overline{y}(T) \quad \text{et} \quad \omega(T) = \overline{\omega}(T) \quad \text{dans} \quad \Omega. \tag{6.6}$$

Théorème 20. *Supposons que $(\overline{y}, \overline{p}, \overline{\omega})$ satisfait (6.2) et (6.3). Alors, le système (6.1) est localement exactement controlable vers la trajectoire $(\overline{y}, \overline{p}, \overline{\omega})$ au temps T, pour tout $T > 0$.*

Remarque 6.1. Evidemment, il serait beaucoup plus intéressant de contrôler (6.1) en n'agissant que sur l'équation de mouvement. A notre connaissance, même le problème (plus simple) de la contrôlabilité approchée est ouvert.

On considère le système non linéaire auxiliaire suivant :

$$\begin{cases} z_t - \Delta z + ((z + \overline{y}) \cdot \nabla)z + (z \cdot \nabla)\overline{y} + \nabla q = \nabla \times \rho + u 1_{\mathcal{O}} & \text{dans }]0, T[\times\Omega, \\ \rho_t - \Delta\rho - \nabla(\nabla \cdot \rho) + ((z + \overline{y}) \cdot \nabla)\rho + (z \cdot \nabla)\overline{\omega} = \nabla \times z + v 1_{\mathcal{O}} & \text{dans }]0, T[\times\Omega, \\ \nabla \cdot z = 0 & \text{dans }]0, T[\times\Omega, \\ z = 0, \quad \rho = 0 & \text{sur }]0, T[\times\partial\Omega, \\ z(0) = z^0, \quad \rho(0) = \rho^0 & \text{dans } \Omega. \end{cases} \tag{6.7}$$

Alors, le résultat énoncé dans le Théorème 20 est réduit à la contrôlabilité locale exacte à zéro de (6.7). Pour démontrer celle-là, on utilisera alors une stratégie de point fixe.

On introduit les opérateurs

$$Lz = z_t - \Delta z + (\overline{y} \cdot \nabla)z + (z \cdot \nabla)\overline{y},$$

et

$$M\rho = \rho_t - \Delta\rho - \nabla(\nabla \cdot \rho) + \overline{y} \cdot \nabla\rho \tag{6.8}$$

et l'espace

$$W = \{\, w \in L^\infty(]0, T[\times\Omega) : \nabla \cdot w = 0 \ \text{ dans }]0, T[\times\Omega, \ w \in L^\infty(0, T; H^\kappa(\Omega)), \ w_t \in L^2(]0, T[\times\Omega) \,\}, \tag{6.9}$$

où $\kappa > 1/2$. Pour chaque $w \in W$, on introduit le système linéaire :

$$\begin{cases} Lz + (w \cdot \nabla)z + \nabla q = \nabla \times \rho + u 1_{\mathcal{O}} & \text{dans }]0, T[\times\Omega, \\ M\rho + (w \cdot \nabla)\rho + (z \cdot \nabla)\overline{\omega} = \nabla \times z + v 1_{\mathcal{O}} & \text{dans }]0, T[\times\Omega, \\ \nabla \cdot z = 0 & \text{dans }]0, T[\times\Omega, \\ z = 0, \quad \rho = 0 & \text{sur }]0, T[\times\partial\Omega, \\ z(0) = z^0, \quad \rho(0) = \rho^0 & \text{dans } \Omega. \end{cases} \tag{6.10}$$

Dans le paragraphe suivant, on démontrera que pour tout $w \in W$, le problème adjoint associé à (6.10) satisfait une inégalité de type Carleman. Enfin, dans le dernier paragraphe on prouvera que si les données initiales sont suffisamment petites (comme dans (6.5)), il est possible de choisir des contrôles u et v et des états (z, q, ρ) de telle sorte que l'application $w \mapsto z$ possède un point fixe dans W.

6.1.2 Inégalité de Carleman pour le problème linéarisé

On introduit le système adjoint associé à (6.10) :

$$\begin{cases} L^*\varphi - (w \cdot \nabla)\varphi + \nabla\pi = \nabla \times \psi + (\nabla\psi)^t\,\overline{\omega} & \text{dans }]0, T[\times\Omega, \\ M^*\psi - (w \cdot \nabla)\psi = \nabla \times \varphi & \text{dans }]0, T[\times\Omega, \\ \nabla \cdot \varphi = 0 & \text{dans }]0, T[\times\Omega, \\ \varphi = 0, \quad \psi = 0 & \text{sur }]0, T[\times\partial\Omega, \\ \varphi(T) = \varphi^0, \quad \psi(T) = \psi^0 & \text{dans } \Omega, \end{cases} \tag{6.11}$$

où $L^*\varphi$ et $M^*\psi$ sont donnés par

$$L^*\varphi = -\varphi_t - \Delta\varphi - D\varphi\,\overline{y}$$

et

$$M^*\psi = -\psi_t - \Delta\psi - \nabla(\nabla\cdot\psi) - (\overline{y}\cdot\nabla)\psi. \tag{6.12}$$

On introduit les fonctions poids :

$$\begin{aligned} \alpha_m(x,t) &= \frac{e^{2\lambda\|\eta^0\|_\infty} - e^{\lambda\eta^0(x)}}{t^m(T-t)^m}, \quad \xi_m(x,t) = \frac{e^{\lambda\eta^0(x)}}{t^m(T-t)^m}, \\ \alpha_m^*(t) &= \max_{x\in\overline{\Omega}} \alpha_m(x,t) = \alpha_m|_{\partial\Omega}(x,t), \quad \widehat{\alpha}_m(t) = \min_{x\in\overline{\Omega}} \alpha_m(x,t), \end{aligned} \tag{6.13}$$

où m est suffisamment grand.

Dans ce paragraphe, on démontre l'estimation suivante :

Proposition 9. *Supposons que $\overline{y}$ et $\overline{\omega}$ satisfont* (6.3) *et que $w \in W$. Alors, il existe deux constantes positives $\overline{C}$ et $\overline{\lambda}$ ne dépendant que de Ω et de $\mathcal{O}$ telles que, pour tout $(\varphi^0,\psi^0) \in H \times L^2(\Omega)$, on a*

$$I(s,\lambda;\varphi) + I(s,\lambda;\psi) \le \overline{C}(1+T^2)s^{16} \iint_{]0,T[\times\mathcal{O}} e^{-8s\widehat{\alpha}+6s\alpha^*}\widehat{\xi}^{16}(|\varphi|^2+|\psi|^2)\,dx\,dt, \tag{6.14}$$

pour tout $s \ge \overline{s}(\lambda)(T^{2m-4}+T^{2m})$ et tout

$$\lambda \ge \overline{\lambda}(1+\|\overline{y}\|_X^2 + \|w\|_W^{C/(\kappa-1/2)} + \|\overline{\omega}\|_\infty + \|\overline{\omega}_t\|^2_{L^2(0,T;L^r(\Omega))} + e^{\overline{\lambda}T(1+\|\overline{y}\|^2_\infty+\|\overline{\omega}\|^2_\infty)}),$$

où (φ,π,ψ) est la solution associée à (6.11) et $I(s,\lambda,,\cdot)$ est définie dans (4.17).

Nous donnons maintenant les idées de la preuve de cette estimation. On regarde d'abord le système satisfait par ψ :

$$\begin{cases} -\psi_t - \Delta\psi - \nabla(\nabla\cdot\psi) - ((\overline{y}+w)\cdot\nabla)\psi = \nabla\times\varphi & \text{dans }]0,T[\times\Omega, \\ \psi = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \\ \psi(T) = \psi^0 & \text{dans } \Omega. \end{cases} \tag{6.15}$$

On applique à ψ l'inégalité de Carleman pour l'équation de la chaleur obtenue dans [52]. On regarde donc le terme $\nabla(\nabla\cdot\psi)$ comme un second membre :

$$\begin{aligned} I(s,\lambda;\psi) \le C\Bigg(&\iint_{]0,T[\times\Omega} e^{-2s\alpha_m}|\nabla(\nabla\cdot\psi)|^2\,dx\,dt + \|\overline{y}+w\|_\infty^2 \iint_{]0,T[\times\Omega} e^{-2s\alpha_m}|\nabla\psi|^2\,dx\,dt \\ &+ \iint_{]0,T[\times\Omega} e^{-2s\alpha_m}|\nabla\varphi|^2\,dx\,dt + s^3\lambda^4 \iint_{]0,T[\times\mathcal{O}} e^{-2s\alpha_m}\xi_m^3|\psi|^2\,dx\,dt \Bigg), \end{aligned}$$

pour tout $\lambda \ge C$ et tout $s \ge C(\lambda)(T^{2m-1}+T^{2m})$. En choisissant $\lambda \ge C(\|\overline{y}\|_\infty + \|w\|_\infty)$ et $s \ge CT^{2m}$, on peut absorber la deuxième intégrale à droite :

$$\begin{aligned} I(s,\lambda;\psi) \le C\Bigg(&\iint_{]0,T[\times\Omega} e^{-2s\alpha_m}|\nabla(\nabla\cdot\psi)|^2\,dx\,dt \\ &+ \iint_{]0,T[\times\Omega} e^{-2s\alpha_m}|\nabla\varphi|^2\,dx\,dt + s^3\lambda^4 \iint_{]0,T[\times\mathcal{O}} e^{-2s\alpha_m}\xi_m^3|\psi|^2\,dx\,dt \Bigg). \end{aligned} \tag{6.16}$$

Pour estimer la première intégrale à droite de (6.16), on applique l'opérateur divergence à l'équation satisfaite par ψ :

$$-q_t - 2\Delta q = \nabla\cdot\big(((\overline{y}+w)\cdot\nabla)\psi\big) \quad \text{dans }]0,T[\times\Omega,$$

où $q := \nabla\cdot\psi$. Pour cette équation de la chaleur (sans condition au bord), on utilise l'inégalité de Carleman obtenue dans [45] :

$$\begin{aligned}
&\iint_{]0,T[\times\Omega} e^{-2s\alpha_m}|\nabla q|^2\,dx\,dt + s^2\lambda^2\iint_{]0,T[\times\Omega} e^{-2s\alpha_m}\xi_m^2|q|^2\,dx\,dt\\
&\quad\le C\left(s\|\overline{y}+w\|_\infty^2\iint_{]0,T[\times\Omega} e^{-2s\alpha_m}\xi_m|\nabla\psi|^2\,dx\,dt\right.\\
&\quad\left.+s^2\lambda^2\iint_{]0,T[\times\mathcal{O}} e^{-2s\alpha_m}\xi_m^2|q|^2\,dx\,dt+\lambda^{-1}\iint_{]0,T[\times\partial\Omega} e^{-2s\alpha_m^*}\left|\frac{\partial q}{\partial n}\right|^2 d\sigma\,dt\right)
\end{aligned}\tag{6.17}$$

pour tout $\lambda\ge C$ et tout $s\ge C(\lambda)(T^{2m-1}+T^{2m})$. En combinant (6.16) et (6.17), on arrive à

$$\begin{aligned}
I(s,\lambda;\psi)\le C&\left(s^2\lambda^2\iint_{]0,T[\times\mathcal{O}} e^{-2s\alpha_m}\xi_m^2(s\lambda^2\xi_m|\psi|^2+|\nabla\cdot\psi|^2)\,dx\,dt\right.\\
&\left.+\iint_{]0,T[\times\Omega} e^{-2s\alpha_m}|\nabla\varphi|^2\,dx\,dt+\lambda^{-1}\iint_{]0,T[\times\partial\Omega} e^{-2s\alpha_m^*}\left|\frac{\partial(\nabla\cdot\psi)}{\partial n}\right|^2 d\sigma\,dt\right)
\end{aligned}\tag{6.18}$$

pour tout $\lambda\ge C(1+\|\overline{y}\|_\infty+\|w\|_\infty)$ et tout $s\ge C(\lambda)(T^{2m-1}+T^{2m})$. Dans la prochaine étape, on estime le terme sur le bord, en utilisant le fait que le poids atteint son minimum sur $\partial\Omega$ et qu'il est nul en $t=T$. Grâce aux propriétés de régularité de l'équation parabolique satisfaite par ψ, on obtient, pour tout $\varepsilon>0$:

$$\begin{aligned}
&\iint_{]0,T[\times\Omega} e^{-2s\alpha_m^*}(\xi_m^*)^{1-2/m}(|\psi_t|^2+|\Delta\psi|^2)\,dx\,dt+I(s,\lambda;\psi)\le\varepsilon I(s,\lambda;\varphi)\\
&+C_\varepsilon\left(\iint_{]0,T[\times\Omega} e^{-2s\alpha_m}|\nabla\varphi|^2\,dx\,dt+s^2\lambda^2\iint_{]0,T[\times\mathcal{O}} e^{-2s\alpha_m}\xi_m^2(s\lambda^2\xi_m|\psi|^2+|\nabla\cdot\psi|^2)\,dx\,dt\right)
\end{aligned}\tag{6.19}$$

pour tout $s\ge C(\lambda)(T^{2m-1}+T^{2m})$ et tout $\lambda\ge C(1+\|\overline{y}\|_X^2+\|w\|_W^{C/(\kappa-1/2)})$. Un argument standard de localisation nour permet d'estimer le terme local en $\nabla\cdot\psi$:

$$\begin{aligned}
&\iint_{]0,T[\times\Omega} e^{-2s\alpha_m^*}(\xi_m^*)^{1-2/m}(|\psi_t|^2+|\Delta\psi|^2)\,dx\,dt+I(s,\lambda;\psi)\le\varepsilon I(s,\lambda;\varphi)\\
&\quad\le C_\varepsilon\left(\iint_{]0,T[\times\Omega} e^{-2s\alpha_m}|\nabla\varphi|^2\,dx\,dt+s^5\lambda^4\iint_{]0,T[\times\mathcal{O}} e^{-2s\alpha_m}\xi_m^5|\psi|^2\,dx\,dt\right),
\end{aligned}\tag{6.20}$$

pour tout $s\ge C(\lambda)(T^{2m-1}+T^{2m})$ et tout $\lambda\ge C(1+\|\overline{y}\|_X^2+\|w\|_W^{C/\delta})$, pour $\delta>0$.

Enfin, on regarde le système satisfait par φ :

$$\begin{cases}
-\varphi_t-\Delta\varphi-D\varphi\,\overline{y}-(w\cdot\nabla)\varphi+\nabla\pi=\nabla\times\psi+(\nabla\psi)^t\overline{\omega} & \text{dans }]0,T[\times\Omega,\\
\nabla\cdot\varphi=0 & \text{dans }]0,T[\times\Omega,\\
\varphi=0 & \text{sur }]0,T[\times\partial\Omega,\\
\varphi(T)=\varphi^0 & \text{dans } \Omega.
\end{cases}$$

Pour ce système, on démontre une inégalité de Carleman similaire à celles démontrées dans [49] et dans [65] :

$$\begin{aligned}
I(s,\lambda,\varphi)\le C&\left(s(1+\|\overline{\omega}\|_\infty^2)\iint_{]0,T[\times\Omega} e^{-2s\alpha_m}\xi_m|\nabla\psi|^2\,dx\,dt\right.\\
&\left.+(1+T^2)s^{16}\iint_{]0,T[\times\mathcal{O}} e^{-8s\widehat{\alpha}+6s\alpha^*}\widehat{\xi}^{16}(|\varphi|^2+|\psi|^2)\,dx\,dt\right).
\end{aligned}$$

Voir [47] pour les détails de la preuve. En combinant cette inégalité avec (6.20), on trouve (6.14) pour le même choix des paramètres s et λ.

6.1.3 Contrôlabilité locale exacte aux trajectoires de (6.1)

Dans ce paragraphe, on donne les idées de la preuve du Théorème 20.

On pose

$$\widehat{\eta} := e^{-4s\widehat{\alpha}+3s\alpha^*}(\widehat{\xi})^8.$$

et

$$W_0 := \{\, w \in W : w(0) = y^0 \text{ dans } \Omega \,\}.$$

Soit $w \in W$ et $\varepsilon > 0$. On considère le problème d'optimisation suivant :

$$\begin{cases} \min\ J_{\varepsilon,w}(\varphi^0, \psi^0) \\ \text{soumis à } \ (\varphi^0, \psi^0) \in H \times L^2(\Omega), \end{cases} \tag{6.21}$$

où

$$J_{\varepsilon,w}(\varphi^0, \psi^0) = \frac{1}{2} \iint_{]0,T[\times\mathcal{O}} \widehat{\eta}^2(|\varphi|^2 + |\psi|^2)\, dx\, dt + \varepsilon \|(\varphi^0, \psi^0)\|_{H\times L^2} + \int_\Omega (\varphi^0 \cdot z_d + \psi^0 \cdot \rho_d)\, dx$$

et (z_d, ρ_d) est l'état final du système (6.10) avec $u \equiv v \equiv 0$.

En utilisant l'estimation de Carleman (6.14), il n'est pas difficile de montrer l'existence d'un seul minimiseur $(\varphi^0_{\varepsilon,w}, \psi^0_{\varepsilon,w}) \in H \times L^2(\Omega)$. En fait, en utilisant les arguments de [40], on peut démontrer une propriété de coercivité :

$$\lim_{\|(\varphi^0,\psi^0)\|_{H\times L^2}\to\infty} \frac{J_{\varepsilon,w}(\varphi^0, \psi^0)}{\|(\varphi^0, \psi^0)\|_{H\times L^2}} \geq \varepsilon.$$

Désignons par $(\varphi_{\varepsilon,w}, \psi_{\varepsilon,w})$ la solution de (6.11) associée à $(\varphi^0_{\varepsilon,w}, \psi^0_{\varepsilon,w})$ et soit $u_{\varepsilon,w}$ et $v_{\varepsilon,w}$ les deux contrôles donnés par

$$u_{\varepsilon,w} := \widehat{\eta}^2\, \varphi_{\varepsilon,w} \quad \text{et} \quad v_{\varepsilon,w} := \widehat{\eta}^2\, \psi_{\varepsilon,w}. \tag{6.22}$$

On notera $(z_{\varepsilon,w}, \pi_{\varepsilon,w}, \rho_{\varepsilon,w})$ la solution associée de (6.10). Alors, en utilisant que $(\varphi^0_{\varepsilon,w}, \psi^0_{\varepsilon,w})$ est le minimiseur de $J_{\varepsilon,w}$, on obtient directement que

$$\|(z_{\varepsilon,w}(T), \rho_{\varepsilon,w}(T))\|_{H\times L^2} \leq \varepsilon. \tag{6.23}$$

De plus, à partir de l'inégalité de Carleman (6.14) et de (6.22), on trouve une estimation uniforme des contrôles :

$$\iint_{]0,T[\times\mathcal{O}} \widehat{\eta}^{-2}(|\Delta u_{\varepsilon,w}|^2 + |u_{\varepsilon,w,t}|^2 + |\Delta v_{\varepsilon,w}|^2 + |v_{\varepsilon,w,t}|^2)\, dx\, dt \leq C(\|w\|_W)\, \|(z^0, \rho^0)\|_Y.$$

En particulier, comme $\widehat{\eta}^{-2}$ est borné inférieurement, on a que $u_{\varepsilon,w}$ et $v_{\varepsilon,w}$ appartiennent à l'espace $L^2(0, T; H^2(\Omega))$, et $u_{\varepsilon,w,t}$ et $v_{\varepsilon,w,t}$ appartiennnent à $L^2(]0, T[\times\Omega)$ avec

$$\|(u_{\varepsilon,w}, v_{\varepsilon,w})\|_{L^2(0,T;H^2(\Omega))} + \|(u_{\varepsilon,w,t}, v_{\varepsilon,w,t})\|_{L^2(]0,T[\times\Omega)} \leq C(\|w\|_W)\, \|(z^0, \rho^0)\|_Y \tag{6.24}$$

pour tout $\varepsilon > 0$.

On introduit maintenant pour chaque $\varepsilon > 0$ l'application $\Lambda_\varepsilon : W_0 \longmapsto W_0$ donnée par :

$$\Lambda_\varepsilon(w) = y_{\varepsilon,w} \quad \forall w \in W_0.$$

On peut démontrer que cette application possède un point fixe z_ε dans W_0. On donnera seulement les idées de la compacité de cette application.

Par un résultat de régularité appliqué au système (6.10) on obtient, grâce à (6.24), que $z_{\varepsilon,w} \in L^\infty(0, T; W^{1,6^-}(\Omega))$, $y_{\varepsilon,w,t} \in L^2(0, T; V)$ et $y_{\varepsilon,w,tt} \in L^2(0, T; V')$, avec des estimations indépendantes de ε. Donc, si w appartient à un borné de W_0, $y_{\varepsilon,w} = \Lambda_\varepsilon(w)$ appartient à un compact de W_0.

6.2 Contrôlabilité exacte locale du système de Boussinesq

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un ouvert connexe et borné à frontière $\partial\Omega$ suffisamment régulière. Soit $\omega \subset \Omega$ un ouvert et $T > 0$. On désignera par $n(x)$ le vecteur unitaire extérieur à Ω au point $x \in \partial\Omega$.

Dans ce paragraphe nous présentons des résultats de contrôlabilité pour le système de Boussinesq suivant :

$$\begin{cases} y_t - \Delta y + (y\cdot\nabla)y + \nabla p = \theta\, g + v_1 1_\omega & \text{dans }]0,T[\times\Omega, \\ \theta_t - \Delta\theta + y\cdot\nabla\theta = v_2 1_\omega & \text{dans }]0,T[\times\Omega, \\ \nabla\cdot y = 0 & \text{dans }]0,T[\times\Omega, \\ y = 0, \quad \theta = 0 & \text{sur }]0,T[\times\partial\Omega, \\ y(0) = y^0, \quad \theta(0) = \theta^0 & \text{dans } \Omega, \end{cases} \tag{6.25}$$

où $g := (0,0,1)$ est la gravité. Dans ce système, y représente la vitesse des particules du fluide et θ leur température. La propriété de contrôle qui nous intéresse ici est la contrôlabilité locale exacte aux trajectoires de (6.25). Introduisons donc une trajectoire de ce système :

$$\begin{cases} \overline{y}_t - \Delta\overline{y} + (\overline{y}\cdot\nabla)\overline{y} + \nabla\overline{p} = \overline{\theta}\, g & \text{dans }]0,T[\times\Omega, \\ \overline{\theta}_t - \Delta\overline{\theta} + \overline{y}\cdot\nabla\overline{\theta} = 0 & \text{dans }]0,T[\times\Omega, \\ \nabla\cdot\overline{y} = 0 & \text{dans }]0,T[\times\Omega, \\ \overline{y} = 0, \quad \overline{\theta} = 0 & \text{sur }]0,T[\times\partial\Omega, \\ \overline{y}(0) = \overline{y}^0, \quad \overline{\theta}(0) = \overline{\theta}^0 & \text{dans } \Omega. \end{cases} \tag{6.26}$$

Dans tout ce qui suit, on supposera que la trajectoire $(\overline{y},\overline{p},\overline{\theta})$ est suffisamment régulière, sans préciser les espaces. On renvoit le lecteur à [65] et [61] pour plus de détails.

La contrôlabilité du système de Boussinesq avait déjà été étudiée dans [53] et [54], où a été démontré la contrôlabilité locale aux trajectoires lorsque le contrôle agit sur tout le bord $\partial\Omega$ ou lorsque Ω est un tore.

Le résultat principal est le suivant :

Théorème 21. *Soit $T > 0$ et $(\overline{y},\overline{p},\overline{\theta})$ une trajectoire régulière de (6.25). Alors, il existe $\delta > 0$ tel que si*

$$\|(y^0,\theta^0) - (\overline{y}^0,\overline{\theta}^0)\|_{L^4(\Omega)\times L^2(\Omega)} < \delta,$$

on peut trouver des contrôles $(v_1,v_2) \in L^2(\Omega)$ tels que

$$y(T,\cdot) = \theta(T,\cdot) \equiv 0 \quad \textit{dans } \Omega.$$

On considère un système auxiliaire :

$$\begin{cases} z_t - \Delta z + (z\cdot\nabla)z + (\overline{y}\cdot\nabla)z + (z\cdot\nabla)\overline{y} + \nabla q = \rho\, g + v_1 1_\omega & \text{dans }]0,T[\times\Omega, \\ \rho_t - \Delta\rho + z\cdot\nabla\rho + \overline{y}\cdot\nabla\rho + \nabla\cdot(\overline{\theta}\, z) = v_2 1_\omega & \text{dans }]0,T[\times\Omega, \\ \nabla\cdot z = 0 & \text{dans }]0,T[\times\Omega, \\ z = 0, \quad \rho = 0 & \text{sur }]0,T[\times\partial\Omega, \\ z(0) = z^0, \quad \rho(0) = \rho^0 & \text{dans } \Omega. \end{cases} \tag{6.27}$$

Alors, le résultat énoncé dans le Théorème 21 est réduit à la contrôlabilité locale à zéro de (6.27).

6.2.1 Approche directe

Dans ce paragraphe, on décrit la stratégie suivie dans [65].

Le résultat de contrôlabilité locale est une conséquence de l'application du Théorème d'Inversion Locale. Cette technique avait déjà été utilisée dans [76] et dans [49] pour démontrer la contrôlabilité locale aux trajectoires du système de Navier-Stokes.

Dans un premier temps, on considère un système linéarisé, obtenu à partir de (6.27), en négligant les deux termes bilinéaires :

$$\begin{cases} z_t - \Delta z + (\overline{y}\cdot\nabla)z + (z\cdot\nabla)\overline{y} + \nabla q = f_1 + \rho\, g + v_1 1_\omega & \text{dans }]0,T[\times\Omega, \\ \rho_t - \Delta\rho + \overline{y}\cdot\nabla\rho + \nabla\cdot(\overline{\theta}\, z) = f_2 + v_2 1_\omega & \text{dans }]0,T[\times\Omega, \\ \nabla\cdot z = 0 & \text{dans }]0,T[\times\Omega, \\ z = 0, \quad \rho = 0 & \text{sur }]0,T[\times\partial\Omega, \\ z(0) = z^0, \quad \rho(0) = \rho^0 & \text{dans } \Omega, \end{cases} \tag{6.28}$$

où f_1 et f_2 sont deux fonctions dépendant de x et de t qui décroissent exponentiellement lorsque $t \to T^-$.

Pour ce problème linéaire, l'objectif est de démontrer l'existence de $\overline{C} > 0$ et de $k > 0$ tels que si

$$\|e^{\overline{C}/(T-t)^k}(f_1, f_2)\|_{Y_0} < +\infty \tag{6.29}$$

dans un certain espace Y_0, alors, il existe deux contrôles v_1 et v_2 tels que la solution de (6.28), non seulement vaut zéro à l'instant T mais en plus satisfait

$$\|e^{\ell\overline{C}/(T-t)^k}(z, \rho)\|_{Y_1} < +\infty, \tag{6.30}$$

pour un certain $\ell \in]1/2, 1[$ et dans un certain espace Y_1 à préciser. Ceci nous permettrait ensuite d'appliquer l'inversion locale si, par exemple, on obtient (6.29) avec $Y_0 := L^2(0,T;W^{-1,6}(\Omega))\times L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$ et (6.30) avec $Y_1 := L^4(0,T;L^{12}(\Omega)) \times L^4(0,T;L^3(\Omega))$.

L'outil indispensable pour obtenir ce résultat de contrôlabilité à zéro avec des poids exponentiels est une inégalité de Carleman obtenue pour le problème adjoint associé au problème linéaire (6.28). On introduit ce problème adjoint :

$$\begin{cases} -\varphi_t - \Delta\varphi - D\varphi\,\overline{y} + \nabla\pi = h_1 + \overline{\theta}\nabla\psi & \text{dans }]0,T[\times\Omega, \\ -\psi_t - \Delta\psi - \overline{y}\cdot\nabla\psi = h_2 + \varphi\cdot g & \text{dans }]0,T[\times\Omega, \\ \nabla\cdot\varphi = 0 & \text{dans }]0,T[\times\Omega, \\ \varphi = 0, \quad \psi = 0 & \text{sur }]0,T[\times\partial\Omega, \\ \varphi(T) = \varphi^0, \quad \psi(T) = \psi^0 & \text{dans } \Omega. \end{cases} \tag{6.31}$$

Ici, $D\varphi$ désgine le gradient symétrisé

$$D\varphi = \nabla\varphi + \nabla\varphi^t. \tag{6.32}$$

Il faut remarquer que, même si classiquement les problèmes adjoints sont homogènes, ici nous sommes obligés de considérer des second membres h_1 et h_2 génériques, car on veut démontrer un résultat plus fort que la contrôlabilité à zéro (voir (6.30)).

Cette inégalité de Carleman contiendra les termes globaux

$$\|e^{-\overline{C}/(T-t)^k}\varphi\|_{L^2(0,T;W^{1,6}(\Omega))} + \|e^{-\overline{C}/(T-t)^k}\psi\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))}$$

à gauche, estimés en fonction de

$$\|e^{-\ell'\overline{C}/(T-t)^k}h_1\|_{L^2(]0,T[\times\Omega)} + \|e^{-\ell'\overline{C}/(T-t)^k}h_2\|_{L^2(]0,T[\times\Omega)}$$

pour un certain $\ell' \in]\ell, 1[$ et en fonction de deux termes locaux en φ et ψ.

On présente enfin les idées de la preuve de cette inégalité :

• Premièrement, on applique l'inégalité de Carleman obtenue dans [52] (équation de la chaleur avec second membre dans $L^2(]0,T[\times\Omega)$ et conditions au bord de type Dirichlet homogènes) aux équations satisfaites par φ et par ψ.

Cela veut dire que l'on regarde les termes

$$D\varphi\,\overline{y} - \nabla\pi + h_1 + \overline{\theta}\nabla\psi$$

et

$$\overline{y} \cdot \nabla\psi + h_2 + \varphi \cdot g$$

comme des seconds membres. Après quelques calculs, on obtient une inégalité de la forme

$$I_1(\varphi,\psi) \leq C \left(\iint_{]0,T[\times\Omega} \rho_1^2(|h_1|^2 + |h_2|^2 + |\nabla\pi|^2)\,dx\,dt + \iint_{]0,T[\times\omega} \widetilde{\rho}_1^2(|\varphi|^2 + |\psi|^2)\,dx\,dt \right).$$

Les poids ρ_1 et $\widetilde{\rho}_1$ sont de la forme $\exp\{-C/(T-t)^k\}$, tandis que dans l'expression de I_1 il y a des termes globaux en φ et en ψ multipliés par des poids du même type.

• Deuxièmement, on localise le terme en pression, en utilisant qu'elle satisfait une équation elliptique :

$$\Delta\pi = \nabla \cdot (D\varphi\,\overline{y}) + \nabla \cdot h_1 + \nabla \cdot (\overline{\theta}\nabla\psi).$$

Ceci est fait à l'aide d'une inégalité de Carleman pour les équations elliptiques qui a été démontrée dans [77]. La difficulté principale de cette estimation est le fait que les valeurs au bord de π ne sont pas connues. Ceci nous amène à l'estimation suivante :

$$I_1(\varphi,\psi) \leq C \left(\iint_{]0,T[\times\Omega} \rho_2^2(|h_1|^2 + |h_2|^2)\,dx\,dt + \iint_{]0,T[\times\omega} (\widetilde{\rho}_2^2(|\varphi|^2 + |\psi|^2) + \overline{\rho}_2^2|\pi|^2)\,dx\,dt \right). \quad (6.33)$$

• Dans la dernière étape, on estime le terme local de la pression. Dans cette preuve on utilise les propriétés du poids ainsi que le caractère parabolique de notre équation. Après quelques pages de calculs (voir [65] pour tous les détails), on majore le terme de pression par $\varepsilon I_1(\varphi,\psi)$, des termes en $|h_1|^2 + |h_2|^2$ et des termes locaux en $|\varphi|^2 + |\psi|^2$.

6.2.2 Approche par un contrôle fictif

Dans ce paragraphe on décrit l'approche développée dans [61].

Le résultat local de contrôle à zéro pour le système (6.27) est démontré à l'aide d'un point fixe. On considère donc le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} z_t - \Delta z + \nabla \cdot (a \otimes z + z \otimes b) + \nabla q = -\rho g + v_1 1_\omega & \text{dans }]0,T[\times\Omega, \\ \rho_t - \Delta\rho + \nabla \cdot (c\rho) + \nabla \cdot (zd) = v_2 1_\omega & \text{dans }]0,T[\times\Omega, \\ \nabla \cdot z = 0 & \text{dans }]0,T[\times\Omega, \\ z = 0, \quad \rho = 0 & \text{sur }]0,T[\times\partial\Omega, \\ z(0) = z^0, \quad \rho(0) = \rho^0 & \text{dans } \Omega, \end{cases} \quad (6.34)$$

où les coefficients a, b, c, d sont réguliers.

Pour ce système linéaire, nous voulons établir la contrôlabilité à zéro avec une méthode plus simple que celle décrite dans le paragraphe précédent. L'idée est de rajouter d'abord un contrôle à ce système (dans la condition de divergence) pour qu'il soit plus facilement contrôlable à zéro et ensuite d'enlever ce contrôle (appelé "contrôle fictif") en gardant la propriété de la contrôlabilité à zéro.

Soit ω_1 un ouvert non vide avec $\overline{\omega}_1 \subset \omega$ et $\zeta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ tel que

$$0 \leq \zeta(x) \leq 1, \ \forall x \in \mathbb{R}^3, \ \zeta(x) = 1, \ \forall x \in \omega_1, \ \operatorname{Supp}\zeta \subset \omega.$$

On considère un système linéaire avec 3 contrôles :

$$\begin{cases} z_t - \Delta z + \nabla \cdot (a \otimes z + z \otimes b) + \nabla q = -\rho g + v_1 1_\omega & \text{dans }]0,T[\times\Omega, \\ \rho_t - \Delta\rho + \nabla \cdot (c\rho) + \nabla \cdot (zd) = v_2 1_\omega & \text{dans }]0,T[\times\Omega, \\ \nabla \cdot z = v_3\zeta & \text{dans }]0,T[\times\Omega, \\ z = 0, \quad \rho = 0 & \text{sur }]0,T[\times\partial\Omega, \\ z(0) = z^0, \quad \rho(0) = \rho^0 & \text{dans } \Omega. \end{cases} \quad (6.35)$$

Pour chaque v_1, v_2, v_3 dans $L^2(]0,T[\times\Omega)$, on peut donner un sens à la solution de ce problème par une méthode de transposition : $(z,\rho) \in L^2(]0,T[\times\Omega) \times L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$.

L'existence de contrôles dans L^2 tels que la solution précédente est 'nulle au temps T' (dans un certain sense) est une conséquence de l'inégalité de Carleman (6.33). Mais $v_3 \in L^2(]0,T[\times\Omega)$ ne sera pas suffisant pour la suite, donc nous devons d'abord améliorer l'inégalité (6.33) de telle sorte que le contrôle v_3 soit plus régulier. Ceci est fait grâce, encore une fois, au caractère parabolique de notre système. Nous pouvons ainsi montrer l'existence de contrôles $\widehat{v}_1$, $\widehat{v}_2 \in L^2(]0,T[\times\Omega)$ et $\widehat{v}_3 \in W^{1,l}(0,T;W^{1,l}(\Omega))$ $(\forall l > 1)$ tels que la solution $(\widehat{z},\widehat{q},\widehat{\rho})$ de (6.35) satisfait

$$\widehat{z}(T,\cdot) = \widehat{\rho}(T,\cdot) = 0 \quad \text{dans } \Omega.$$

Maintenant, on peut relever le contrôle v_3 de la condition de divergence en gardant la nulle contrôlabilité grâce au lemme suivant (voir [8]) :

Lemme 7. *Soit $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^3$ un domaine lipschitzien et soit*

$$L^1_0(\mathcal{O}) := \{u \in L^1(\mathcal{O}) : \int_{\mathcal{O}} u\,dx = 0\}.$$

Alors, pour tout $r > 1$, il existe un opérateur $\mathcal{R} \in \mathcal{L}(W^{1,r}_0(\mathcal{O}) \cap L^1_0(\mathcal{O}); W^{2,r}_0(\mathcal{O}))$ tel que $\nabla\cdot(\mathcal{R}w) = w$ dans $\mathcal{O}$ pour tout $w \in W^{1,r}_0(\mathcal{O}) \cap L^1_0(\mathcal{O})$.

Soit $\mathcal{O} \subset\subset \omega$ un ouvert lipschitzien tel que $\mathrm{Supp}\zeta \subset \mathcal{O}$. On peut appliquer le lemme précédent à $\widehat{v}_3\zeta$ car $\widehat{v}_3\zeta \in W^{1,l}_0(\mathcal{O}) \cap L^1_0(\mathcal{O})$ presque partout dans $]0,T[$. Soit donc

$$Z(t) := \mathcal{R}(\widehat{v}_3(t)\zeta) \quad \text{p. p. } t \in]0,T[.$$

D'après le Lemme 7, on a que $Z \in W^{1,l}(0,T;W^{2,l}_0(\mathcal{O}))$. On étend Z par zéro à tout Ω et on appelle $\widetilde{Z}$ son extension. Alors, on peut voir qu'en faisant la différence $\widehat{z} - \widetilde{Z}$, on a résolu le problème de contrôle à zéro pour le problème linéaire (6.34). La nouvelle expression des contrôles est donnée par :

$$v_1 := \widehat{v}_1 + \widetilde{Z}_t - \Delta\widetilde{Z} + \nabla\cdot(a\otimes\widetilde{Z} + \widetilde{Z}\otimes b)$$

et

$$v_2 := \widehat{v}_2 + \nabla\cdot(d\widetilde{Z}).$$

Enfin, le passage au problème non linéaire est fait à travers un point fixe de type Schauder pour les applications multivaluées.

Chapitre 7

Résultats de contrôlabilité pour l'équation de Burgers

Dans ce chapitre, nous présentons quelques résultats de contrôlabilité pour l'équation de Burgers visqueuse.

Soit $T > 0$ et $\omega \subset]0,1[$ un ouvert non vide. On considère l'equation de Burgers contrôlée :

$$\begin{cases} y_t - y_{xx} + yy_x = v1_\omega & \text{dans }]0,T[\times]0,1[, \\ y(t,0) = v_1, \; y(t,1) = v_2, & \text{dans }]0,T[, \\ y(0,\cdot) = y_0 & \text{dans }]0,1[. \end{cases} \tag{7.1}$$

On rappelle que l'on dit que le système (7.1) est contrôlable à zéro au temps T si, pour tout y_0, il existe des contrôles v, v_1 et v_2 tels que la solution y de (7.1) satisfait

$$y(T,\cdot) = 0 \quad \text{dans} \quad]0,1[. \tag{7.2}$$

Les espaces d'appartenance des données initiales et des contrôles seront précisés ultérieurement dans chaque situation.

Le système (7.1) surgit comme une simplification 1-D du problème de contrôle associé au système de Navier-Stokes. Il est bien connu que la solution non contrôlée de ce type de systèmes décroit exponentiellement, la contrôlabilité à zéro étant la propriété naturelle à étudier.

Quelques propriétés de contrôlabilité de (7.1) ont été étudiées dans [52] (voir Chapter 1, Theorems 6.3 et 6.4). En particulier, les auteurs démontrent qu'en n'utilisant que le contrôle v, on ne peut pas atteindre des solutions stationnaires de (7.1) avec norme L^2 suffisamment grande, même de façon approchée. Un autre résultat similaire est montré dans [35].

Dans le travail [24] l'auteur démontre que, à l'aide des contrôles v_1 et v_2, on peut conduire la solution de (7.1) de $y_0 \equiv 0$ vers des contantes M suffisamment grandes (en fonction de $T > 0$). Plus récemment, la contrôlabilité exacte a été établie dans [19] à l'aide de v_1, v_2 et $v = v(t)$.

Enfin, quelques résultats concernant l'ensemble d'états atteignables de l'équation de Burgers non visqueuse sont démontrés dans [75] ; d'autres résultats dans ce sens ont été donnés dans [3].

7.1 Résultats négatifs de contrôlabilité

Nous présentons ici deux résultats de non-contrôlabilité à zéro pour le système (7.1). Dans le premier, on pose $v_1 = v_2 = 0$ et dans le deuxième on pose $v = 0$. Evidemment, le deuxième résultat améliore le premier mais nous avons choisi de présenter les deux car leur preuves sont de nature complètement différentes.

7.1.1 Non contrôlabilité de l'équation de Burgers un contrôle interne

On considère l'équation de Burgers avec un contrôle distribué :

$$\begin{cases} y_t - y_{xx} + yy_x = v1_\omega & \text{dans }]0,T[\times]0,1[, \\ y(t,0) = 0,\ y(t,1) = 0 & \text{dans }]0,T[, \\ y(0,\cdot) = y_0 & \text{dans }]0,1[. \end{cases} \tag{7.3}$$

Pour chaque $y_0 \in L^2(0,1)$, soit

$$T(y_0) = \inf\{\, T > 0 : (7.3) \text{ est contrôlable à zéro au temps } T \,\}.$$

Pour chaque $r > 0$, on pose

$$T(r) = \sup\{\, T(y^0) : \|y_0\|_{L^2(0,1)} \le r \,\}.$$

La non-contrôlabilité à zéro de (7.3) est traduite par $T(r) > 0$. Dans la suite, on établira une estimation inférieure de $T(r)$ quand $r \to 0^+$. Plus précisément, soit

$$\phi(r) = \frac{1}{\log \frac{1}{r}}\,.$$

Nous présentons maintenant le résultat principal (voir [48]) :

Théorème 22. *Il existe une constante $C_0 > 0$ indépendante de r telle que*

$$C_0\phi(r) \le T(r) \quad \textit{lorsque} \quad r \to 0^+. \tag{7.4}$$

Remarque 7.1. *Le même résultat est vrai avec $v_1 = v = 0$ ou avec $v_2 = v = 0$ dans (7.1).*

Remarque 7.2. *Dans [48], il est démontré que $T(r) \le C_1\phi(r)$ lorsque $r \to 0^+$, pour une certaine constante $C_1 > 0$. L'estimation donnée dans le Théorème 22 est donc optimale.*

Nous donnons maintenant les idées de la preuve du Théorème 22.

Soit $\rho_0 \in]0,1[$ tel que $]0,\rho_0[\cap\omega = \emptyset$ (sinon, on aura $]\rho_0,1[\cap\omega = \emptyset$ et la preuve est analogue). Dans tout ce qui suit, on supposera que ρ_0 est suffisamment petit mais satisfaisant $0 < (\log(\log(1/r)))^{-1} < \rho_0$. Soit maintenant $y_0 \in L^2(0,1)$ avec $y_0(x) = -r$ pour tout $x \in]0,\rho_0[$ et soit y la solution associée à (7.3).

En cherchant un majorant de y, on introduit la fonction

$$Z(t,x) = \exp\left\{ -\left(1 - e^{-\rho_0^2(\rho_0 - x)^3/(\rho_1 - x)^2}\right)\frac{2}{t} + \frac{1}{\rho_0 - x} \right\} \quad \forall (t,x) \in]0, C_0\phi(r)[\times]0,\rho_0[,$$

où $\rho_1 = \delta_0\rho_0$ avec $0 < \delta_0 < 1$ et $C_0 > 0$ est une constante qui sera fixée plus tard. Cette fonction est strictement positive et satisfait $Z(t,\rho_0) = +\infty$ et $Z(0,\cdot) \equiv 0$. De plus, on peut démontrer qu'elle est une sur-solution :

$$Z_t - Z_{xx} + ZZ_x \ge 0 \quad \text{dans }]0, C_0\phi(r)[\times]0,\rho_0[. \tag{7.5}$$

On renvoit le lecteur à [48] pour tous les détails de la preuve.

On pose aussi $w(t,x) := Z(t,x) - y(t,x)$. Alors, w satisfait

$$\begin{cases} w_t - w_{xx} + ZZ_x - yy_x \ge 0 & \text{dans }]0, C_0\phi(r)[\times]0,\rho_0[, \\ w(t,0) \ge 0, \quad w(t,\rho_0) = +\infty & \text{dans }]0, C_0\phi(r)[, \\ w(0,\cdot) = r & \text{dans }]0,\rho_0[. \end{cases} \tag{7.6}$$

On multiplie l'équation de w par $-w^-$ et on intègre dans $]0,\rho_0[$:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^{\rho_0} |w^-|^2\,dx + \int_0^{\rho_0} |w_x^-|^2\,dx = -\frac{1}{2}\int_0^{\rho_0} Z_x|w^-|^2\,dx. \tag{7.7}$$

D'après l'expression de Z_x, on voit que $Z_x \geq 0$ pour $x \in [\rho_1, \rho_0[$. De plus, Z_x est borné dans $]0, C_0\phi(r)[\times]0, \rho_1[$ par une constante qui ne dépend que de ρ_0 et de ρ_1. Par conséquent, le Lemme de Gronwall nous donne

$$y \leq Z \quad \text{dans }]0, C_0\phi(r)[\times]0, \rho_0[. \tag{7.8}$$

On introduit un système auxiliaire :

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} + uu_x = 0 & \text{dans }]0, C_0\phi(r)[\times]0, \rho_1[, \\ u(t,0) = u(t,\rho_1) = Z(t,\rho_1) & \text{dans }]0, C_0\phi(r)[, \\ u(0,\cdot) = -\tilde{r}(\cdot) & \text{dans }]0, \rho_1[, \end{cases} \tag{7.9}$$

où $\tilde{r}$ est une fonction régulière satisfaisant

$$\tilde{r}(x) = r \text{ pour tout } x \in]\delta\rho_1, (1-\delta)\rho_1[\text{ avec } \delta \in]0, 1/4[,$$
$$\tilde{r}(0) = \tilde{r}(\rho_1) = 0 = \tilde{r}''(0) = \tilde{r}''(\rho_1)$$

et

$$-r \leq -\tilde{r} \leq 0, \quad |\tilde{r}'| \leq Cr \quad \text{et} \quad |\tilde{r}''| \leq C \;\text{ dans }\;]0, \rho_1[, \tag{7.10}$$

où $C = C(\rho_1)$ est indépendant de r.

D'après l'expression de Z, on voit facilement que

$$y \leq u \;\text{ dans }\;]0, C_0\phi(r)[\times]0, \rho_1[. \tag{7.11}$$

Dans le lemme suivant on présente quelques estimations a priori pour la solution de (7.9) :

Lemme 8. *Les estimations suivantes sont satisfaites :*

$$|u| \leq Cr \quad \textit{et} \quad |u_x| \leq Cr^{1/2} \quad \textit{dans }]0, C_0\phi(r)[\times]0, \rho_1[, \tag{7.12}$$

où C est indépendant de r.

Une conséquence immédiate de (7.12) est

$$u_t - u_{xx} \leq C^* r^{3/2} \quad \text{dans }]0, C_0\phi(r)[\times]0, \rho_1[$$

pour un certain $C^* > 0$ indépendant de r. On pose maintenant

$$p(t) = C^* r^{3/2} t - r$$

et

$$q(x,t) = c(e^{-(x-(\rho_1/4))^2/4t} + e^{-(x-3(\rho_1/4))^2/4t})$$

pour $(t,x) \in]0, C_0\phi(r)[\times]\rho_1/4, 3\rho_1/4[$, avec $c > 0$ à déterminer.

Soit enfin $b := u - p - q$, qui satisfait

$$\begin{cases} b_t - b_{xx} \leq 0 & \text{dans }]0, C_0\phi(r)[\times]\rho_1/4, 3\rho_1/4[, \\ b(t, \rho_1/4) \leq b_1(t) & \text{dans }]0, C_0\phi(r)[, \\ b(t, 3\rho_1/4) \leq b_1(t) & \text{dans }]0, C_0\phi(r)[, \\ b(0,\cdot) = 0 & \text{dans }]\rho_1/4, 3\rho_1/4[, \end{cases} \tag{7.13}$$

où

$$b_1(t) = Z(t,\rho_1) - C^* r^{3/2} t + r - c(1 + e^{-\rho_1^2/(16t)}).$$

On choisit la constante c suffisamment grande pour avoir

$$Z(t,\rho_1) - C^* r^{3/2} t + r - c(1 + e^{-\rho_1^2/(16t)}) < 0 \quad \forall t \in]0, C_0\phi(r)[$$

ce qui implique, en particulier,

$$u(t, \frac{\rho_1}{2}) \leq p(t, \frac{\rho_1}{2}) + q(t, \frac{\rho_1}{2}) = 2c \exp\left(\frac{-\rho_1^2}{64t}\right) + C^* r^{3/2} t - r.$$

On conclut qu'il existe deux constantes $C_0 > 0$ et $C_0' > 0$ telles que $u(t, \frac{\rho_1}{2}) < -C_0' r$, $\forall t \in]0, C_0\phi(r)[$.

7.1.2 Non contrôlabilité de Burgers avec deux contrôles frontières

On considère l'équation de Burgers avec deux contrôles au bord :

$$\begin{cases} y_t - y_{xx} + yy_x = 0 & \text{dans }]0,T[\times]0,1[, \\ y(t,0) = v_1, \ y(t,1) = v_2 & \text{dans }]0,T[, \\ y(0,\cdot) = y_0 & \text{dans }]0,1[. \end{cases} \tag{7.14}$$

On présente le résultat principal (voir [68]) :

Théorème 23. *Il existe $T > 0$ et $y_0 \in H^1(0,1)$ tels que, pour tout v_1, $v_2 \in H^{3/4}(0,T)$ satisfaisant les conditions de compatibilité $v_1(0) = y_0(0)$ et $v_2(0) = y_0(1)$, la solution $y \in L^2(0,T;H^2(0,1)) \cap H^1(0,T;L^2(0,1))$ de (7.14) satisfait*

$$\|y(T,\cdot)\|_{H^1(0,1)} \geq C_5 > 0, \tag{7.15}$$

avec $C_5(T,y_0) > 0$ une constante.

Remarque 7.3. *Dans [68], il est aussi démontré la non-contrôlabilité exacte en temps grand : pour chaque $T > 0$, il existe une condition initiale $y_0 \in H^1(0,1)$ et une cible $y_1 \in H^1(0,1)$ telles que, pour tout v_1, $v_2 \in H^{3/4}(0,T)$ satisfaisant $v_1(0) = y_0(0)$ et $v_2(0) = y_0(1)$, la solution $y \in L^2(0,T;H^2(0,1)) \cap H^1(0,T;L^2(0,1))$ de (7.14) satisfait*

$$\|y(T,\cdot) - y_1(\cdot)\|_{H^1(0,1)} \geq C_6 > 0, \tag{7.16}$$

avec $C_6(T,y_0,y_1) > 0$ une constante.

Pour démontrer le Théorème 23, on prouve d'abord que le problème de la contrôlabilité à zéro pour l'équation de Burgers peut être formulé de façon équivalente comme un problème de contrôle exacte pour l'équation de la chaleur avec restrictions sur les contrôles. De fait, en appliquant une transformation de type Hopf-Cole, on arrive au problème suivant :

$$\begin{cases} h_t - h_{xx} = 0 & \text{dans }]0,T[\times]0,1[, \\ h(t,0) = v_7(t), \quad h(t,1) = v_8(t) & \text{dans }]0,T[, \\ h(0,\cdot) = h_0(\cdot) & \text{dans }]0,1[. \end{cases} \tag{7.17}$$

Il est démontré dans [68] que le problème de contrôle à zéro pour l'équation de Burgers formulé dans les espaces de l'énoncé du Théorème 23 est équivalent au problème de contrôlabilité suivant :

$$\begin{gathered} \text{Pour tout } h_0 \in H^2(0,1) \text{ avec } h_0(x) > 0 \text{ dans }]0,1[\text{ et } h_0(0) = 1, \text{ il existe} \\ \text{une constante } K > 0 \text{ et deux contrôles } 0 < v_7(t),\ v_8(t) \in H^1(0,T) \text{ tels que la solution} \\ h \in L^2(0,T;H^3(0,1)) \cap H^1(0,T;H^1(0,1)) \text{ de (7.17) satisfait } \ h(T,x) = K \ \text{ dans }]0,1[. \end{gathered} \tag{7.18}$$

Montrons enfin que cette propriété sur h n'est pas vraie. On aura besoin d'un résultat local classique pour l'équation de la chaleur :

Lemme 9. *Soit $0 < \xi_0 < \xi_1 < \xi_2 < 1$. Alors, pour chaque $\theta > 0$ il existe un temps $T^* = T^*(\theta) > 0$ tel que la solution de l'équation de la chaleur rétrograde*

$$\begin{cases} -U_t - U_{xx} = 0 & \textit{dans }]0,T^*[\times]0,1[, \\ U(t,0) = U(t,1) = 0 & \textit{dans }]0,T^*[, \\ U(T^*,\cdot) = \delta_{\xi_0} - \theta\delta_{\xi_1} + \delta_{\xi_2} & \textit{dans }]0,1[\end{cases} \tag{7.19}$$

satisfait

$$U_x(t,0) > 0 \quad \textit{et} \quad U_x(t,1) < 0 \quad \forall t \in]0,T^*[.$$

Dans le lemme précédent, on a noté δ_x la masse de dirac au point x.

Nous démontrons le Théorème 23 par contradiction. On suppose donc que pour tout $T > 0$ et tout $h_0 \in H^2(0,1)$ avec $h_0 > 0$ et $h_0(0) = 1$, il existe une constante $K > 0$ et deux contrôles $0 < \widetilde{v}_1 \in H^1(0,T)$ et $0 < \widetilde{v}_2(t) \in H^1(0,T)$ tels que la solution de (7.17) satisfait

$$h(T,x) = K \quad \text{dans }]0,1[.$$

Soit U la fonction donnée par le Lemme 9 pour un certain $\theta \geq 2$. Cette solution est définie jusqu'au temps $t = T^*$. En multipliant l'équation de h par U et en intégrant sur $]0,T^*[\times]0,1[$, on obtient

$$-\int_0^{T^*} \left(U_x(t,0)\,\widetilde{v}_1(t) - U_x(t,1)\,\widetilde{v}_2(t)\right) dt + K(2-\theta) - \int_0^1 U(0,x)\,h_0(x)\,dx = 0 \tag{7.20}$$

pour tout $h_0 \in H^2(0,1)$. On remarque que les deux premiers termes sont négatifs.

Comme la dérivée normale de U est négative et U satisfait des conditions au bord homogènes de type Dirichlet, il existe $\delta > 0$ tel que

$$U(0,x) \geq \delta\, x \quad \forall x \in]0,\delta[\quad \text{et} \quad U(0,x) \geq \delta\,(1-x) \quad \forall x \in]1-\delta,1[.$$

Alors, on peut démontrer que l'on peut choisir des conditions initiales $h_0 \in H^2(0,1)$ positives avec $h_0(0) = 1$ et telles que

$$-\int_0^1 U(0,x)\,h_0(x)\,dx < 0.$$

On renvoit le lecteur à [68] pour plus de détails.

Ceci contredit l'identité (7.20).

7.2 Contrôlabilité de l'équation de Burgers vers les constantes non nulles

Dans cette section on travaillera avec le même système de contrôle que dans le paragraphe précédent :

$$\begin{cases} u_t - \nu u_{xx} + u u_x = 0 & \text{dans }]0,T[\times]0,1[, \\ u(t,0) = v_1, \ u(t,1) = v_2 & \text{dans }]0,T[, \\ u(0,\cdot) = u_0 & \text{dans }]0,1[, \end{cases} \tag{7.21}$$

avec $\nu > 0$. Le résultat principal de cette partie du mémoire établie la contrôlabilité exacte vers les constantes, uniformément par rapport à $\nu > 0$ (voir [56]) :

Théorème 24. *Il existe une constante $\alpha_0 \geq 1$ telle que pour tout $M \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ il existe $\nu_0 > 0$ tel que pour tout $u_0 \in L^\infty(0,1)$, tout $T > \alpha_0/|M|$ et tout $\nu \in]0,\nu_0[$ il existe deux contrôles v_1^ν et v_2^ν satisfaisant les propriétés suivantes :*

- *$\|v_1^\nu\|_\infty$ et $\|v_2^\nu\|_\infty$ sont uniformément bornés pour $\nu \in]0,\nu_0[$.*
- *La solution u de (7.21) satisfait $u(T,\cdot) = M$ dans $]0,1[$.*

Le preuve est divisée en deux parties, correspondantes aux deux propositions suivantes :

Proposition 10. *Il existe deux constantes $\alpha_1 \geq 1$ et $\nu_1 > 0$ telles que : pour tout $u_0 \in L^\infty(0,1)$, pour tout $N \in \mathbb{R}$ avec $|N|$ suffisamment grand (en fonction de $\|u_0\|_\infty$) et tout $\nu \in]0,\nu_1[$ il existe deux contrôles w_1^ν et w_2^ν dans $L^\infty(0,T_1)$, où $T_1 = \alpha_1/|N|$, satisfaisant les propriétés suivantes :*

- *$\|w_1^\nu\|_\infty$ sont $\|w_2^\nu\|_\infty$ sont bornés uniformément pour $\nu \in [0,\nu_1]$.*
- *La solution associée u satisfait $u_{|t=T_1} = N$ dans $]0,1[$.*

Proposition 11. *La conclusion du Théoreme 24 est vraie lorsque $M > 0$ et u_0 est une constante suffisamment grande par rapport à M.*

Dans la suite, on donnera quelques indications de la preuve de la Proposition 10.

L'objectif est de s'approcher arbitrairement de N pour ensuite appliquer un résultat de contrôlabilité locale (voir Proposition 12 ci-dessous). Le résultat de contrôlabilité approchée est donné dans le lemme suivant :

Lemme 10. *Pour $u_0 \in L^\infty(0,1)$, on peut trouver $N > 0$ suffisamment grand tel que pour tout $\nu > 0$, on peut trouver des contrôles v_1 et v_2 tels que la solution de (7.21) satisfait :*

$$\|u(t,\cdot) - N\|_{L^\infty(0,1)} \leq (\|u_0\|_\infty + N/2) \exp\left\{-\frac{3N^2}{16\nu}\left(t - \frac{8}{N}\right)\right\}, \tag{7.22}$$

pour tout $t > 0$ et

$$\|u_x(t,\cdot)\|_{L^\infty(0,1)} \leq C\frac{N^2}{\nu} \exp\left\{-\frac{3N^2}{16\nu}\left(t - \frac{8}{N}\right)\right\} \tag{7.23}$$

pour tout $t > 8/N$ et un certain $C > 0$. De plus, les contrôles satisfont :

$$\max(\|v_1\|_{L^\infty(0,T)}, \|v_2\|_{L^\infty(0,T)}) \leq N. \tag{7.24}$$

Pour la preuve de ce lemme, on introduit des profils d'ondes progressives de (7.21) :

$$U(y) = \frac{U^- + U^+}{2} - \frac{U^- - U^+}{2} \tanh\Big(\frac{U^- - U^+}{2\nu}(y - y_0)\Big),$$

où y_0 est arbitraire (le centre de l'onde).

Soit u la solution de l'équation de Burgers sur $\mathbb{R}$ avec condition initiale

$$u(0,x) = \begin{cases} N \text{ pour } x < 0, \\ u_0(x) \text{ pour } 0 \leq x \leq 1, \\ 0 \text{ pour } x > 1. \end{cases} \tag{7.25}$$

On pose aussi $\breve{u}$ l'onde progressive avec $U^- = N$ et $U^+ = -2\|u_0\|_\infty$, initialement centrée en y_0, si $u_0 \not\equiv 0$. Si $u_0 \equiv 0$, on peut prendre $U_+ := -N/4$ par exemple.

On fait un choix particulier pour y_0, dans le cas $u_0 \not\equiv 0$:

$$y_0 = -\frac{2\nu}{N + 2\|u_0\|_\infty} \operatorname{arctanh}\left(\frac{N}{N + 2\|u_0\|_\infty}\right),$$

ce qui implique, grâce au principe de comparaison, que $\breve{u}(t,x) \leq u(t,x) \leq N$ dans $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$.

Pour N suffisamment grand, nous avons $y_0 \geq -1$ et $N - 2\|u_0\|_\infty \geq N/2$. En utilisant l'expression explicite de $\breve{u}$, nous obtenons

$$\breve{u}(t,x) - N \geq -\left(\frac{N}{2} + \|u_0\|_\infty\right) \exp\left\{\frac{-3N^2}{16\nu}\left(t - \frac{8}{N}\right)\right\}.$$

Comme $\breve{u}(t,x) - N \leq 0$ on déduit (7.22).

Pour démontrer l'estimation (7.23), on utilise une expression explicite de u_x en fonction de u.

Dans la dernière étape, on démontre un résultat de contrôlabilité (locale) exacte, uniforme en ν, pour un temps $T = O(1/N)$:

Proposition 12. *Supposons que $u_0 \in W^{1,\infty}(0,1)$ et qu'il existe $K_0 > 0$ tel que*

$$\|u_0 - N\|_{W^{1,\infty}(0,1)} \leq e^{-K_0 N/\nu}. \tag{7.26}$$

Alors, on peut trouver deux contrôles v_1 et v_2 tels que la solution de (7.21) satisfait, pour $T = \frac{\alpha_0 - 2}{N}$,

$$u|_{t=T} = N \quad \text{dans }]0,1[. \tag{7.27}$$

De plus, les contrôles satisfont une estimation indépendante de $\nu \in]0,\nu_0[$:

$$\max(\|v_1\|_{W^{1,\infty}(0,T)}, \|v_2\|_{W^{1,\infty}(0,T)}) \leq 2N. \tag{7.28}$$

Tous les détails de la preuve de ce résultat sont donnés dans [56].

Chapitre 8

Contrôlabilité du système de Navier-Stokes N-dimensionnel avec $N-1$ contrôles scalaires

Dans ce chapitre, nous présentons deux résultats de contrôlabilité pour l'équation de Stokes et de Navier-Stokes respectivement, avec un nombre réduit de contrôles. Le premier résultat a lieu sur un domaine borné en dimension 2 ou 3 et le deuxième sur un tore.

8.1 Contrôlabilité à zéro du système de Stokes N-dimensionel avec $N-1$ contrôles scalaires

Soit $T>0$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ($N=2,3$) un ouvert borné et régulier et $\omega \subset\subset \Omega$ un ouvert. On travaille avec le système de Stokes avec conditions au bord de type Dirichlet :

$$\begin{cases} y_t - \Delta y + \nabla p = v 1_\omega & \text{dans }]0,T[\times\Omega, \\ \nabla \cdot y = 0 & \text{dans }]0,T[\times\Omega, \\ y = 0 & \text{sur }]0,T[\times\partial\Omega, \\ y_{|t=0} = y_0 & \text{dans } \Omega, \end{cases} \tag{8.1}$$

où $y_0 \in H$. On rappelle que l'espace H a été introduit dans (5.1).

La contrôlabilité à zéro de ce système a été démontrée dans [76]. L'objectif principal est de démontrer que (8.1) est controlable à zéro par l'intermediaire de $N-1$ contrôles scalaires, c'est-à-dire, lorsque $v_i = 0$ pour un certain $i \in \{1, \cdots, N\}$. Ce résultat a été démontré dans [50] quand $\overline{\omega} \cap \partial\Omega \neq \emptyset$. Ici, nous démontrons le même résultat sans aucune hypothèse sur l'ouvert de contrôle ω.

On énonce le résultat principal ([27]) :

Théorème 25. *Il existe une constante $C>0$ ne dépendant que de Ω et ω telle que, pour tout $y_0 \in H$ et tout $i \in \{1, \cdots, N\}$, il existe un contrôle $v \in L^2(]0,T[\times\Omega)$ avec $v_i \equiv 0$ dans $]0,T[\times\Omega$, satisfaisant*

$$\|v\|_{L^2(]0,T[\times\Omega)} \leq e^{C(1+1/T^9)} \|y_0\|_{L^2(\Omega)}$$

et tel que la solution y de (8.1) satisfait

$$y_{|t=T} = 0 \quad \text{dans } \Omega.$$

Remarque 8.1. *Dans [89], il est démontré qu'il existe des ouverts lipschitziens, connexes et non vides Ω de $\mathbb{R}^3$ tels que, même avec $\omega := \Omega$, la contrôlabilité à zéro de (8.1) n'est pas vraie avec des contrôles ayant une seule composante non nulle. Voir aussi [36] pour le cas d'un tore.*

Dans la preuve du Théorème 25, pour fixer les idées, on se placera en dimension 2. La preuve en dimension 3 est la même. On introduit le problème adjoint :

$$\begin{cases} -\varphi_t - \Delta\varphi + \nabla\pi = 0 & \text{dans }]0,T[\times\Omega, \\ \nabla\cdot\varphi = 0 & \text{dans }]0,T[\times\Omega, \\ \varphi = 0 & \text{sur }]0,T[\times\partial\Omega, \\ \varphi_{|t=T} = \varphi_T & \text{dans } \Omega, \end{cases}$$

avec $\varphi_T \in H$. Alors, le résultat énoncé dans le Théorème 25 est équivalent à l'inégalité d'observabilité :

$$\int_\Omega |\varphi_{|t=0}|^2\,dx \leq e^{C(1+1/T^9)} \sum_{j=1,j\neq i}^{2} \iint_{]0,T[\times\omega} |\varphi_j|^2\,dt\,dx, \tag{8.2}$$

avec $C > 0$ ne dépendant que de Ω et de ω.

Cette inégalité sera une conséquence directe d'une inégalite de type Carleman. On considère des fonctions poids :

$$\begin{aligned} &\alpha(t,x) = \frac{\exp\{20\lambda\|\eta^0\|_\infty\} - \exp\{\lambda(18\|\eta^0\|_\infty + \eta^0(x))\}}{t^9(T-t)^9}, \\ &\alpha^*(t) = \max_{x\in\overline{\Omega}} \alpha(t,x), \quad \xi(t,x) = \frac{e^{\lambda(18\|\eta^0\|_\infty+\eta^0(x))}}{t^9(T-t)^9}, \quad \xi^*(t) = \min_{x\in\overline{\Omega}} \xi(t,x). \end{aligned} \tag{8.3}$$

Ici, $\eta^0 \in C^2(\overline{\Omega})$ satisfait

$$|\nabla\eta^0| > 0 \ \text{ dans } \overline{\Omega}\setminus\omega_0, \quad \eta^0 > 0 \ \text{ dans } \Omega \quad \text{et} \quad \eta^0 \equiv 0 \ \text{ sur } \partial\Omega, \tag{8.4}$$

où ω_0 est un ouvert non vide de $\mathbb{R}^2$ tel que $\overline{\omega}_0 \subset \omega$.

Fixons, par exemple, $i = 2$. On donne l'inégalité de Carleman :

Proposition 13. *Il existe une constante positive C ne dépendant que de Ω et de ω telle que*

$$\begin{aligned} &s^8\lambda^{10} \iint_{]0,T[\times\Omega} e^{-2s\alpha}\xi^8|\varphi_1|^2 dt\,dx + s^6\lambda^8 \iint_{]0,T[\times\Omega} e^{-2s\alpha^*}(\xi^*)^6|\varphi_2|^2 dt\,dx \\ &\leq Cs^9\lambda^{10} \iint_{]0,T[\times\omega} e^{-2s\alpha}\xi^9|\varphi_1|^2 dt\,dx, \end{aligned} \tag{8.5}$$

pour tout $s \geq C(T^9 + T^{18})$ et tout $\lambda \geq C$.

On applique l'opérateur $\nabla\Delta = (\partial_1\Delta, \partial_2\Delta)$ à l'équation de φ_1. En posant $\psi_1 := \nabla\Delta\varphi_1 \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\psi_{1,t} + \Delta\psi_1 = 0 \ \text{ dans }]0,T[\times\Omega. \tag{8.6}$$

On applique l'inégalité de Carleman démontrée dans [45] à ψ_1 :

$$I_w(s,\lambda;\psi_1) \leq C\left(s^3\lambda^4 \iint_{]0,T[\times\omega_0} e^{-2s\alpha}\xi^3|\psi_1|^2\,dt\,dx + s\lambda \iint_{]0,T[\times\partial\Omega} e^{-2s\alpha^*}\xi^*\left|\frac{\partial\psi_1}{\partial n}\right|^2 d\sigma\,dt\right), \tag{8.7}$$

pour tout $\lambda \geq C$ et tout $s \geq C(T^9 + T^{18})$.

La preuve de (8.5) est faite en 3 étapes :

• On minore $I_w(s,\lambda;\psi_1)$ par le membre de gauche de (8.5).

En utilisant des propriétés de la fonction poids, on peut minorer le gradient d'une fonction par la fonction elle même :

$$\begin{aligned} &s^5\lambda^6 \iint_{]0,T[\times\Omega} e^{-2s\alpha}\xi^5|\Delta\varphi_1|^2 dt\,dx - Cs^5\lambda^6 \iint_{]0,T[\times\omega_0} e^{-2s\alpha}\xi^5|\Delta\varphi_1|^2 dt\,dx, \\ &\leq Cs^3\lambda^4 \iint_{]0,T[\times\Omega} e^{-2s\alpha}\xi^3|\psi_1|^2 dt\,dx, \end{aligned} \tag{8.8}$$

pour tout $\lambda \geq C$ et tout $s \geq CT^{18}$. Maintenant, on utilise l'inégalité de Carleman classique pour le laplacien pour obtenir des termes en $|\varphi_1|^2$ et $|\nabla\varphi_1|^2$. Après quelques simplifications, on obtient :

$$\begin{aligned} &s^8\lambda^{10}\iint_{]0,T[\times\Omega} e^{-2s\alpha}\xi^8|\varphi_1|^2\,dt\,dx + s^6\lambda^8\iint_{]0,T[\times\Omega} e^{-2s\alpha}\xi^6|\nabla\varphi_1|^2\,dt\,dx \\ &+s^5\lambda^6\iint_{]0,T[\times\Omega} e^{-2s\alpha}\xi^5|\Delta\varphi_1|^2 dt\,dx \leq C\left(s^3\lambda^4\iint_{]0,T[\times\Omega} e^{-2s\alpha}\xi^3|\psi_1|^2 dt\,dx\right. \\ &\left.+s^8\lambda^{10}\iint_{]0,T[\times\omega_0} e^{-2s\alpha}\xi^8|\varphi_1|^2\,dt\,dx + s^5\lambda^6\iint_{]0,T[\times\omega_0} e^{-2s\alpha}\xi^5|\Delta\varphi_1|^2\,dt\,dx\right), \end{aligned} \tag{8.9}$$

pour tout $s \geq C(T^9 + T^{18})$ et tout $\lambda \geq C$.

Enfin, on utilise la condition de divergence nulle pour estimer φ_2 en fonction de φ_1 :

$$s^6\lambda^8\iint_{]0,T[\times\Omega} e^{-2s\alpha^*}(\xi^*)^6|\varphi_2|^2\,dt\,dx \leq s^6\lambda^8\iint_{]0,T[\times\Omega} e^{-2s\alpha}\xi^6|\nabla\varphi_1|^2\,dt\,dx. \tag{8.10}$$

• Dans une deuxième étape, on majore la dérivée normale qui apparait au second membre de (8.7).

On pose

$$\widetilde{\varphi} := \theta_1(t)\varphi \quad \text{et} \quad \widetilde{\pi} := \theta_1(t)\pi,$$

avec $\theta_1(T) = 0$. On a alors le système suivant :

$$\begin{cases} -\widetilde{\varphi}_t - \Delta\widetilde{\varphi} + \nabla\widetilde{\pi} = -\theta_{1,t}\varphi & \text{dans }]0,T[\times\Omega, \\ \nabla\cdot\widetilde{\varphi} = 0 & \text{dans }]0,T[\times\Omega, \\ \widetilde{\varphi} = 0 & \text{sur }]0,T[\times\partial\Omega, \\ \widetilde{\varphi}_{|t=T} = 0 & \text{dans } \Omega. \end{cases} \tag{8.11}$$

En utilisant des résultats de régularité pour le système de Stokes, on arrive à :

$$\left\| s^{1/2}\lambda^{1/2}e^{-s\alpha^*}(\xi^*)^{1/2}\frac{\partial\nabla\Delta\varphi_1}{\partial n}\right\|^2_{L^2(]0,T[\times\partial\Omega)} \leq C\|s^3\lambda^{1/2}e^{-s\alpha^*}(\xi^*)^3\varphi\|^2_{L^2(]0,T[\times\Omega)}, \tag{8.12}$$

pour tout $\lambda \geq C$ et tout $s \geq CT^9$. Voir [27] pour plus de détails.

Avec les deux premières étapes, on a :

$$\begin{aligned} &s^8\lambda^{10}\iint_{]0,T[\times\Omega} e^{-2s\alpha}\xi^8|\varphi_1|^2\,dt\,dx + s^6\lambda^8\iint_{]0,T[\times\Omega} e^{-2s\alpha^*}(\xi^*)^6|\varphi_2|^2\,dt\,dx \\ &s\lambda^2\iint_{]0,T[\times\Omega} e^{-2s\alpha}\xi(|\Delta^2\varphi_1|^2 + s^2\lambda^2\xi^2|\nabla\Delta\varphi_1|^2 + s^4\lambda^4\xi^4|\Delta\varphi_1|^2)\,dt\,dx \\ &\leq C\left(s^8\lambda^{10}\iint_{]0,T[\times\omega_0} e^{-2s\alpha}\xi^8|\varphi_1|^2\,dt\,dx + s^5\lambda^6\iint_{]0,T[\times\omega_0} e^{-2s\alpha}\xi^5|\Delta\varphi_1|^2\,dt\,dx\right. \\ &\quad\left.+s^3\lambda^4\iint_{]0,T[\times\omega_0} e^{-2s\alpha}\xi^3|\nabla\Delta\varphi_1|^2\,dt\,dx\right), \end{aligned} \tag{8.13}$$

pour tout $s \geq C(T^9 + T^{18})$ et tout $\lambda \geq C$.

• Dans la dernière étape, on utilise les techniques habituelles de localisation pour majorer les termes locaux de (8.13) en fonction de $|\varphi_1|^2$ et des intégrales qui peuvent être absorbées par la partie gauche de (8.13).

8.2 Contrôlabilité locale à zéro de Navier-Stokes sur le tore avec un contrôle scalaire

Soit $T > 0$, $L_1 > 0$ et $L_2 > 0$ et soit $\mathbb{T}_2$ le tore $(\mathbb{R}/L_1\mathbb{Z}) \times (\mathbb{R}/L_2\mathbb{Z})$. On considère le système de Navier-Stokes :

$$\begin{cases} y_t - \Delta y + (y \cdot \nabla)y + \nabla p = (v_1, 0)1_\omega & \text{dans }]0, T[\times\mathbb{T}_2, \\ \nabla \cdot y = 0 & \text{dans }]0, T[\times\mathbb{T}_2, \\ y(0, x) = y^0(x) & \text{dans } \mathbb{T}_2, \end{cases} \tag{8.14}$$

On introduit les espaces

$$H := \left\{y = (y_1, y_2) \in L^2(\mathbb{T}_2)^2 : \nabla \cdot y = 0\right\} \tag{8.15}$$

et

$$H_0 := \left\{y = (y_1, y_2) \in H : \int_{\mathbb{T}_2} y_2 dx = 0\right\}. \tag{8.16}$$

On peut voir facilement que l'espace H_0 est invariant pour le système de contrôle (8.14), c'est-à-dire, pour tout $y^0 \in H_0$ et tout $v_1 \in L^2(]0, T[\times\mathbb{T}_2)$, la solution y de (8.14) satisfait $y(t, \cdot) \in H_0$ pour tout $t \in [0, T]$.

Notre résultat principal est la contrôlabilité locale de (8.14) dans H_0 (voir [28]) :

Théorème 26. *Pour tout $T > 0$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que, pour tout $y^0 \in H_0$ satisfaisant $\|y^0\|_{L^2(\mathbb{T}_2)^2} < \eta$, il existe un contrôle $v_1 \in L^2(]0, T[\times\mathbb{T}_2)$ avec $\|v_1\|_{L^2(]0,T[\times\mathbb{T}_2)} \leqslant \varepsilon$ tel que la solution $y \in L^2(0, T; H^1(\mathbb{T}_2))^2 \cap H^1(0, T; H^{-1}(\mathbb{T}_2))^2$ de (8.14) satisfait*

$$y(T, \cdot) = 0 \textit{ dans } \mathbb{T}_2. \tag{8.17}$$

Pour avoir une idée de la difficulté de contrôler ce système, regardons le problème linéarisé autour de zéro :

$$\begin{cases} y_t - \Delta y + \nabla p = (v_1, 0)1_\omega & \text{dans }]0, T[\times\mathbb{T}_2, \\ \nabla \cdot y = 0 & \text{dans }]0, T[\times\mathbb{T}_2. \end{cases} \tag{8.18}$$

Comme pour le problème non linéaire (8.14), l'espace H_0 est invariant pour (8.18). Par contre, le système linéaire (8.18) n'est pas contrôlable dans l'espace H_0. En fait, soit $n \in \mathbb{Z}$, $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ et $\zeta \in C^\infty(\mathbb{T}_2)$ donné par

$$\zeta(x_1, x_2) := \lambda_1 \sin\left(\frac{2n\pi x_1}{L_1}\right) + \lambda_2 \cos\left(\frac{2n\pi x_1}{L_1}\right), \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{T}_2. \tag{8.19}$$

On multiplie la deuxième équation de (8.18) par ζ. En intégrant cette nouvelle identité sur $\mathbb{T}_2$, on arrive à

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{T}_2} \zeta y_2 dx = -\frac{4n^2\pi^2}{L_1^2}\int_{\mathbb{T}_2} \zeta y_2 dx \tag{8.20}$$

quelque soit le contrôle v_1. En particulier,

$$\left(\int_{\mathbb{T}_2} \zeta y_2^0 dx \neq 0\right) \Rightarrow ((y(T, \cdot) \neq 0).$$

Cela veut dire que l'on doit se servir du terme non linéaire $(y \cdot \nabla)y$ dans (8.14) pour démontrer le Théorème 26.

La stratégie que l'on utilise est la méthode du retour qui a été introduite dans [22]. Dans notre cadre, on doit trouver une trajectoire $\overline{y}$ de (8.14) telle que

1. le système de contrôle linéarisé autour de $\overline{y}$ soit contrôlable à zéro (dans H_0),
2. la trajectoire $\overline{y}$ satisfasse $\overline{y}(0, \cdot) = \overline{y}(T, \cdot) = 0$.

Une fois la trajectoire construite, la preuve de la contrôlabilité du problème linéaire autour de $\overline{y}$ est faite en deux temps :

• On démontre que ce système linéaire est contrôlable à zéro avec des contrôles ayant deux composantes non nulles mais avec la restriction que la deuxième composante du contrôle ait une moyenne nulle sur $\mathbb{T}_2$.

• On élimine la deuxième composante du contrôle, en gardant la propriété de nulle contrôlabilité. Ceci est fait algébriquement.

La dernière étape consiste à appliquer le Théorème d'Inversion Locale pour passer au problème non linéaire.

Tous les détails de la preuve du Théorème 26 peuvent être trouvés dans [28].

Chapitre 9

Un résultat de régularité pour un système fluide-solide associé aux équations de Navier-Stokes compressibles

9.1 Introduction

Nous nous sommes intéressés à un système couplé d'une structure rigide et un fluide visqueux compressible qui l'entoure dans un domaine régulier et borné $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Au temps t, on note $\Omega_S(t)$ le domaine occupé par le solide et $\Omega_F(t) := \Omega \setminus \overline{\Omega_S(t)}$ le domaine occupé par le fluide. La vitesse et la densité du fluide satisfont les équations de Navier-Stokes compressibles : pour tout $t \in]0, T[$ et tout $x \in \Omega_F(t)$, on a

$$\begin{cases} (\rho_t + \nabla \cdot (\rho u))(t, x) = 0, \\ (\rho u_t + \rho(u \cdot \nabla)u)(t, x) - \nabla \cdot (2\mu\epsilon(u) + \mu'(\nabla \cdot u)Id)(t, x) + \nabla p(t, x) = 0, \end{cases} \tag{9.1}$$

où $\epsilon(u) := \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^t)$ est le gradient symétrique et μ, $\mu' \in \mathbb{R}$ satisfont

$$\mu > 0, \;\; \mu' \geq 0.$$

Nous supposons que la pression est donnée par

$$p := P(\rho) \text{ où } P \in C^\infty(\mathbb{R}_+^*),\; P(\rho) > 0 \text{ et } P'(\rho) > 0 \;\forall \rho > 0.$$

Beaucoup de travaux ont été consacrés à l'étude des équations de Navier-Stokes compressibles. Pour une liste exhaustive de références, on pourra consulter les livres [44] et [91]. Un résultat d'existence locale en temps et d'unicité de solutions régulières a été démontré dans [107]. Pour les fluides isentropiques ($P(\rho) = \rho^\gamma$ avec $\gamma > 0$), les travaux [72] pour $\gamma = 1$ et [73] pour $\gamma > 1$ montrent l'existence global de solution faible pour des données petites. Le premier résultat global d'existence pour des données grandes a été démontré dans [90] avec $\gamma \geq 9/5$ en dimension $N = 3$ et avec $\gamma > N/2$ pour $N \geq 4$. Ces hypothèses sur γ ont été améliorées dans [42] qui a obtenu le même résultat avec $\gamma > N/2$ pour $N \geq 3$.

On décrit maintenant le mouvement de la structure. Au temps t, le mouvement de la structure rigide est donné par la position $a(t) \in \mathbb{R}^3$ du centre de masse et par une matrice (orthogonale) de rotation $Q(t) \in \mathbb{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$. Sans perte de généralité, on peut supposer que

$$a(0) = 0 \text{ et } Q(0) = Id. \tag{9.2}$$

Au temps t, le domaine $\Omega_S(t)$ est défini par

$$\Omega_S(t) = \chi_S(t, \Omega_S(0)), \tag{9.3}$$

où χ_S désigne le flot associé au mouvement de la structure :

$$\chi_S(t,y) = a(t) + Q(t)y, \ \forall y \in \Omega_S(0), \ \forall t > 0. \tag{9.4}$$

On remarque que, pour chaque $t > 0$, $\chi_S(t,\cdot) : \Omega_S(0) \to \Omega_S(t)$ est inversible et

$$\chi_S(t,\cdot)^{-1}(x) = Q(t)^{-1}(x - a(t)), \ \forall x \in \Omega_S(t).$$

De plus, la vitesse Eulerienne de la structure est donnée par

$$(\chi_S)_t(t,\cdot) \circ \chi_S(t,\cdot)^{-1}(x) = \dot{a}(t) + \dot{Q}(t)Q(t)^{-1}(x - a(t)), \ \forall x \in \Omega_S(t).$$

Comme $\dot{Q}(t)Q(t)^{-1}$ est anti-symétrique, pour chaque $t > 0$, on peut représenter cette matrice par un seul vecteur $\omega(t) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$\dot{Q}(t)Q(t)^{-1}y = \omega(t) \wedge y, \ \forall y \in \mathbb{R}^3.$$

Inversement, si ω appartient à $L^2(0,T)$, il existe une seule matrice $Q \in H^1(0,T)$ telle que $Q(0) = Id$ et qui satisfait cette formule. Par conséquent, la vitesse eulerienne u_S est donnée par

$$u_S(t,x) = \dot{a}(t) + \omega(t) \wedge (x - a(t)), \ \forall x \in \Omega_S(t). \tag{9.5}$$

On désigne par $m > 0$ la masse de la structure rigide et $J(t) \in \mathbb{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ son tenseur d'inertie au temps t. Ce tenseur est donné par

$$J(t)b \cdot \tilde{b} = \int_{\Omega_S(0)} \rho_{0,S}(y)\big(b \wedge Q(t)y\big) \cdot \big(\tilde{b} \wedge Q(t)y\big)\, dy \quad \forall b, \, \tilde{b} \in \mathbb{R}^3, \tag{9.6}$$

où $\rho_{0,S} > 0$ est la densité initiale de la structure. On peut démontrer aisément que

$$J(t)b \cdot b \geq C_J|b|^2 > 0 \ \text{ for all } b \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}, \tag{9.7}$$

où C_J est indépendant de $t > 0$. Les équations du mouvement de la structure sont, pour chaque $t \in (0,T)$,

$$\begin{cases} m\ddot{a} = \displaystyle\int_{\partial\Omega_S(t)} \big(2\mu\epsilon(u) + \mu'(\nabla \cdot u)Id - pId\big)n \, d\gamma, \\ J\dot{\omega} = \big(J\omega\big) \wedge \omega + \displaystyle\int_{\partial\Omega_S(t)} (x - a) \wedge \Big(\big(2\mu\epsilon(u) + \mu'(\nabla \cdot u)Id - pId\big)n\Big) \, d\gamma. \end{cases} \tag{9.8}$$

Dans ces équations, n est le vecteur unitaire extérieur à $\partial\Omega_S(t)$. Sur le bord du fluide, la vitesse eulerienne doit satisfaire une condition de non-glissement. On a donc, pour tout $t > 0$,

$$\begin{cases} u(t,x) = 0, \forall x \in \partial\Omega, \\ u(t,x) = \dot{a}(t) + \omega(t) \wedge (x - a(t)), \, \forall \, x \in \partial\Omega_S(t). \end{cases} \tag{9.9}$$

Ce système est complété par des conditions initiales :

$$u(0,\cdot) = u_0 \text{ dans } \Omega_F(0), \ \rho(0,\cdot) = \rho_0 \text{ dans } \Omega_F(0), \ a(0) = 0, \ \dot{a}(0) = a_0, \ \omega(0) = \omega_0, \tag{9.10}$$

qui satisfont

$$a_0, \, \omega_0 \in \mathbb{R}^3, \ \ \rho_0, \, u_0 \in H^3(\Omega_F(0)), \ \ \rho_0(x) > 0, \, \forall x \in \Omega_F(0). \tag{9.11}$$

Quelques conditions de compatibilité seront aussi nécessaires :

$$u_0 = a_0 + \omega_0 \wedge x \text{ sur } \partial\Omega_S(0), \quad u_0 = 0 \text{ sur } \partial\Omega \tag{9.12}$$

et

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\rho_0}\nabla \cdot (2\mu\epsilon(u_0) + \mu'(\nabla \cdot u_0)Id) - \frac{1}{\rho_0}\nabla P(\rho_0) = \frac{1}{m}\int_{\partial\Omega_S(0)} (2\mu\epsilon(u_0) + \mu'(\nabla \cdot u_0)Id - P(\rho_0)Id)n \, d\gamma \\ &+(J(0)^{-1}(J(0)\omega_0) \wedge \omega_0) \wedge x + J(0)^{-1}\left(\int_{\partial\Omega_S(0)} x \wedge ((2\mu\epsilon(u_0) + \mu'(\nabla \cdot u_0)Id - P(\rho_0)Id)n) \, d\gamma\right) \wedge x \\ &+\omega_0 \wedge (\omega_0 \wedge x) \quad \text{ sur } \ \partial\Omega_S(0), \\ &\nabla \cdot (2\mu\epsilon(u_0) + \mu'(\nabla \cdot u_0)Id) - \nabla P(\rho_0) = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{9.13}$$

La littérature des problèmes de fluide-structure est très vaste. La plupart des travaux concernent les fluides incompressibles modélisés par les équations de Navier-Stokes incompressibles. Pour le couplage d'un fluide incompressible et d'une structure rigide, on peut se référer à [64] où il est montré l'existence locale en temps des solutions faibles, et les travaux [21] et [33] (avec densité variable) qui démontrent l'existence globale de solutions faibles. Par "existence globale", on entend que la solution existe tant qu'il n'y a pas de choc entre une structure et le bord extérieur ou entre deux structures. Dans [104] les auteurs montrent l'existence globale de solutions faibles au-delà des chocs et dans [106] l'auteur montre l'existence et l'unicité de solutions fortes (globale en 2D et locale en 3D). Enfin, dans [70] et [71], une étude des collisions est faite en 2D et 3D.
Quant aux fluides compressibles, l'existence globale de solutions faibles pour l'interaction avec une structure rigide est obtenue dans [33] (avec $\gamma \geq 2$) et dans [43] (avec $\gamma > N/2$).

On introduit maintenant quelques notations. Soit $h \in]0,+\infty]$ et $(\dot{a},\omega) \in (H^2(0,h) \cap W^{1,\infty}(0,h))^2$ donnés. Pour commencer, on définit

$$Z_h := \{(s,x) : s \in (0,h),\, x \in \Omega_F(s)\},\ \Sigma_h := \{(s,x) : s \in (0,h),\, x \in \partial\Omega_S(s)\}. \tag{9.14}$$

Ensuite, pour r, $p \geq 0$ entiers naturels, on introduit

$$L^2_h(L^2) := L^2(Z_h) = \left\{ u \text{ mesurable } : \int_0^h \int_{\Omega_F(s)} |u|^2 \, dx \, ds < +\infty \right\},$$

$$L^2_h(H^p) := \left\{ u \in L^2_h(L^2) : \int_0^h \|u\|^2_{H^p(\Omega_F(s))} \, ds < +\infty \right\},$$

$$H^r_h(H^p) := \left\{ u \in L^2_h(L^2) : \int_0^h \sum_{\beta=0}^r \|\partial_t^\beta u\|^2_{H^p(\Omega_F(s))} \, ds < +\infty \right\},$$

avec les normes associées correspondantes. On pose aussi

$$C^0_h(L^2) := \{u \text{ tel que } \hat{u}(s,x) := u(s,x)1_{\Omega_F(s)} \in C^0([0,h];L^2(\Omega))\}$$

et

$$C^r_h(H^p) := \{u : \partial_t^\beta \partial_x^\alpha u \in C^0_h(L^2),\ \forall 0 \leq \beta \leq r,\ \forall 0 \leq |\alpha| \leq p\}$$

avec les normes

$$\|u\|_{C^0_h(L^2)} := \max_{t\in(0,h)} \|u(t)\|_{L^2(\Omega_F(t))} = \max_{t\in(0,h)} \|\hat{u}(t)\|_{L^2(\Omega)}$$

et

$$\|u\|_{C^r_h(H^p)} := \sum_{\beta=0}^r \max_{t\in(0,h)} \|\partial_t^\beta u(t)\|_{H^p(\Omega_F(t))}.$$

Dans cette partie du mémoire on montre l'existence et l'unicité de solutions globales régulières pour des données initiales petites ([12]) :

Théorème 27. *Soit $\overline{\rho}$ la moyenne de ρ_0 dans $\Omega_F(0)$. On suppose que les conditions initiales satisfont (9.2) et (9.11), ainsi que les conditions de compatibilité (9.12)-(9.13). Alors, il existe une constante $\delta > 0$ telle que, si*

$$\|\rho_0 - \overline{\rho}\|_{H^3(\Omega_F(0))} + \|u_0\|_{H^3(\Omega_F(0))} + |a_0| + |\omega_0| < \delta, \tag{9.15}$$

le système d'équations (9.1), (9.8), (9.9) et (9.10) admet une unique solution (ρ,u,a,ω) définie dans $(0,T)$ pour tout T tel que $d(\Omega_S(t),\partial\Omega) \geq C > 0\, \forall t \in [0,T]$. De plus, cette solution appartient à

$$\rho \in L^2_T(H^3) \cap C^0_T(H^3) \cap H^1_T(H^2) \cap C^1_T(H^2) \cap H^2_T(L^2),$$

$$u \in L^2_T(H^4) \cap C^0_T(H^3) \cap C^1_T(H^1) \cap H^2_T(L^2),\ \dot{a} \in H^2(0,T) \cap C^1([0,T]),\ \omega \in H^2(0,T) \cap C^1([0,T])$$

et il existe une constante positive C_1 indépendante de T telle que

$$\begin{aligned}\|\rho-\overline{\rho}\|_{L^2_T(H^3)}+\|\rho-\overline{\rho}\|_{L^\infty_T(H^3)}+\|\rho-\overline{\rho}\|_{W^{1,\infty}_T(H^2)}+\|\rho-\overline{\rho}\|_{H^2_T(L^2)}+\|\rho-\overline{\rho}\|_{H^1_T(H^2)}\\ +\|u\|_{L^2_T(H^4)}+\|u\|_{L^\infty_T(H^3)}+\|u\|_{W^{1,\infty}_T(H^1)}+\|u\|_{H^2_T(L^2)}+\|\dot{a}\|_{W^{1,\infty}_T}+\|\dot{a}\|_{H^2_T}+\|\omega\|_{W^{1,\infty}_T}\\ +\|\omega\|_{H^2_T}\le C_1(\|\rho_0-\overline{\rho}\|_{H^3(\Omega_F(0))}+\|u_0\|_{H^3(\Omega_F(0))}+|a_0|+|\omega_0|).\end{aligned} \tag{9.16}$$

Pour chaque $0\le h\le+\infty$, on définit l'espace

$$\begin{aligned}X(0,h)=\{(\rho,u,a,\omega):(\rho,u)\in C^0_h(H^3)\cap L^2_h(H^3)\cap C^1_h(H^2)\cap H^1_h(H^2)\cap H^2_h(L^2))\\ \times(L^2_h(H^4)\cap C^0_h(H^3)\cap H^1_h(H^2)\cap C^1_h(H^1)\cap H^2_h(L^2)),\ (\dot{a},\omega)\in(C^1_h\cap H^2_h)^2\}\end{aligned}$$

muni de la norme suivante :

$$\begin{aligned}N_{0,h}(\rho,u,a,\omega)=\Big(\|\rho\|^2_{L^\infty_h(H^3)}+\|\rho\|^2_{L^2_h(H^3)}+\|\rho\|^2_{W^{1,\infty}_h(H^2)}+\|\rho\|^2_{H^1_h(H^2)}+\|\rho\|^2_{H^2_h(L^2)}\\ +\|u\|^2_{L^2_h(H^4)}+\|u\|^2_{L^\infty_h(H^3)}+\|u\|^2_{H^1_h(H^2)}+\|u\|^2_{W^{1,\infty}_h(H^1)}+\|u\|^2_{H^2_h(L^2)}\\ +\|\dot{a}\|^2_{W^{1,\infty}_h}+\|\dot{a}\|^2_{H^2_h}+\|\omega\|^2_{W^{1,\infty}_h}+\|\omega\|^2_{H^2_h}\Big)^{1/2}.\end{aligned} \tag{9.17}$$

Pour chaque $0\le h\le+\infty$, on utilisera aussi la notation

$$X(h,h)=\{(\rho_h,u_h,a_h,\omega_h):\rho_h\in H^3(\Omega(h)),\ u_h\in H^3(\Omega(h)),\ a_h\in\mathbb{R}^3,\ \omega_h\in\mathbb{R}^3\}.$$

La preuve du Théorème 27 est divisée en deux parties : d'abord, un résultat d'existence locale et ensuite quelques estimations a priori pour notre système. Nous énonçons les deux résultats séparément :

Proposition 14. *Soit $h\ge 0$:*

- *Pour $h=0$, soit $(\rho_0,u_0,a_0,\omega_0)$ satisfaisant (9.11)-(9.13).*
- *Pour $h>0$, on suppose que (9.1), (9.8), (9.9) et (9.10) admet une unique solution (ρ,u,a,ω) dans $X(0,h)$ satisfaisant $d(\Omega_S(t),\partial\Omega)\ge\alpha>0\,\forall t\in[0,h]$ pour un certain $\alpha>0$ indépendant de h.*

Alors, il existe trois constantes δ_0, $\tau>0$ et $C_2>0$ indépendantes de h (pour $h=0$, indépendantes des conditions initiales) telles que, si $N_{h,h}(\rho-\overline{\rho},u,a,\omega)\le\delta_0$, le problème (9.1), (9.8), (9.9) et (9.10) a une seule solution (ρ,u,a,ω) définie sur $(h,h+\tau)$ et satisfaisant

$$(\rho,u,a,\omega)\in X(h,h+\tau),\ N_{h,h+\tau}(\rho-\overline{\rho},u,a,\omega)\le C_2N_{h,h}(\rho-\overline{\rho},u,a,\omega).$$

On présente maintenant les estimations a priori :

Proposition 15. *On suppose qu'il existe un temps $T>0$ tel que le problème (9.1),(9.8), (9.9) et (9.10) admet une solution (ρ,u,a,ω) dans $X(0,T)$. Alors, il existe deux constantes $0<\delta_1\le\delta_0$ et $C_3>0$ indépendantes de T telles que si $N_{0,T}(\rho-\overline{\rho},u,a,\omega)\le\delta_1$ alors*

$$N_{0,T}(\rho-\overline{\rho},u,a,\omega)\le C_3N_{0,0}(\rho-\overline{\rho},u,a,\omega). \tag{9.18}$$

Preuve du Théorème 27 : On applique successivement la Proposition 14 et la Proposition 15. On suppose que

$$N_{0,0}(\rho-\overline{\rho},u,a,\omega)\le\min\left(\delta_0,\frac{\delta_1}{C_2},\frac{\delta_1}{C_3\sqrt{1+C_2^2}}\right).$$

D'après la Proposition 14 pour $h=0$, on peut définir sur $(0,\tau)$ une solution $(\rho,u,a,\omega)\in X(0,\tau)$ telle que

$$N_{0,\tau}(\rho-\overline{\rho},u,a,\omega)\le C_2N_{0,0}(\rho-\overline{\rho},u,a,\omega)\le\delta_1\le\delta_0.$$

Grâce à $N_{\tau,\tau}(\rho-\overline{\rho},u,a,\omega)\le N_{0,\tau}(\rho-\overline{\rho},u,a,\omega)$, on peut appliquer de nouveau la Proposition 14.

Notre solution peut être étendue à $(\tau,2\tau)$ et $N_{\tau,2\tau}(\rho-\overline{\rho},u,a,\omega)\le C_2N_{0,\tau}(\rho-\overline{\rho},u,a,\omega)$. Donc,

$$N^2_{0,2\tau}(\rho-\overline{\rho},u,a,\omega)=(N^2_{0,\tau}+N^2_{\tau,2\tau})(\rho-\overline{\rho},u,a,\omega)\le(1+C_2^2)N^2_{0,\tau}(\rho-\overline{\rho},u,a,\omega).$$

Grâce au choix de $N_{0,0}(\rho - \overline{\rho}, u, a, \omega)$ et en utilisant la Proposition 15 pour $T = \tau$, on obtient

$$N_{0,2\tau}(\rho - \overline{\rho}, u, a, \omega) \leq C_3 \sqrt{1 + C_2^2} N_{0,0}(\rho - \overline{\rho}, u, a, \omega) \leq \delta_1.$$

Ceci permet de répéter ce procédé et d'obtenir l'existence d'une solution régulière pourvu que la distance de $\overline{\Omega_S(t)}$ au bord $\partial\Omega$ soit strictement positive.

9.2 Existence locale de solution

On donne l'idée de la preuve dans le cas $h = 0$.

D'abord, on réécrit les équations dans les domaines de référence $\Omega_S(0)$ et $\Omega_F(0)$ à l'aide d'un prolongement du flot χ_S (on appelle χ ce prolongement). Soit (ρ, u, a, ω) une solution du système (9.1)-(9.8)-(9.9). On considère les fonctions $\tilde{u}$, $\tilde{\rho}$ et $\tilde{p}$ dans $V_T := (0, T) \times \Omega_F(0)$ données par

$$\tilde{u}(t, y) = u(t, \chi(t, y)),\ \tilde{\rho}(t, y) = \rho(t, \chi(t, y)) - \overline{\rho},\ \tilde{p}(t, y) = P(\tilde{\rho}(t, y) + \overline{\rho}),\ \forall (t, y) \in V_T. \tag{9.19}$$

On note (m, J, μ, μ') au lieu de $(m/\overline{\rho}, J/\overline{\rho}, \mu/\overline{\rho}, \mu'/\overline{\rho})$ et on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} \tilde{\rho}_t + ((\nabla\chi)^{-1}(\tilde{u} - \chi_t)) \cdot \nabla\tilde{\rho} + \overline{\rho}\, \nabla \cdot \tilde{u} = g_0(\tilde{\rho}, \tilde{u}, a, \omega) & \text{dans } V_T, \\ \tilde{u}_t - \nabla \cdot \sigma(\tilde{u}, \tilde{\rho}) = g_1(\tilde{\rho}, \tilde{u}, a, \omega) & \text{dans } V_T, \\ m\ddot{a} = \displaystyle\int_{\partial\Omega_S(0)} \sigma(\tilde{u}, \tilde{\rho}) n \, d\gamma + g_2(\tilde{\rho}, \tilde{u}, a, \omega) & \text{dans } (0, T), \\ J\dot{\omega} = \displaystyle\int_{\partial\Omega_S(0)} (Qy) \wedge (\sigma(\tilde{u}, \tilde{\rho}) n) \, d\gamma + g_3(\tilde{\rho}, \tilde{u}, a, \omega) & \text{dans } (0, T), \\ \tilde{u} = 0 & \text{sur } (0, T) \times \partial\Omega, \\ \tilde{u} = \dot{a} + \omega \wedge (Qy) & \text{sur } (0, T) \times \partial\Omega_S(0), \\ \tilde{\rho}(0, \cdot) = \rho_0 - \overline{\rho},\ \ \tilde{u}(0, \cdot) = u_0 & \text{dans } \Omega_F(0), \\ a(0) = 0,\ \ \dot{a}(0) = a_0,\ \ \omega(0) = \omega_0, & \end{cases} \tag{9.20}$$

où $\sigma(u, \rho) := 2\mu\epsilon(u) + \mu'(\nabla \cdot u) Id - p^0 \rho Id$ et les fonctions g_i $(0 \leq i \leq 3)$ sont (au moins) quadratiques par rapport au quantités $\tilde{\rho}, \tilde{u}, (\nabla\chi)^{-1} - Id, Q - Id, \chi_t$.

L'idée de la preuve est d'appliquer un point fixe. Pour définir l'application de point fixe, soit $0 < \tilde{R} < 1$ et $0 < s < 1$ deux constantes suffisamment petites. On définit l'espace :

$$\tilde{Y}((0, s); \tilde{R}) = \left\{ (\tilde{\rho}, \tilde{u}_F, a, \omega) \in \tilde{X}(0, s) : \tilde{u}_F = 0 \text{ sur } \partial\Omega_F(0),\ a(0) = 0,\ Q(0) = Id,\ \tilde{N}_{0,s}(\tilde{\rho}, \tilde{u}_F, a, \omega) \leq \tilde{R} \right\},$$

où

$$\tilde{X}(0, s) = \{ (\tilde{\rho}, \tilde{u}, a, \omega) : \tilde{\rho} \in C_s^0(H^3(\Omega_F(0))) \cap C_s^1(H^2(\Omega_F(0))) \cap H_s^2(L^2(\Omega_F(0))),$$

$$\tilde{u} \in L_s^2(H^4(\Omega_F(0))) \cap H_s^2(L^2(\Omega_F(0))),\ a \in H_s^3,\ \omega \in H_s^2 \}$$

et $\tilde{N}_{0,s}(\tilde{\rho}, \tilde{u}_F, a, \omega)$ est la norme "naturelle" sur l'espace $\tilde{X}(0, s)$. On rappelle que Q est la matrice de rotation associée à ω. On définit l'application

$$\begin{array}{rccc} \Lambda : & \tilde{Y}((0, s); \tilde{R}) & \rightarrow & \tilde{Y}((0, s); \tilde{R}) \\ & (\hat{\rho}, \hat{u}_F, \hat{a}, \hat{\omega}) & \rightarrow & (\tilde{\rho}, \tilde{u}_F, a, \omega), \end{array}$$

où $\tilde{u}_F = \tilde{u} - \chi_t$, où $(\tilde{\rho}, \tilde{u}, a, \omega)$ est la solution de

$$\left\{\begin{array}{ll}
\tilde{\rho}_t + ((\nabla\hat{\chi})^{-1}(\hat{u} - \hat{\chi}_t)) \cdot \nabla\tilde{\rho} = g_0(\hat{\rho}, \hat{u}, \hat{a}, \hat{\omega}) - \overline{\rho}\,\nabla \cdot \tilde{u} & \text{dans } V_T, \\
\tilde{u}_t - \nabla \cdot (2\mu\epsilon(\tilde{u}) + \mu'(\nabla \cdot \tilde{u})Id) = g_1(\hat{\rho}, \hat{u}, \hat{a}, \hat{\omega}) - p^0\nabla\tilde{\rho} & \text{dans } V_T, \\
m\ddot{a} = \displaystyle\int_{\partial\Omega_S(0)} \sigma(\tilde{u}, \tilde{\rho})n\, d\gamma + g_2(\hat{\rho}, \hat{u}, \hat{a}, \hat{\omega}) & \text{dans } (0,T), \\
\hat{J}\dot{\omega} = \displaystyle\int_{\partial\Omega_S(0)} (\hat{Q}y) \wedge (\sigma(\tilde{u}, \tilde{\rho})n)\, d\gamma + g_3(\hat{\rho}, \hat{u}, \hat{a}, \hat{\omega}) & \text{dans } (0,T), \\
\tilde{u} = 0 & \text{sur } (0,T) \times \partial\Omega, \\
\tilde{u} = \dot{a} + \omega \wedge (\hat{Q}y) & \text{sur } (0,T) \times \partial\Omega_S(0), \\
\tilde{\rho}(0,\cdot) = \rho_0 - \overline{\rho}, \ \ \tilde{u}(0,\cdot) = u_0 & \text{dans } \Omega_F(0), \\
a(0) = 0, \ \ \dot{a}(0) = a_0, \ \ \omega(0) = \omega_0. &
\end{array}\right. \tag{9.21}$$

Ici, $\hat{u} = \hat{u}_F + \hat{\chi}_t$ et $\hat{J}$ est défini par (9.6) avec $\hat{Q}$ à la place de Q.

9.2.1 Λ est bien défini

Soit $(\hat{\rho}, \hat{u}, \hat{a}, \hat{\omega}) \in \tilde{Y}((0,s); \tilde{R})$. On peut démontrer qu'il existe $C > 0$ tel que

$$\|(\hat{\rho}, \hat{u}, \hat{a}, \hat{\omega})\|_{\tilde{X}(0,s)} + \|(\nabla\hat{\chi})^{-1} - Id\|_{H^3_s(C^\infty(\overline{\Omega_F(0)}))} + \|\hat{Q} - Id\|_{H^3_s} + \|\hat{\chi}_t\|_{H^2_s(C^\infty(\overline{\Omega_F(0)}))} \leq C\tilde{R}.$$

En utilisant le caractère quadratique des fonctions g_i $(0 \leq i \leq 3)$, on a

$$\begin{aligned}
&\|g_0(\hat{\rho}, \hat{u}, \hat{a}, \hat{\omega})\|_{L^2_s(H^3(\Omega_F(0)))\cap H^1_s(H^1(\Omega_F(0)))} + \|g_1(\hat{\rho}, \hat{u}, \hat{a}, \hat{\omega})\|_{L^2_s(H^2(\Omega_F(0)))\cap H^1_s(L^2(\Omega_F(0)))} \\
&+\|g_2(\hat{\rho}, \hat{u}, \hat{a}, \hat{\omega})\|_{H^1_s} + \|g_3(\hat{\rho}, \hat{u}, \hat{a}, \hat{\omega})\|_{H^1_s} \leq C\tilde{R}^2.
\end{aligned} \tag{9.22}$$

Estimations sur $\tilde{\rho}$

En utilisant que $\hat{u} - \hat{\chi}_t$ a une trace nulle, on montre

$$\|\tilde{\rho}\|_{L^\infty_s(H^3(\Omega_F(0)))} \leq C(\tilde{R}^2 + \|\rho_0 - \overline{\rho}\|_{H^3(\Omega_F(0))} + \tilde{N}_{0,s}(0, \tilde{u}, 0, 0)). \tag{9.23}$$

Finalement, on utilise l'équation de $\tilde{\rho}$ et on arrive à

$$\tilde{N}_{0,s}(\tilde{\rho}, 0, 0, 0) \leq C(\tilde{R}^2 + \|\rho_0 - \overline{\rho}\|_{H^3(\Omega_F(0))} + \tilde{N}_{0,s}(0, \tilde{u}, 0, 0)). \tag{9.24}$$

Estimations sur $\tilde{u}$, a et ω

- En multipliant l'équation de $\tilde{u}$ par $\tilde{u}$, on trouve l'existence de $C > 0$ tel que

$$\begin{aligned}
&\|\tilde{u}\|_{L^\infty_s(L^2(\Omega_F(0)))} + \|\tilde{u}\|_{L^2_s(H^1(\Omega_F(0)))} + \|a\|_{W^{1,\infty}_s} + \|\omega\|_{L^\infty_s} \\
&\qquad \leq C(\tilde{R}^2 + \|\rho_0 - \overline{\rho}\|_{H^3(\Omega_F(0))} + s^{1/2}\tilde{N}_{0,s}(0, \tilde{u}, 0, 0) + \|u_0\|_{L^2} + |a_0| + |\omega_0|).
\end{aligned} \tag{9.25}$$

- Ensuite, on multiplie l'équation de $\tilde{u}$ par $\tilde{u}_t$. Après quelques intégrations par parties, on obtient :

$$\begin{aligned}
&\|\tilde{u}\|_{H^1_s(L^2(\Omega_F(0)))} + \|\tilde{u}\|_{L^\infty_s(H^1(\Omega_F(0)))} + \|a\|_{H^2_s} + \|\omega\|_{H^1_s} \leq \tilde{R}\|\tilde{u}\|_{L^2_s(H^2(\Omega_F(0)))} \\
&+C(\tilde{R}^2 + \|\rho_0 - \overline{\rho}\|_{H^3(\Omega_F(0))} + s^{1/2}\tilde{N}_{0,s}(0, \tilde{u}, 0, 0) + \|u_0\|_{H^1(\Omega_F(0))} + |a_0| + |\omega_0|).
\end{aligned} \tag{9.26}$$

On regarde $\tilde{u}$ comme solution d'un problème stationnaire :

$$\left\{\begin{array}{ll}
-\mu\Delta\tilde{u} - (\mu + \mu')\nabla(\nabla \cdot \tilde{u}) = g_1 - p^0\nabla\tilde{\rho} - \tilde{u}_t & \text{dans } \Omega_F(0), \\
\tilde{u} = (\dot{a} + \omega \wedge (\widehat{Q}y))1_{\partial\Omega_S(0)} & \text{sur } \partial\Omega_F(0).
\end{array}\right. \tag{9.27}$$

On applique une estimation de type H^2 et on la combine avec (9.26) :

$$\begin{aligned}
&\|\tilde{u}\|_{H^1_s(L^2(\Omega_F(0)))} + \|\tilde{u}\|_{L^2_s(H^2(\Omega_F(0)))} + \|\tilde{u}\|_{L^\infty_s(H^1(\Omega_F(0)))} + \|a\|_{H^2_s} + \|\omega\|_{H^1_s} \\
&\leq C(\tilde{R}^2 + \|\rho_0 - \overline{\rho}\|_{H^3(\Omega_F(0))} + s^{1/2}\tilde{N}_{0,s}(0, \tilde{u}, 0, 0) + \|u_0\|_{H^1(\Omega_F(0))} + |a_0| + |\omega_0|).
\end{aligned} \tag{9.28}$$

• On dérive l'équation de $\tilde{u}$ par rapport à t, on la multiplie par $\tilde{u}_t$ et on utilise (9.22), (9.24) et (9.28) :

$$\|\tilde{u}\|_{W_s^{1,\infty}(L^2(\Omega_F(0)))} + \|\tilde{u}\|_{H_s^1(H^1(\Omega_F(0)))} + \|a\|_{W_s^{2,\infty}} + \|\omega\|_{W_s^{1,\infty}} \leq C \Big(\tilde{R}^2 + |\ddot{a}(0)| + |\dot{\omega}(0)|$$
$$+ \|\tilde{u}_t(0)\|_{L^2(\Omega_F(0))} + \|\rho_0 - \overline{\rho}\|_{H^3(\Omega_F(0))} + (s^{1/2} + \tilde{R})\tilde{N}_{0,s}(0, \tilde{u}, 0, 0) + \|u_0\|_{H^1(\Omega_F(0))} + |a_0| + |\omega_0| \Big). \tag{9.29}$$

• Ensuite, on dérive l'équation de $\tilde{u}$ par rapport à t, on la multiplie par $\tilde{u}_{tt}$. En utilisant l'équation

$$u_{tt} = \dddot{a} + \ddot{\omega} \wedge (\widehat{Q}y) + 2\dot{\omega} \wedge (\dot{\widehat{Q}}y) + \omega \wedge (\ddot{\widehat{Q}}y) \text{ sur } (0,T) \times \partial\Omega_S(0). \tag{9.30}$$

on obtient une estimation de $(\tilde{u}_{tt}, \dddot{a}, \ddot{\omega})$:

$$\|\tilde{u}_{tt}\|_{L_s^2(L^2(\Omega_F(0)))} + \|\tilde{u}_t\|_{L_s^\infty(H^1(\Omega_F(0)))} + \|\dddot{a}\|_{L_s^2} + \|\ddot{\omega}\|_{L_s^2} \leq C \big(|\ddot{a}(0)| + |\dot{\omega}(0)| + \|u_0\|_{H^1(\Omega_F(0))}$$
$$+ \tilde{R}^2 + \|\tilde{u}_t(0)\|_{H^1(\Omega_F(0))} + \|\rho_0 - \overline{\rho}\|_{H^3(\Omega_F(0))} + (s^{1/2} + \tilde{R})\tilde{N}_{0,s}(0, \tilde{u}, 0, 0) + |a_0| + |\omega_0| \Big). \tag{9.31}$$

Enfin, on utilise le système elliptique (9.27) à plusieurs reprises et on en déduit que

$$\tilde{N}_{0,s}(0, \tilde{u}, a, \omega) \leq C(\tilde{R}^2 + (s^{1/2} + \tilde{R})\tilde{N}_{0,s}(0, \tilde{u}, 0, 0) + \tilde{N}_{0,0}(\tilde{\rho}, \tilde{u}, a, \omega)).$$

Comme $\tilde{N}_{0,s}(0, \tilde{u}, 0, 0) \leq \tilde{N}_{0,s}(\tilde{\rho}, \tilde{u}, a, \omega)$ et s et $\tilde{R}$ sont suffisamment petits, on a

$$\tilde{N}_{0,s}(0, \tilde{u}, a, \omega) \leq C(\tilde{R}^2 + \tilde{N}_{0,0}(\tilde{\rho}, \tilde{u}, a, \omega)).$$

On combine ceci avec (9.24) et on tient compte de $\tilde{u}_F = \tilde{u} - \chi_t$ pour arriver à :

$$\tilde{N}_{0,s}(\tilde{\rho}, \tilde{u}_F, a, \omega) \leq C\tilde{N}_{0,s}(\tilde{\rho}, \tilde{u}, a, \omega) \leq C(\tilde{R}^2 + \tilde{N}_{0,0}(\tilde{\rho}, \tilde{u}, a, \omega)).$$

Donc, si $\tilde{N}_{0,0}(\tilde{\rho}, \tilde{u}, a, \omega) \sim \tilde{R}^2$ on conclut que $(\tilde{\rho}, \tilde{u}_F, a, \omega)$ appartient à $\tilde{Y}((0,s); \tilde{R})$.

9.2.2 Argument de point fixe

On démontre que Λ est une application continue dans $\tilde{Y}((0,s); \tilde{R})$ pour la norme $\|\cdot\|$ définie par

$$\|(\rho, u_F, a, \omega)\| = \|\rho\|_{L_s^\infty(H^1(\Omega_F(0)))} + \|u_F\|_{L_s^2(H^2(\Omega_F(0)))} + \|a\|_{H_s^2} + \|\omega\|_{H_s^1}. \tag{9.32}$$

Ceci donnera l'existence d'un point fixe d'après de Théorème de point fixe de Schauder.

Soit donc $(\hat{\rho}_k, \hat{u}_{F,k}, \hat{a}_k, \hat{\omega}_k)$ une suite qui converge vers $(\hat{\rho}, \hat{u}_F, \hat{a}, \hat{\omega})$ pour la norme $\|\cdot\|$. On note

$$(\tilde{\rho}_k, \tilde{u}_{F,k}, a_k, \omega_k) := \Lambda(\hat{\rho}_k, \hat{u}_{F,k}, \hat{a}_k, \hat{\omega}_k) \text{ et } (\tilde{\rho}, \tilde{u}_F, a, \omega) := \Lambda(\hat{\rho}, \hat{u}_F, \hat{a}, \hat{\omega}).$$

On doit démontrer que $(R_k, U_k, A_k, \Omega_k) := (\tilde{\rho}_k - \tilde{\rho}, \tilde{u}_k - \tilde{u}, a_k - a, \omega_k - \omega)$ tend vers zéro pour la norme $\|\cdot\|$.

Estimations sur R_k

On raisonne comme dans le paragraphe précédent et on obtient :

$$\|R_k\|_{L_s^\infty(H^1(\Omega_F(0)))} \leq C(\|U_k\|_{L_s^2(H^2(\Omega_F(0)))} + \|(\nabla\hat{\chi}_k)^{-1} - (\nabla\hat{\chi})^{-1}\|_{L_s^2(H^1(\Omega_F(0)))}$$
$$+ \|\hat{u}_k - \hat{u}\|_{L_s^2(H^2(\Omega_F(0)))} + \|\hat{\chi}_{k,t} - \hat{\chi}_t\|_{L_s^2(H^1(\Omega_F(0)))} + \|\hat{\rho}_k - \hat{\rho}\|_{L_s^2(H^1(\Omega_F(0)))}). \tag{9.33}$$

Estimates sur (U_k, A_k, Ω_k)

On multiplie l'équation de U_k par $U_{k,t}$ et puis on regarde le système stationnaire associé :

$$\|A_k\|_{H_s^2} + \|\Omega_k\|_{H_s^1} + \|U_k\|_{L_s^2(H^2(\Omega_F(0)))} \leq C(\|R_k\|_{L_s^2(H^1(\Omega_F(0)))} + \|\hat{u}_k - \hat{u}\|_{L_s^2(H^2(\Omega_F(0)))}$$
$$+ \|\hat{\rho}_k - \hat{\rho}\|_{L_s^2(H^1(\Omega_F(0)))} + \|(\nabla\hat{\chi}_k)^{-1} - (\nabla\hat{\chi})^{-1}\|_{L_s^2(H^1(\Omega_F(0)))} + \|\hat{\chi}_{k,t} - \hat{\chi}_t\|_{L_s^2(L^2(\Omega_F(0)))}$$
$$+ \|\hat{\omega}_k - \hat{\omega}\|_{L_s^2} + \|\hat{J}_k - \hat{J}\|_{L_s^2} + \|\hat{Q}_k - \hat{Q}\|_{L_s^2}).$$

Pour conclure, on combine cette inégalité avec (9.33) et on a

$$\begin{aligned}
&\|A_k\|_{H^2_s} + \|\Omega_k\|_{H^1_s} + \|U_k\|_{L^2_s(H^2(\Omega_F(0)))} + \|R_k\|_{L^\infty_s(H^1(\Omega_F(0)))} \le C(\|\hat{u}_k - \hat{u}\|_{L^2_s(H^2(\Omega_F(0)))} \\
&+\|(\nabla\hat{\chi}_k)^{-1} - (\nabla\hat{\chi})^{-1}\|_{L^2_s(H^1(\Omega_F(0)))} + \|\hat{\chi}_{k,t} - \hat{\chi}_t\|_{L^2_s(H^1(\Omega_F(0)))} + \|\hat{\rho}_k - \hat{\rho}\|_{L^2_s(H^1(\Omega_F(0)))} \\
&+\|\hat{\omega}_k - \hat{\omega}\|_{L^2_s} + \|\hat{J}_k - \hat{J}\|_{L^2_s} + \|\hat{Q}_k - \hat{Q}\|_{L^2_s}).
\end{aligned} \tag{9.34}$$

Enfin, l'estimation

$$\|((\nabla\hat{\chi}_k)^{-1} - (\nabla\hat{\chi})^{-1}, \hat{\chi}_{k,t} - \hat{\chi}_t)\|_{L^2_s(H^1(\Omega_F(0)))} + \|(\hat{J}_k - \hat{J}, \hat{Q}_k - \hat{Q})\|_{L^2_s} \le C(\|\hat{\omega}_k - \hat{\omega}\|_{L^2_s} + \|\hat{a}_k - \hat{a}\|_{H^1_s}),$$

donne la convergence de $(R_k, U_k, A_k, \Omega_k) \to 0$ pour la norme $\|\cdot\|$.

9.2.3 Unicité

On considère deux solutions $(\tilde{\rho}_1, \tilde{u}_1, a_1, \omega_1)$ et $(\tilde{\rho}_2, \tilde{u}_2, a_2, \omega_2)$ du système (9.20) telles que

$$\tilde{N}_{0,s}(\tilde{\rho}_j, \tilde{u}_j, a_j, \omega_j) \le \tilde{R}, \quad j = 1, 2.$$

On regarde le système satisfait par la différence, on multiplie l'équation de $\tilde{\rho}_1 - \tilde{\rho}_2$ par $\tilde{\rho}_1 - \tilde{\rho}_2$, l'équation de $\tilde{u}_1 - \tilde{u}_2$ par $\tilde{u}_1 - \tilde{u}_2$, l'équation de $a_1 - a_2$ par $\dot{a}_1 - \dot{a}_2$ et l'équation de $\omega_1 - \omega_2$ par $\omega_1 - \omega_2$.

En intégrant par parties, on obtient alors

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left(\int_{\Omega_F(0)} (|\tilde{\rho}_1 - \tilde{\rho}_2|^2 + |\tilde{u}_1 - \tilde{u}_2|^2)\, dx + |\dot{a}_1 - \dot{a}_2|^2 + |\omega_1 - \omega_2|^2\right) + \int_{\Omega_F(0)} |\nabla\tilde{u}_1 - \nabla\tilde{u}_2|^2 dx \\
&\le C\left(\int_{\Omega_F(0)} (|\tilde{\rho}_1 - \tilde{\rho}_2|^2 + |\tilde{u}_1 - \tilde{u}_2|^2)\, dx + |\dot{a}_1 - \dot{a}_2|^2 + |\omega_1 - \omega_2|^2\right).
\end{aligned}$$

Finalement, on utilise le Lemme de Gronwall et on en déduit

$$\tilde{\rho}_1 = \tilde{\rho}_2,\ \tilde{u}_1 = \tilde{u}_2, \ \text{ dans }]0, T[\times\Omega_F(0), \ a_1 = a_2 \ \text{ et } \ \omega_1 = \omega_2 \ \text{ dans }]0, T[.$$

9.3 Estimations a priori

La preuve de cette estimation est inspirée par les travaux [94] et [95], où les auteurs considéraient les équations de Navier-Stokes compressibles.

Soit p^0 donné par

$$p^0 := \frac{P'(\overline{\rho})}{\overline{\rho}},$$

où $\overline{\rho}$ est la moyenne de ρ_0.

Soit maintenant $\rho^*(t, x) := \rho(t, x) - \overline{\rho}$, on change $m/\overline{\rho}$ en m, $J/\overline{\rho}$ en J, $\mu/\overline{\rho}$ en μ et $\mu'/\overline{\rho}$ en μ' et on trouve que le système d'équations (9.1), (9.8), (9.9) et (9.10) peut être écrit de la manière suivante :

$$\left\{\begin{array}{ll}
\rho^*_t + u\cdot\nabla\rho^* + \overline{\rho}\,\nabla\cdot u = f_0(\rho^*, u, a, \omega) & \text{dans } Z_T, \\
u_t - \nabla\cdot\sigma(u, \rho^*) = f_1(\rho^*, u, a, \omega) & \text{dans } Z_T, \\
m\ddot{a} = \displaystyle\int_{\partial\Omega_S(t)} \sigma(u, \rho^*)n\, d\gamma + f_2(\rho^*, u, a, \omega) & \text{dans } (0, T), \\
J\dot{\omega} = \displaystyle\int_{\partial\Omega_S(t)} (x - a)\wedge(\sigma(u, \rho^*)n)\, d\gamma + f_3(\rho^*, u, a, \omega) & \text{dans } (0, T), \\
u = 0 & \text{sur } (0, T)\times\partial\Omega, \\
u = \dot{a} + \omega\wedge(x - a) & \text{sur } \Sigma_T, \\
\rho^*(0, \cdot) = \rho_0 - \overline{\rho}, \ \ u(0, \cdot) = u_0 & \text{dans } \Omega_F(0), \\
a(0) = 0, \ \ \dot{a}(0) = a_0, \ \ \omega(0) = \omega_0, &
\end{array}\right. \tag{9.35}$$

et

$$\begin{cases} f_0(\rho^*, u, a, \omega) & = -\rho^*(\nabla \cdot u), \\ f_1(\rho^*, u, a, \omega) & = -(u \cdot \nabla)u - \dfrac{\rho^*}{\rho^* + \overline{\rho}} \nabla \cdot (2\mu\epsilon(u) + \mu'(\nabla \cdot u)Id) + \left(p^0 - \dfrac{P'(\rho^* + \overline{\rho})}{\rho^* + \overline{\rho}}\right) \nabla\rho^*, \\ f_2(\rho^*, u, a, \omega) & = \displaystyle\int_{\partial\Omega_S(t)} \left(p^0\rho^* - \dfrac{P(\rho^* + \overline{\rho})}{\overline{\rho}}\right) n \, d\gamma, \\ f_3(\rho^*, u, a, \omega) & = \big(J\omega\big) \wedge \omega + \displaystyle\int_{\partial\Omega_S(t)} (x - a) \wedge \left(\left(p^0\rho^* - \dfrac{P(\rho^* + \overline{\rho})}{\overline{\rho}}\right) n\right) \, d\gamma. \end{cases} \tag{9.36}$$

Pour les intégrales dans les expressions de f_2 et f_3, on utilise que

$$\frac{P(\overline{\rho})}{\overline{\rho}} \int_{\partial\Omega_S(0)} (x - a) \wedge n \, d\gamma = 0 \quad \text{and} \quad \frac{P(\overline{\rho})}{\overline{\rho}} \int_{\partial\Omega_S(0)} n \, d\gamma = 0 \tag{9.37}$$

et donc f_2 et $f_3 - (J\omega) \wedge \omega$ sont quadratiques par rapport à ρ^*.

La preuve de l'inégalité (9.18) est faite à l'aide d'une série de lemmes. Tous les détails peuvent être trouvés dans [12] :

- Un estimation du mouvement solide en termes de la vitesse du fluide.
- Des estimations globales associées à un opérateur elliptique et des estimations d'énergie associées au système de Stokes compressible.
- Des estimations intérieures pour le système de Stokes compressible.
- Des estimations près de la frontière $\partial\Omega_F(0)$. D'abord, on estime les dérivées tangentielles et ensuite les dérivées normales.
- Des estimations globales pour l'opérateur de Stokes.

Tout cela est démontré sous l'hypothèse $(\rho^*, u, a, \omega) \in X(0, T)$. La conclusion de tous ces lemmes est l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned} N_{0,T}(\rho^*, u, a, \omega) \leq C \Big(& \|f_0\|_{H^1_T(L^2)} + \|f_0\|_{L^\infty_T(H^2)} + \|f_0\|_{L^2_T(H^3)} + \|f_1\|_{L^2_T(H^2)} + \|f_1\|_{H^1_T(L^2)} \\ + & \|f_1\|_{L^\infty_T(H^1)} + \|f_2\|_{H^1_T} + \|f_3\|_{H^1_T} + \|\partial_t u(0, \cdot)\|_{H^1} + \|u_0\|_{H^3} + \|\partial_t \rho(0, \cdot)\|_{L^2} \\ + & \|\rho_0\|_{H^3} + |\ddot{a}(0)| + |a_0| + |\dot{\omega}(0)| + |\omega_0| + N^{3/2}_{0,T}(\rho^*, u, a, \omega) + N^2_{0,T}(\rho^*, u, a, \omega) \Big) \end{aligned} \tag{9.38}$$

(on rappelle que $N_{0,T}(\rho, u, a, \omega)$ a été défini dans (9.17)). Ensuite, en utilisant les équations de u, ρ, a et ω, on voit que

$$\begin{aligned} & \|\partial_t u(0, \cdot)\|_{H^1} \leq C(\|u_0\|_{H^3} + \|\rho_0\|_{H^2} + \|f_1\|_{L^\infty_T(H^1)}), \\ & \|\partial_t \rho(0, \cdot)\|_{L^2} \leq C(\|u_0\|_{H^1} + \|f_0\|_{L^\infty_T(L^2)} + N^2_{0,T}(\rho, u, a, \omega)), \\ & |\ddot{a}(0)| \leq C(\|u_0\|_{H^2} + \|\rho_0\|_{H^1} + \|f_2\|_{L^\infty_T}) \end{aligned}$$

et

$$|\dot{\omega}(0)| \leq C(\|u_0\|_{H^2} + \|\rho_0\|_{H^1} + \|f_3\|_{L^\infty_T}).$$

A partir de l'expression de f_i $(0 \leq i \leq 3)$, on obtient

$$\begin{aligned} & \|f_0\|_{H^1_T(L^2)} + \|f_0\|_{L^\infty_T(H^2)} + \|f_0\|_{L^2_T(H^3)} + \|f_1\|_{L^2_T(H^2)} + \|f_1\|_{H^1_T(L^2)} + \|f_1\|_{L^\infty_T(H^1)} \\ + & \|f_2\|_{H^1_T} + \|f_3\|_{H^1_T} \leq N^2_{0,T}(\rho, u, a, \omega). \end{aligned}$$

Finalement, en utilisant l'hypothèse $N_{0,T}(\rho^*, u, a, \omega) \leq \delta_1$ avec δ_1 suffisamment petit, on conclut la preuve de la Proposition 15.

Chapitre 10

Existence locale de solution pour un système de couplage entre un solide élastique et un fluide compressible

10.1 Introduction

Nous nous sommes intéressés à un système couplé d'une structure élastique et d'un fluide visqueux compressible qui l'entoure dans un domaine régulier et borné $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Au temps t, on note $\Omega_S(t)$ le domaine occupé par le solide et $\Omega_F(t) := \Omega \setminus \overline{\Omega_S(t)}$. La vitesse et la densité du fluide satisfont les équations de Navier-Stokes compressibles : pour tout $t \in]0, T[$ et tout $x \in \Omega_F(t)$, on a

$$\begin{cases} (\rho_t + \nabla \cdot (\rho u))(t, x) = 0, \\ (\rho u_t + \rho(u \cdot \nabla)u)(t, x) - \nabla \cdot (2\mu\epsilon(u) + \mu'(\nabla \cdot u)Id)(t, x) + \nabla p(t, x) = 0, \end{cases} \tag{10.1}$$

où $\epsilon(u) := \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^t)$ est le gradient symétrique et μ, $\mu' \in \mathbb{R}$ satisfont

$$\mu > 0, \;\; \mu' \geq 0.$$

Nous supposons que la pression est donnée par $p := P(\rho) - P(\overline{\rho})$ avec $P \in C^\infty(\mathbb{R}_+^*)$ et $\overline{\rho} > 0$ est constant.

Le mouvement de la structure est décrit par son déplacement élastique, qui est défini dans $\Omega_S(0)$:

$$\xi_{tt} - \nabla \cdot (2\lambda\epsilon(\xi) + \lambda'(\nabla \cdot \xi)Id) = 0 \;\text{ dans } (0, T) \times \Omega_S(0), \tag{10.2}$$

avec $\lambda > 0$ et $\lambda' \geq 0$.

On introduit le flot $\chi(t, \cdot) : \Omega_F(0) \to \Omega_F(t)$ comme la solution de

$$\begin{cases} \chi_t(t, y) = u(t, \chi(t, y)), \\ \chi(0, y) = y. \end{cases} \tag{10.3}$$

Le couplage entre u et ξ se fait sur l'interface $(0, T) \times \partial\Omega_S(0)$:

$$\begin{cases} u \circ \chi = \xi_t, \\ (2\mu\epsilon(u) + \mu'(\nabla \cdot u)Id - (P(\rho) - P(\overline{\rho}))) \circ \chi cof(\nabla\chi)n = (2\lambda\epsilon(\xi) + \lambda'(\nabla \cdot \xi)Id)n, \end{cases} \tag{10.4}$$

où n est le vecteur unitaire extérieur sur $\partial\Omega_S(0)$. Le système est complété avec des conditions de type Dirichlet sur le bord extérieur :

$$u = 0 \;\text{ sur } (0, T) \times \partial\Omega. \tag{10.5}$$

On remarque que $(\overline{\rho}, 0, 0)$ est une solution stationnaire du système complet (10.1)-(10.5). Enfin, on se donne des conditions initiales

$$\rho_{|t=0} = \rho_0, \quad u_{|t=0} = u_0 \;\text{ dans } \Omega_F(0) \tag{10.6}$$

et

$$\xi_{|t=0} = \xi_0, \quad \xi_{t|t=0} = \xi_1 \text{ dans } \Omega_S(0) \tag{10.7}$$

sur lesquelles on fait des hypothèses de régularité

$$\rho_0 \in H^3(\Omega_F(0)),\ \rho_0 \geq \rho_{min} > 0 \text{ dans } \Omega_F(0),\ u_0 \in H^4(\Omega_F(0)),\ \xi_0 \in H^3(\Omega_S(0)),\ \xi_1 \in H^2(\Omega_S(0)) \tag{10.8}$$

et de compatiblité

$$\begin{cases} u_0 = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \\ u_0 = \xi_1 & \text{sur } \partial\Omega_S(0), \\ (\sigma(u_0,\overline{\rho}) - (P(\rho_0) - P(\overline{\rho} - P'(\overline{\rho})))Id)n = (2\lambda\epsilon(\xi_0) + \lambda'(\nabla\cdot\xi_0)Id)n & \text{sur } \partial\Omega_S(0), \\ \nabla\cdot(\sigma(u_0,\overline{\rho}) - (P(\rho_0) - P(\overline{\rho}) - P'(\overline{\rho}))Id)n = \rho_0\nabla\cdot(2\lambda\epsilon(\xi_0) + \lambda'(\nabla\cdot\xi_0)Id) & \text{sur } \partial\Omega_S(0). \end{cases} \tag{10.9}$$

Pour le couplage entre un fluide incompressible et une structure élastique, l'existence globale de solution faible est démontrée dans [34] quand la structure élastique est donnée par un nombre fini de modes et dans [11] avec un terme régularisant dans l'équation du mouvement de la structure. Ces deux résultats donnent l'existence de solutions définies pourvu qu'il n'y ait pas de collision entre la structure et $\partial\Omega$ et tant qu'il n'y ait pas d'interpénétration dans la structure. L'existence locale de solutions régulières est démontrée dans [29]. De plus, le couplage avec une plaque élastique a aussi été étudié : nous mentionnons [5], où l'existence locale de solutions fortes est obtenue, [18] qui démontre l'existence globale de solutions faibles avec un terme régularisant dans l'équation des plaques et [63] qui établit le même résultat sans terme régularisant en 2D.
Quant à l'intéraction entre un fluide compressible et une structure élastique, [10] montre l'existence globale de solution faible en $3D$ pour $\gamma > 3/2$. Ce résultat est obtenu pour une structure élastique qui est décrite par une équation régularisée.

Dans le résultat principal que nous présentons ici, nous n'avons pas besoin d'un terme régularisant dans l'équation de la structure élastique (voir (10.2) ci-dessus). Nous démontrons l'existence et l'unicité de solutions régulières pour (10.1)-(10.7) (voir [13]) :

Théorème 28. *Supposons que $(\rho_0, u_0, \xi_0, \xi_1)$ satisfont (10.8)-(10.9). Alors, il existe $T^* > 0$ tel que le système d'équations (10.1), (10.2) complétées avec les conditions au bord (10.4)-(10.5) et les conditions initiales (10.6)-(10.7) admet une unique solution (ρ, u, ξ) définie dans $(0, T^*)$ et appartenant à l'espace $Y_{T^*} := Y^1_{T^*} \times Y^2_{T^*} \times Y^3_{T^*}$, où*

$$Y^1_{T^*} := L^2(0,T^*; H^2(\Omega_F(t))) \cap C^0([0,T^*]; H^{7/4}(\Omega_F(t))),$$

$$Y^2_{T^*} := L^2(0,T^*; H^3(\Omega_F(t))) \times H^2(0,T^*; H^1(\Omega_F(t))) \cap C^2([0,T^*]; L^2(\Omega_F(t))) \cap C^0([0,T^*]; H^{11/4}(\Omega_F(t))),$$

$$Y^3_{T^*} := C^0([0,T^*]; H^3(\Omega_S(0))) \cap C^2([0,T^*]; H^1(\Omega_S(0))) \cap C^3([0,T^*]; L^2(\Omega_S(0))).$$

De plus, il existe une fonction croissante positive f qui dépend de $1/\rho_{min}$, $\|\rho_0\|_{\Omega_F(0)}$, $\|u_0\|_{H^4(\Omega_F(0))}$, $\|\xi_0\|_{H^3(\Omega_S(0))}$ et $\|\xi_1\|_{H^2(\Omega_S(0))}$ telle que

$$\|(\rho,u,\xi)\|_{Y_{T^*}} \leq f(1/\rho_{min}, \|\rho_0\|_{\Omega_F(0)}, \|u_0\|_{H^4(\Omega_F(0))}, \|\xi_0\|_{H^3(\Omega_S(0))}, \|\xi_1\|_{H^2(\Omega_S(0))}).$$

10.2 Problème linéarisé

Soit $(\rho_0, u_0, \xi_0, \xi_1)$ satisfaisant (10.8)-(10.9). Pour $p, r \geq 0$ et $q, s \in [1, +\infty]$, on note

$$W^{p,q}(W^{r,s}) := W^{p,q}(0,T; W^{r,s}(\Omega_F(0))).$$

Pour chaque $R > 0$, on considère l'espace

$$X_{T,R} := \{v \in Y_{p,q} : v = 0 \text{ sur } (0,T)\times\partial\Omega,\ v_{|t=0} = u_0 \text{ dans } \Omega_F(0) \text{ et } N_T(v) \leq R\}$$

où

$$Y_{p,q} := W^{2,p}(H^1) \cap W^{2,q}(L^2) \cap L^q(H^{11/4}) \cap L^p(H^3)$$

avec $p \in]1,2[$ et $q \in]4,+\infty[$ et

$$N_T(v) := \|v\|_{W^{2,p}(H^1)} + \|v\|_{W^{2,q}(L^2)} + \|v\|_{L^q(H^{11/4})} + \|v\|_{L^p(H^3)}.$$

Soit $0 < T < 1$, $\hat{v} \in X_{T,R}$ avec $R \in]0,1[$ à déterminer et le flot associé à $\hat{v}$

$$\hat{\chi}(t,y) := y + \int_0^t \hat{v}(s,y)\,ds, \quad \forall y \in \Omega_F(0).$$

Comme $\|(\nabla\hat{\chi})^{-1} - Id\|_{L^\infty(L^\infty)} \leq CR$, la vitesse eulerienne

$$\hat{u}(t,x) := \hat{v}(t,\hat{\chi}^{-1}(t,x)) \quad t \in]0,T[,\ x \in \hat{\Omega}_F(t) := \hat{\chi}(t,\Omega_F(0))$$

est bien définie pour R suffisamment petit. On linéarise partiellement les équations (10.1) pour $t \in]0,T[$:

$$\begin{cases} (\rho_t + \nabla\cdot(\rho\hat{u}))(t,x) = 0 & \forall x \in \hat{\Omega}_F(t), \\ [(\rho u_t + \rho(\hat{u}\cdot\nabla)u) - \nabla\cdot(2\mu\epsilon(u) + \mu'(\nabla\cdot u)Id - (P(\rho) - P(\overline{\rho}))Id)](t,x) = 0 & \forall x \in \hat{\Omega}_F(t), \end{cases}$$

ainsi que les conditions au bord (10.4) sur $]0,T[\times\partial\Omega_S(0)$:

$$\begin{cases} u\circ\hat{\chi} = \xi_t, \\ (2\mu\epsilon(u) + \mu'(\nabla\cdot u)Id - (P(\rho) - P(\overline{\rho}))Id)\circ\hat{\chi}cof(\nabla\hat{\chi})n = (2\lambda\epsilon(\xi) + \lambda'(\nabla\cdot\xi)Id)n. \end{cases}$$

On réécrit les équations précédentes en variables lagrangiennes. Soit

$$v(t,y) := u(t,\hat{\chi}(t,y)), \quad \gamma(t,y) := \rho(t,\hat{\chi}(t,y)) - \overline{\rho}.$$

On a alors

$$\begin{cases} \gamma_t + \gamma(\nabla\hat{v}(\nabla\hat{\chi})^{-1} : Id) + \overline{\rho}(\nabla\hat{v}(\nabla\hat{\chi})^{-1} : Id) = 0 \\ (\overline{\rho}+\gamma)det(\nabla\hat{\chi})v_t - \nabla\cdot[(\mu(\nabla v(\nabla\hat{\chi})^{-1} + (\nabla\hat{\chi})^{-t}\nabla v^t) + \mu'(\nabla v(\nabla\hat{\chi})^{-1} : Id)Id \\ \qquad\qquad - (P(\overline{\rho}+\gamma) - P(\overline{\rho}))Id)cof(\nabla\hat{\chi})] = 0 \end{cases} \tag{10.10}$$

dans $]0,T[\times\Omega_F(0)$ et

$$\begin{cases} v = \xi_t, \\ (\mu(\nabla v(\nabla\hat{\chi})^{-1} + (\nabla\hat{\chi})^{-t}\nabla v^t) + \mu'(\nabla v(\nabla\hat{\chi})^{-1} : Id)Id - (P(\overline{\rho}+\gamma) - P(\overline{\rho}))Id)cof(\nabla\hat{\chi})n \\ = (2\lambda\epsilon(\xi) + \lambda'(\nabla\cdot\xi)Id)n \end{cases} \tag{10.11}$$

sur $]0,T[\times\partial\Omega_S(0)$. Enfin, les conditions initiales sont

$$\gamma_{|t=0} = \rho_0 - \overline{\rho},\ v_{|t=0} = u_0 \text{ dans } \Omega_F(0). \tag{10.12}$$

10.2.1 Régularité de la densité

L'équation de la densité est complètement découplée et peut être résolue explicitement. Avec les mêmes notations que ci-dessus, nous avons l'estimation suivante :

Lemme 11. *La solution γ de la première équation de (10.10) appartient à $W^{1,q}(H^{7/4}) \cap W^{2,q}(L^2) \cap L^2(H^2)$ et satisfait*

$$\begin{cases} \|\gamma\|_{W^{1,q}(H^{7/4})} + \|\gamma\|_{W^{2,q}(L^2)} + \|\gamma\|_{L^2(H^2)} + \|\gamma\|_{L^\infty(H^{7/4})} \\ \qquad\qquad \leq C(\|\gamma(0)\|_{H^2} + \|u_0\|_{H^1} + \|\gamma(0)\|_{H^2}^2 + \|u_0\|_{H^1}^2 + R). \end{cases}$$

De plus, pour R suffisamment petit, il existe $\gamma_{min} > -\overline{\rho}$ tel que

$$\gamma \geq \gamma_{min} \quad \text{dans }]0,T[\times\Omega_F(0).$$

La preuve de ce lemme est basée sur des estimations directes à partir de l'expression explicite de γ :

$$\gamma(t) = -\overline{\rho}\int_0^t \hat{z}(s)\exp\left(\int_t^s \hat{z}(r)dr\right)ds + \gamma(0)\exp\left(-\int_0^t \hat{z}(s)ds\right) \text{ dans } \Omega_F(0),$$

avec $z := \nabla\hat{v}(\nabla\hat{\chi})^{-1} : Id$.

10.2.2 Régularité de la vitesse

On introduit un espace de fonctions plus régulières que $X_{T,R}$:

$$\overline{X}_T := C^2([0,T];L^2) \cap H^2(H^1) \cap C^0([0,T];H^{11/4}) \cap L^2(H^3)$$

avec la norme associée $\overline{N}_T$.

Nous avons le résultat suivant (voir [13]) :

Lemme 12. *Il existe une fonction $h : (\mathbb{R}^+_*)^2 \times (\mathbb{R}^+)^3 \to \mathbb{R}$ croissante par rapport à toutes ces variables et il existe $R_0 \in]0,1[$ tel que pour chaque $R \in]0,R_0[$ et chaque $(\rho_0, u_0, \xi_0, \xi_1)$ satisfaisant (10.8)-(10.9), il existe un temps $T_0 > 0$ tel que pour tout $T \in]0,T_0[$ et tout $\hat{v} \in X_{T,R}$, le système (10.2), (10.5), (10.7) et (10.10)-(10.12) admet une unique solution*

$$(v,\xi) \in \overline{X}_T \times C^3([0,T];L^2(\Omega_S(0))) \cap C^0([0,T];H^3(\Omega_S(0))).$$

Cette solution satisfait

$$\begin{aligned} &\overline{N}_T(v) + \|\xi\|_{W^{3,\infty}(L^2(\Omega_S(0)))} + \|\xi\|_{L^\infty(H^3(\Omega_S(0)))} \\ &\qquad\qquad \leq h(1/\rho_{min}, \|\rho\|_{H^3}, \|u_0\|_{H^4}, \|\xi_0\|_{H^3(\Omega_S(0))}, \|\xi_1\|_{H^2(\Omega_S(0))}). \end{aligned} \tag{10.13}$$

La conséquence immédiate est qu'il existe un temps $T_1 > 0$ tel que pour tout $T < T_1$ on a $v \in X_{T,R}$ car $N_T(v) \leq R$.

Preuve : L'existence de solution est obtenue de façon classique. D'abord on considère un problème discrétisé et on trouve une unique solution $(v^n, \xi^n) \in W^{1,\infty}(H^1) \times W^{2,\infty}(H^1(\Omega_S(0)))$. Pour ce problème, on peut établir une inégalité de type énergie qui nous donne l'existence et l'unicité de solution

$$(v,\xi) \in (L^\infty(L^2) \cap L^2(H^1)) \times (L^\infty(H^1(\Omega_S(0))) \cap W^{1,\infty}(L^2(\Omega_S(0)))).$$

Dans la première partie de la preuve de (10.13) on obtient le maximum de régularité en temps. Ceci est fait en appliquant l'opérateur ∂_t^β ($\beta = 0,1,2$) aux équations satisfaites par v et par ξ et en multipliant ces équations par $\partial_t^\beta v$ et $\partial^{\beta+1}\xi$ respectivement. Après trois étapes de calculs (une étape pour chaque valeur de β), on arrive à

$$\begin{aligned} &\|v\|_{W^{2,\infty}(L^2)} + \|v\|_{H^2(H^1)} + \|\xi\|_{W^{3,\infty}(L^2(\Omega_S(0)))} + \|\xi\|_{W^{2,\infty}(H^1(\Omega_S(0)))} \\ &\leq C_0 + C_0 T^\alpha \overline{N}_T(v) + C R^{1/2} \|v\|_{L^\infty(W^{1,\infty})}, \end{aligned} \tag{10.14}$$

où $\alpha > 0$ est une constante qui dépend de q. Ici, $R \in]0,1[$, $C_0 > 0$ est une constante qui dépend des conditions initiales et T est suffisamment petit en fonction des conditions initiales.

Enfin, on regarde les équations de v et ξ comme des systèmes elliptiques, où les dérivées en temps sont dans le second membre. Grâce aux estimations des dérivées en temps (10.14) et à la petitesse de T, on peut monter en régularité en espace :

$$\|v\|_{L^\infty(H^{11/4})} + \|v\|_{L^2(H^3)} + \|\xi\|_{L^\infty(H^3(\Omega_S(0)))} \leq C_0 + T^\alpha \overline{N}_T(v).$$

En combinant cette inégalité avec (10.14), on arrive à (10.13).

10.3 Argument de point fixe

Dans cette section on démontre le Théorème 28. Soit $T < T_1$, $R < R_0$ et $\Lambda : X_{T,R} \to X_{T,R}$ défini par

$$\Lambda(\hat{v}) = v.$$

Cette application est bien définie d'après le Lemme 12. L'espace $X_{T,R}$ est compact dans

$$Z_T := L^2(H^2) \cap H^1(L^2).$$

Pour l'existence et l'unicité de point fixe, il suffit d'établir la contractivité :

$$\|\Lambda(\hat{v}_1) - \Lambda(\hat{v}_2)\|_{Z_T} \leq \|\hat{v}_1 - \hat{v}_2\|_{Z_T}, \quad \forall \hat{v}_1,\, \hat{v}_2 \in X_{T,R}. \tag{10.15}$$

Soit (γ_1, v_1, ξ_1) (resp. (γ_2, v_2, ξ_2)) la solution de (10.2), (10.5), (10.7) et (10.10)-(10.12) associée à $\hat{v}_1$ (resp. à $\hat{v}_2$). Pour l'équation de la densité on démontre directement

$$\|\gamma_1 - \gamma_2\|_{L^\infty(H^1)} \leq C_0 T^{1/2} \|\hat{v}_1 - \hat{v}_2\|_{Z_T}, \ \|(\gamma_1 - \gamma_2)_t\|_{L^2(H^1)} \leq C_0 \|\hat{v}_1 - \hat{v}_2\|_{Z_T}.$$

L'estimation de la vitesse se fait en trois temps :

- On multiplie par $v_1 - v_2$ l'équation de $v_1 - v_2$ et l'équation de $\xi_1 - \xi_2$ par $(\xi_1 - \xi_2)_t$:

$$\|v_1 - v_2\|_{L^2(H^1)} + \|\xi_1 - \xi_2\|_{L^\infty(H^1(\Omega_S(0))) \cap W^{1,\infty}(L^2)} \leq T^\kappa \|\hat{v}_1 - \hat{v}_2\|_{Z_T},$$

pour un certain $\kappa > 0$.

- On dérive par rapport à t l'équation de $v_1 - v_2$ (resp. l'équation de $\xi_1 - \xi_2$) et on la multiplie par $(v_1 - v_2)_t$ (resp. par $(\xi_1 - \xi_2)_{tt}$) :

$$\|v_1 - v_2\|_{H^1(H^1) \cap W^{1,\infty}(L^2)} + \|\xi_1 - \xi_2\|_{W^{2,\infty}(L^2(\Omega_S(0))) \cap W^{1,\infty}(H^1)} \leq T^{\tilde{\kappa}} \|\hat{v}_1 - \hat{v}_2\|_{Z_T}, \tag{10.16}$$

pour un certain $\tilde{\kappa} > 0$.

- Enfin, on regarde le système elliptique couplé satisfait par $(v_1 - v_2, \xi_1 - \xi_2)$. On applique des estimations de type H^2 et grâce aux estimations sur les dérivées en temps (10.16) et à la petitesse de T, on arrive à

$$\|v_1 - v_2\|_{L^2(H^2)} + \|\xi_1 - \xi_2\|_{L^2(H^2(\Omega_S(0)))} \leq T^{\widehat{\kappa}} \|\hat{v}_1 - \hat{v}_2\|_{Z_T},$$

pour un certain $\widehat{\kappa} > 0$. Ceci donne directement (10.15).

Chapitre 11

Problèmes ouverts et perspectives

Dans la première partie de ce mémoire, nous considérons une équation de transport-diffusion avec viscosité évanescente. Pour cette équation, on a démontré un résultat d'explosion du coût de la contrôlabilité à zéro K_ε, permettant de dire que

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} K_\varepsilon = +\infty$$

lorsque T est plus petit que le temps de sortie T_s des trajectoires associées au problème de transport. D'autre part, en dimension 1 et avec une longueur d'intervalle spatial $L > 0$, on a démontré que

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} K_\varepsilon = 0$$

lorsque $T > 4.3L/M$. Il serait très intéressant de trouver quel est le temps optimal pour la convergence de K_ε. La méthode présentée dans ce mémoire, consistant à combiner des estimations de dissipation avec des inégalités de Carleman, ne semble pas être la plus adéquate, comme démontré par Glass dans [55]. Ensuite, toute extension en dimension supérieure serait aussi intéressante.

Dans le cadre du contrôle optimal singulier des équations dispersives et des équations dispersives-diffusives, nous avons démontré des résultats d'explosion et de convergence du coût de la contrôlabilité à zéro, sous des hypothèses similaires au cas parabolique. La recherche du temps optimal qui nous permettrait de dire que le coût tend vers zéro fait aussi partie d'un de nos projets.

Dans la deuxième partie de ce mémoire, nous nous sommes intéressés à quelques problèmes d'insensibilisation. En particulier, pour le système de Stokes et dans le cadre du contrôle interne, nous avons démontré l'insensibilisation (exacte) de la fonctionnelle définie par la norme L^2 de la vitesse. La preuve est basée sur des inégalités de Carleman pour des équations paraboliques. Le problème de l'insensibilisation (locale) du système de Navier-Stokes reste en revanche ouvert. De fait, en utilisant l'approche habituelle du point fixe, on pourrait se ramener à un problème d'insensibilisation d'une équation de Navier-Stokes linéarisée (dite de quasi-Stokes). La méthode utilisée dans ce mémoire, telle qu'elle est présentée, ne semble pas couvrir ce cas.

Dans le premier chapitre de la troisième partie, nous étudions la contrôlabilité à zéro de l'équation de Burgers visqueuse. Nous démontrons que cette équation n'est pas globalement contrôlable à zéro pour des temps petits à l'aide de deux contrôles frontières. Récemment, il a été démontré dans [19] que cette équation est globalement contrôlable à zéro pour des temps petits à l'aide de deux contrôles frontières et un contrôle distribué partout et ne dépendant que de t. Dans un travail en cours avec Chapouly, nous étudions le cas d'un seul contrôle frontière et d'un contrôle distribué partout ne dépendant que de t. Tant les techniques du résultat positif que les techniques du résultat négatif ne semblent pas s'appliquer dans ce cadre.

Dans le second chapitre de la troisième partie, nous démontrons la contrôlabilité à zéro du système de Stokes tridimensionnel avec deux contrôles scalaires, distribués dans un petit domaine. Dans la méthode employée dans ce mémoire, il semble indispensable que le seul couplage entre les composantes de la vitesse soit la condition d'incompressibilité. Autrement dit, si l'on considère une équation de Stokes avec le terme de dérive habituel, la méthode présentée dans ce mémoire ne semble pas pouvoir s'appliquer.

En particulier, le problème de la contrôlabilité (locale) du système de Navier-Stokes tridimensionnel avec deux contrôles scalaires reste ouvert. A présent, nous pensons avoir trouvé une variante de la méthode présentée dans ce mémoire qui nous permettrait de prouver ce résultat.

Dans la quatrième et dernière partie de ce mémoire, nous étudions quelques problèmes d'intéraction fluide-structure. Dans un premier chapitre, nous démontrons l'existence et l'unicité d'une solutions régulière pour un système tridimensionnel d'intéraction fluide-solide rigide associé aux équations de Navier-Stokes compressibles lorsque la donnée initiale est petite. Les solutions considérées ici satisfont en particulier que la vitesse du fluide est dans $L^2_t(H^4_x) \cap H^1_t(H^2_x)$. Nous aimerions étendre ce résultat à des vitesses dans $L^2_t(H^2_x) \cap H^1_t(L^2_x)$. Nous croyons qu'une étude plus fine du problème pourrait nous amener à ce résultat.

Dans le deuxième chapitre de cette dernière partie, nous traitons le cas d'un couplage entre un solide élastique et un fluide compressible, en dimension trois et sans terme régularisant dans l'équation de l'élasticité. Nous démontrons l'existence locale et l'unicité de solution de ce système, où la vitesse appartient à l'espace $L^2_t(H^3_x) \cap H^1_t(H^1_x)$. Comme dans le cas précédent, le même résultat avec des vitesses dans $L^2_t(H^2_x) \cap H^1_t(L^2_x)$ serait très intéressant. Nous aimerions aussi étendre ce résultat au cas où l'équation de l'élasticité est une équation de plaques.

Enfin, dans un travail en cours, nous analysons la contrôlabilité locale du problème fluide-solide traité dans [14] et dans [78]. Le fluide est modélisé par les équations de Navier-Stokes incompressibles tandis que le solide est rigide. Dans ces références, la contrôlabilité locale du système bidimensionnel était démontrée lorsque le rigide était une boule. Dans ce nouveau travail, nous démontrons la contrôlabilité locale en dimension 3 et sans aucune hypothèse sur le solide rigide.

Bibliographie

[1] Ammar Khodja F., Benabdallah A., Dupaix C., Kostin I., Controllability to the trajectories of phase-field models by one control force, SIAM J. Control Optim. 42 (2003), no. 5, 1661–1680.

[2] Ammar-Khodja F., Benabdallah A., Dupaix C., Kostin I., Null-controllability of some systems of parabolic type by one control force, ESAIM Control Optim. Calc. Var. 11 (2005), no. 3, 426–448.

[3] Ancona F., Marson A., On the attainable set for scalar nonlinear conservation laws with boundary control, SIAM J. Control Optim. 36 (1998), no. 1, pp. 290–312.

[4] Barbu V., Local controllability of the phase field system, Nonlinear Anal. 50 (2002), no. 3, Ser. A : Theory Methods, 363–372.

[5] Beirão da Veiga H., On the existence of strong solutions to a coupled fluid-structure evolution problem, J. Math. Fluid Mech., **6** (2004), no. 1, 21–52.

[6] Bodart O., Fabre C., Controls insensitizing the norm of the solution of a semilinear heat equation, J. Math. Anal. Appl. 195 (1995), no. 3, 658–683.

[7] Bodart O., González-Burgos M., Pérez-García R., Existence of insensitizing controls for a semilinear heat equation with a superlinear nonlinearity. Comm. Partial Differential Equations 29 (2004), no. 7-8, 1017–1050.

[8] Borchers W., Sohr H., On the equations $\operatorname{rot} v = g$ and $\operatorname{div} u = f$ with zero boundary conditions, Hokkaido Math. J. 19 (1990), no. 1, 67–87.

[9] Boulakia M., Modélisation et analyse mathématique des problèmes d'intéraction fluide-structure, thèse à l'Université de Versailles-Saint-Quentin, novembre 2004.

[10] Boulakia M., Existence of weak solutions for an interaction problem between an elastic structure and a compressible viscous fluid, J. Math. Pures et Appliquées, **84** (2005), no. 11, 1515–1554.

[11] Boulakia M., Existence of weak solutions for the three dimensional motion of an elastic structure in an incompressible fluid, J. Math. Fluid Mech., **9** (2007), no. 2, 262–294.

[12] Boulakia M., Guerrero S., A regularity result for a solid-fluid system associated to the compressible Navier-Stokes equations. Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 26 (2009), no. 3, 777–813

[13] Boulakia M., Guerrero S., Regular solutions of a problem coupling a compressible fluid and an elastic structure, prépublication au Laboratoire Jacques-Louis Lions, 2009.

[14] Boulakia M., Osses A., Local null controllability of a two-dimensional fluid-structure interaction problem, ESAIM Control Optim. Calc. Var. 14 (2008), no. 1, 1–42

[15] Calmelet-Eluhu C., Majumdar D. R., Flow of a micropolar fluid through a circular cylinder subject to longitudinal and torsional oscillations, Math. Comput. Modelling 27 (1998), no. 8, 69–78.

[16] Cerpa E., Exact controllability of a nonlinear Korteweg-de Vries equation on a critical spatial domain, SIAM J. Control Optim. 46 (2007), pp. 877–899.

[17] Cerpa E., Crépeau E., Boundary controlability for the non linear Korteweg-de Vries equation on any critical domain, preprint 2007, to appear in Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire.

[18] Chambolle A., Desjardins B., Esteban M.-J., Grandmont C., Existence of weak solutions for the unsteady interaction of a viscous fluid with an elastic plate, J. Math. Fluid Mech., **7** (2005), no. 3, 368–404.

[19] Chapouly M., Global controllability of nonviscous and viscous Burgers type equations, SIAM J. Control Optim, Volume 48, Issue 3 (2009), p. 1567-1599.

[20] Chapouly M., Global controllability of a nonlinear Korteweg-de Vries equation, à paraître dans Communications in Contemporary Mathematics.

[21] Conca C., San Martin J., Tucsnak M., Existence of solutions for the equations modelling the motion of a rigid body in a viscous fluid, Comm. Partial Differential Equations, **25** (2000), no. 5-6, 1019–1042.

[22] Coron J.-M., Global asymptotic stabilization for controllable systems without drift, Math. Control Signals Systems, 5 (3), 1992, p. 295-312.

[23] Coron J.-M., On the controllability of the 2-D incompressible Navier-Stokes equations with the Navier slip boundary conditions, ESAIM Control Optim. Calc. Var. 1, (1995/96), 35–75.

[24] Coron J.-M., Some open problems on the control of nonlinear partial differential equations, dans "Perspectives in Nonlinear Partial Differential Equations : In honour of Haïm Brezis", Editors H. Brestycki, M. Bertsch, B. Peletier, L. Véron, Birkaüser.

[25] Coron J.-M., Crépeau E., Exact boundary controllability of a nonlinear KdV equation with critical lengths, J. Eur. Math. Soc, 6, 2004, pp. 367–398.

[26] Coron J.-M., Guerrero S., Singular optimal control : A linear 1-D parabolic-hyperbolic example, Asymp. Anal. 44 **3,4** (2005), pp. 237–257.

[27] Coron, J.-M., Guerrero S., Null controllability of the N-dimensional Stokes system with $N-1$ scalar controls, J. Differential Equations 246 (2009), no. 7, 2908–2921.

[28] Coron J.-M., Guerrero S., Local null controllability of the two-dimensional Navier-Stokes system in the torus with a control force having a vanishing component, à paraître dans J. Math. Pures Appl.

[29] Coutand D., Shkoller S., Motion of an elastic solid inside an incompressible viscous fluid, Arch. Ration. Mech. Anal., **176** (2005), no. 1, 25–102.

[30] Danchin R., Poches de tourbillon visqueuses, J. Math. Pures Appl. 76 (1997), pp. 609–647.

[31] De Teresa L., Insensitizing controls for a semilinear heat equation, Comm. Partial Differential Equations 25 (2000), no. 1-2, 39–72.

[32] De Teresa L., Kavian O., Unique continuation principle for systems of parabolic equations, à paraître dans ESAIM : COCV.

[33] Desjardins B., Esteban M.-J., On weak solutions for fluid-rigid structure interaction : compressible and incompressible models, Comm. Partial Differential Equations, **25** (2000), no. 7-8, 1399–1413.

[34] Desjardins B., Esteban M.-J., Grandmont C., Le Tallec P., Weak solutions for a fluid-elastic structure interaction model, Rev. Mat. Complut. **14** (2001), no. 2, 523–538.

[35] Díaz J. I., Obstruction and some approximate controllability results for the Burgers equation and related problems, Control of partial differential equations and applications (Laredo, 1994), 6376, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., 174, Dekker, New York, 1996.

[36] Díaz J. I., Fursikov A. V., Approximate controllability of the Stokes system on cylinders by external unidirectional forces, J. Math. Pures Appl. (9), 76 (1997), no 4, 353–375.

[37] Dupuy D., Panasenko G. P., Stavre R., Asymptotic methods for micropolar fluids in a tube structure, Math. Models Methods Appl. Sci. 14 (2004), no. 5, 735–758.

[38] Eringen A. C., Theory of micropolar fluids, J. Math. Mech. 16 1966 1–18.

[39] Fabre C., Uniqueness results for Stokes equations and their consequences in linear and nonlinear control problems, ESAIM Control Optim. Calc. Var., **1** (1995/96), 267–302.

[40] Fabre C., Puel J.-P., Zuazua E., Approximate controllability of the semilinear heat equation, Proc. Royal Soc. Edinburgh, **125A** (1995), 31–61.

[41] Fattorini H. O., Russell D. L., Exact controllability theorems for linear parabolic equations in one space dimension, Arch. Rational Mech. Anal. 43 (1971), pp. 272292.

[42] Feireisl E., Novotný A., Petzeltová H., On the existence of globally defined weak solutions to the Navier-Stokes equations, J. Math. Fluid Mech. **3** (2001), no. 4, 358–392.

[43] Feireisl E., On the motion of rigid bodies in a viscous compressible fluid, Arch. Ration. Mech. Anal. **167** (2003), no. 4, 281–308.

[44] Feireisl E., Dynamics of viscous compressible fluids, Oxford Science Publications, Oxford (2004).

[45] Fernández-Cara E., González-Burgos M., Guerrero S., Puel J.-P., Null controllability of the heat equation with boundary Fourier conditions : The linear case, ESAIM Control Optim. Calc. Var., 12 (2006), pp. 442–465.

[46] Fernández-Cara E., Guerrero S., Global Carleman inequalities for parabolic systems and applications to controllability, SIAM J. Control Optim. 45 (2006), no. 4, 1399–1446.

[47] Fernández-Cara E., Guerrero, S. Local exact controllability of micropolar fluids. J. Math. Fluid Mech. 9 (2007), no. 3, 419–453.

[48] Fernández-Cara E., Guerrero S., Null controllability of the Burgers system with distributed controls. Systems Control Lett. 56 (2007), no. 5, 366–372.

[49] Fernández-Cara E., Guerrero S., Imanuvilov O. Yu., Puel J.-P., Local exact controllability of the Navier-Stokes system, J. Math. Pures Appl. (9) 83 (2004), no. 12, 1501–1542.

[50] Fernández-Cara E., Guerrero S., Imanuvilov O. Yu., Puel J.-P., Some controllability results for the N-dimensional Navier-Stokes and Boussinesq systems with $N-1$ scalar controls. SIAM J. Control Optim. 45 (2006), no. 1, 146–173

[51] Fernández-Cara E., Zuazua E., Null and approximate controllability for weakly blowing up semilinear heat equations, Ann. Inst. H. Poincaré, Anal. non linéaire, **17** (2000), no. 5, 583–616.

[52] Fursikov A. V., Imanuvilov O. Yu., *Controllability of Evolution Equations*, Lecture Notes #34, Seoul National University, Korea, 1996.

[53] Fursikov A. V., Imanuvilov O. Yu., Local exact boundary controllability of the Boussinesq equation, SIAM J. Control Optim. 36 (1998), no. 2, 391–421.

[54] Fursikov A. V., Imanuvilov O. Yu., Exact controllability of the Navier-Stokes and Boussinesq equations, (Russian) Uspekhi Mat. Nauk 54 (1999), no. 3(327), 93–146 ; translation in Russian Math. Surveys 54 (1999), no. 3, 565–618.

[55] Glass O., A complex-analytic approach to the problem of uniform controllability of a transport equation in the vanishing viscosity limit, à paraître dans J. Funct. Anal.

[56] Glass O., Guerrero S., On the uniform controllability of the Burgers equation, SIAM J. Control Optim. 46 (2007), no. 4, pp. 1211–1238.

[57] Glass O., Guerrero S., Some exact controllability results for the linear KdV equation and uniform controllability in the zero-dispersion limit, Asymp. Anal. 60 (2008), no. 1-2, pp. 61–100.

[58] Glass O., Guerrero S., Uniform controllability of a transport equation in zero diffusion-dispersion limit, à paraître dans Mathematical Models and Methods in Applied Sciences (M3AS).

[59] Glass O., Guerrero S., On the controllability of the fifth order Korteweg-de Vries equation, à paraître dans Ann. Inst. H. Poincaré, Anal. non linéaire.

[60] Glass O., Guerrero S., Controllability of the KdV equation from the right Dirichlet boundary condition, soumis.

[61] González-Burgos M., Guerrero S., Puel J.-P., Local exact controllability to the trajectories of the Boussinesq system via a fictitious control on the divergence equation, Commun. Pure Appl. Anal. (2009), no. 1, 311–333

[62] González-Burgos M., Pérez-García R., Controllability results for some nonlinear coupled parabolic systems by one control force, Asymptot. Anal. 46 (2006), no. 2, 123–162.

[63] Grandmont C., Existence of weak solutions for the unsteady interaction of a viscous fluid with an elastic plate, SIAM J. Math. Anal., **40** (2008), no. 2, 716–737.

[64] Grandmont C., Maday Y., Existence for an unsteady fluid-structure interaction problem, M2AN Math. Model. Numer. Anal., **34** (2000), no. 3, 609–636.

[65] Guerrero, S. Local exact controllability to the trajectories of the Boussinesq system. Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 23 (2006), no. 1, 29–61.

[66] Guerrero S., Null controllability of some systems of two parabolic equations with one control force, SIAM J. Control Optim. 46 (2007), no. 2, pp. 379–394.

[67] Guerrero S., Controllability of systems of Stokes equations with one control force : existence of insensitizing controls, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 24 (2007), no. 6, pp. 1024–1054.

[68] Guerrero, S. ; Imanuvilov, O. Yu. Remarks on global controllability for the Burgers equation with two control forces. Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 24 (2007), no. 6, 897–906.

[69] Guerrero, S. ; Lebeau, G. Singular optimal control for a transport-diffusion equation. Comm. Partial Differential Equations 32 (2007), no. 10-12, 1813–1836.

[70] Hillairet M., Lack of collision between solid bodies in a 2D incompressible viscous flow, Comm. Partial Differential Equations, **32** (2007), no. 7-9, 1345–1371.

[71] Hillairet M., Takahashi T., Collisions in three-dimensional fluid structure interaction problems, SIAM J. Math. Anal., **40** (2009), no. 6, 2451–2477.

[72] Hoff D., Global solutions of the Navier-Stokes equations for multidimensional compressible flow with discontinuous initial data, J. Differential Equations **120** (1995), no. 1, 215–254.

[73] Hoff D., Strong convergence to global solutions for multidimensional flows of compressible, viscous fluids with polytropic equations of state and discontinuous initial data, Arch. Rational Mech. Anal. **132** (1995), no. 1, 1–14.

[74] Hörmander L., *The analysis of linear partial differential operators. I. Distribution theory and Fourier analysis.* Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften 256. Springer-Verlag, Berlin, 1983.

[75] Horsin T., On the controllability of the Burgers equation, ESAIM Control Optim. Calc. Var. 3 (1998), 83–95.

[76] Imanuvilov O. Yu., Remarks on exact controllability for the Navier-Stokes equations, ESAIM Control Optim. Calc. Var., **6** (2001), 39–72.

[77] Imanuvilov O. Yu., Puel J.-P., Global Carleman estimates for weak elliptic non homogeneous Dirichlet problem, Int. Math. Research Notices, **16**, 2003, 883-913.

[78] Imanuvilov O. Yu., Takahashi T., Exact controllability of a fluid-rigid body system, J. Math. Pures Appl. (9) 87 (2007), no. 4, 408–437.

[79] Imanuvilov O. Yu., Yamamoto M., Carleman inequalities for parabolic equations in Sobolev spaces of negative order and exact controllability for semilinear parabolic equations, Publ. Res. Inst. Math. Sci. 39 (2003), no. 2, 227–274.

[80] Kawahara R., Oscillatory solitary waves in dispersive media, J. Phys. Soc. Japan, 33 (1972), pp. 260–264.

[81] Kenig C., Ponce G., Vega L., Higher-order nonlinear dispersive equations, Proc. Amer. Math. Soc. 122 (1994), no. 1, pp. 157–166.

[82] Kichenassamy S., Olver P. J., Existence and nonexistence of solitary wave solutions to higher-order model evolution equations, SIAM J. Math. Anal. 23 (1992), no. 5, pp. 1141–1166.

[83] Lax P. D., Levermore C. D., The small dispersion limit of the Korteweg-de Vries equation. I. Comm. Pure Appl. Math. 36 (1983), no. 3, pp. 253–290, II. Comm. Pure Appl. Math. 36 (1983), no. 5, pp. 571–593 & III. Comm. Pure Appl. Math. 36 (1983), no. 6, pp. 809–829.

[84] Lebeau G., Robbiano L., Contrôle exact de l'équation de la chaleur. (French) [Exact control of the heat equation] Comm. Partial Differential Equations 20 (1995), no. 1-2, 335–356.

[85] LeFloch P. G., *Hyperbolic systems of conservation laws : The theory of classical and nonclassical shock waves*, Lectures in Mathematics, ETH Zürich, Birkhäuser, 2002.

[86] Lions J.-L., *Contrôlabilité exacte, stabilisation et perturbations de systèmes distribués*, Tomes 1 & 2. Masson, RMA 8 & 9, Paris 1988.

[87] Lions J.-L., Quelques notions dans l'analyse et le contrôle de systèmes à données incomplètes (French) [Some notions in the analysis and control of systems with incomplete data]. Proceedings of the XIth Congress on Differential Equations and Applications/First Congress on Applied Mathematics (Spanish) (Málaga, 1989), 43–54, Univ. Málaga, Málaga, 1990.

[88] Lions J.-L., Sentinelles pour les systèmes distribués à données incomplètes (French), [sentinels for distributed systems with incomplete data] Recherches en Mathématiques Appliquées [Research in Applied Mathematics], 21. Masson, Paris, 1992.

[89] Lions J.-L., Zuazua E., A generic uniqueness result for the Stokes system and its control theoretical consequences. In *Partial differential equations and applications*, volume 177 of *Lecture Notes in Pure and Appl. Math.*, pages 221–235. Dekker, New York, 1996.

[90] Lions P.-L., Existence globale de solutions pour les équations de Navier-Stokes compressibles isentropiques, C. R. Acad. Sci. Paris Sr. I Math. **316** (1993), no. 12, 1335–1340.

[91] Lions P.-L., Mathematical Topics in Fluid Mechanics, Oxford Science Publications, Oxford (1996).

[92] López A., Zhang X., Zuazua E., Null controllability of the heat equation as a singular limit of the exact controllability of dissipative wave equations, J. Math. Pures et Appl., 79 (2000), 741-809.

[93] Lukaszewicz G., Micropolar fluids. Theory and applications. Modeling and Simulation in Science, Engineering and Technology, Birkhuser Boston, Inc., Boston, MA, 1999.

[94] Matsumura A., Nishida T., The initial value problem for the equations of motion of viscous and heat-conductive gases, J. Math. Kyoto Univ., **20** (1980), no. 1, 67–104.

[95] Matsumura A., Nishida T., Initial-boundary value problems for the equations of motion of general fluids, Computing methods in applied sciences and engineering, V (Versailles, 1981) North-Holland, Amsterdam (1982), 389–406.

[96] Olver P. J., Hamiltonian and non-Hamiltonian models for water waves, in Trends and Applications of Pure Mathematics to Mechanics, P. G. Ciarlet and M. Roseau, eds., Lecture Notes in Physics No. 195, Springer-Verlag, New York, 1984, pp. 273–290.

[97] Pérez-García R., Algunos resultados de control para algunos problemas parabólicos acoplados no lineales : controlabilidad y controles insensibilizantes, PhD Thesis, Sevilla 2004.

[98] Ponce G., Lax pairs and higher order models for water waves, J. Differential Equations 102 (1993), no. 2, pp. 360–381.

[99] Rosier L., Exact boundary controllability for the Korteweg-de Vries equation on a bounded domain. ESAIM Control Optim. Calc. Var. 2 (1997), pp. 33–55.

[100] Rosier L., Exact boundary controllability for the linear Korteweg-de Vries equation on the half-line, SIAM J. Control Optim. 39 (2000), no. 2, pp. 331–351

[101] Rosier L., Control of the surface of a fluid by a wavemaker, ESAIM Control Optim. Calc. Var. 10 (2004), no. 3, pp. 346–380.

[102] Russell D. L., Zhang B. Y., Controllability and stabilizability of the third-order linear dispersion equation on a periodic domain. SIAM J. Control Optim. 31 (1993), no. 3, pp. 659–676.

[103] Russell D. L., Zhang B. Y., Exact controllability and stabilizability of the Korteweg-de Vries equation. Trans. Amer. Math. Soc. 348 (1996), no. 9, pp. 3643–3672.

[104] San Martin J., Starovoitov V., Tucsnak M., Global weak solutions for the two dimensional motion of several rigid bodies in an incompressible viscous fluid, Arch. Rational Mech. Anal., **161** (2002), no. 2, 93–112.

[105] Stavre R., The control of the pressure for a micropolar fluid, Dedicated to Eugen Sos. Z. Angew. Math. Phys. 53 (2002), no. 6, 912–922.

[106] Takahashi T., Analysis of strong solutions for the equations modeling the motion of a rigid-fluid system in a bounded domain, Adv. Differential Equations, **8** (2003), no. 12, 1499–1532.

[107] Tani A., On the first initial-boundary value problem of compressible viscous fluid motion, Publ. RIMS, Kyoto Univ. **13** (1977), 193–253.

[108] Zuazua E., Exact boundary controllability for the semilinear wave equation, in "Nonlinear Partial Differential Equations and their Applications", Vol. X, H. Brezis and J.L. Lions eds., Pitman, 1991, 357–391.