Sorbonne Université
Faculté des Sciences et Ingénierie
Master de Mathématiques

Année universitaire 2022–2023
MU4MA025
Analyse fonctionnelle approfondie

Contrôle N° 2 – jeudi 6 avril – Durée : 1 heure

Corrigé.

Exercice 1 (3 points) Soit E un espace vectoriel normé et $A \subset E$. On rappelle que A est faiblement borné si $f(A)$ est borné dans $\mathbb{R}$ pour tout $f \in E'$. Démontrer que A est borné si et seulement si A est faiblement borné.

Fait en TD.

Exercice 2 (3,5 points) Soit $E := L^2(]-1,1[)$. On définit $T_n : E \to \mathbb{R}$ par

$$T_n(f) := \int_{-1}^{1} f(t)\cos(n\pi t)dt, \, \forall f \in E.$$

(a) (0,5 points) Montrer que $T_n \in E'$.
On a que T_n est clairement linéaire, grâce à la linéarité de l'intégrale. De plus, en utilisant que $|\cos(x)| \leq 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, on trouve

$$\left|\int_{-1}^{1} f(t)\cos(n\pi t)dt\right| \leq \|\cos(n\pi\cdot)\|_E \|f\|_E \leq \sqrt{2}\|f\|_E, \, \forall f \in E.$$

Donc, $T_n \in E'$ et $\|T_n\|_{E'} \leq \sqrt{2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

(b) (2,5 points) Montrer que $T_n \rightharpoonup^* 0$ dans E'.
<u>Indication</u> : on pourra utiliser la densité de $C_c^\infty(]-1,1[)$ dans E.
On doit montrer que $T_n(f) \to 0$ dans $\mathbb{R}$ pour tout $f \in E$. Soit $f \in E$ et $\varepsilon > 0$. En utilisant la densité de $C_c^\infty(]-1,1[)$ dans E, on trouve $f_\varepsilon \in C_c^\infty(]-1,1[)$ tel que $\|f_\varepsilon - f\|_E < \varepsilon$. Alors,

$$|T_n(f)| \leq |T_n(f_\varepsilon)| + |T_n(f - f_\varepsilon)|. \tag{1}$$

Pour estimer le premier terme de (1), on effectue une intégration par parties et on utilise que $|\sin(x)| \leq 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$|T_n(f_\varepsilon)| = \left|\frac{1}{n\pi}\int_{-1}^{1} f_\varepsilon'(t)\sin(n\pi t)\right| \leq \|f_\varepsilon'\|_\infty \frac{2}{n\pi}.$$

Pour estimer le second terme de (1), on utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|T_n(f - f_\varepsilon)| \leq \|f - f_\varepsilon\|_E \|\cos(n\pi\cdot)\|_E \leq \sqrt{2}\varepsilon.$$

Ainsi, on trouve

$$|T_n(f)| \leq \|f_\varepsilon'\|_\infty \frac{2}{n\pi} + \sqrt{2}\varepsilon, \, \forall n \geq 1.$$

En prenant la limite supérieure, on obtient

$$\limsup_{n\to\infty} |T_n(f)| \leq \sqrt{2}\varepsilon.$$

Comme $\varepsilon > 0$ es quelconque, on déduit que $|T_n(f)| \to 0$.

(c) (0,5 points) Est-ce que T_n converge vers 0 dans E' ?
On sait que $\|T_n\|_{E'} = \|\cos(n\pi\cdot)\|_E = 1$ pour tout $n \geq 1$, donc la réponse est non.

Exercice 3 (4,5 points) Soit $E := C([0,1];\mathbb{R})$ muni de la norme uniforme et $J : E \to \mathbb{R}$ donné par

$$J(f) = \int_0^1 |f(t)|\, dt + 1, \forall f \in E.$$

(a) (2 points) Montrer que l'application J est continue sur E. Est-elle coercive sur E ?
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}, f \subset E$ tels que $f_n \to f$ uniformément sur $[0,1]$. Alors,

$$\begin{aligned}|J(f_n) - J(f)| &= \left|\int_0^1 |f_n(x)|dx - \int_0^1 |f(x)|dx\right| \leq \int_0^1 |f_n(x) - f(x)|dx \\ &\leq \int_0^1 \|f_n - f\|_\infty dx = \|f_n - f\|_\infty \to 0.\end{aligned}$$

Ceci montre que J est continu sur E.
Par contre, J n'est pas coercive sur E. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $f_n \in E$ avec $\|f_n\|_\infty > n$ et $J(f_n) < 2$. Il suffit de prendre

$$f_n(x) = \begin{cases} -(n+1)^2 x + 1 + n & \text{si } x \in [0, 1/(n+1)], \\ 0 & \text{si } x \in]1/(n+1), 1]. \end{cases}$$

Alors, $f_n \in E$, $\|f_n\|_\infty = n+1$ et $J(f_n) = 3/2$.

Dans la suite de l'exercice, on considère

$$C := \{f \in E : f(0) = f(1) = 1\}$$

et on s'intéresse au problème d'optimisation

$$\inf\{J(f) : f \in C\}.$$

(b) (0,5 points) Montrer que C est convexe et fermé dans E.
C est convexe car si $f_1, f_2 \in C$ et $\theta \in [0,1]$, alors $\theta f_1 + (1-\theta) f_2 \in C$. Pour démontrer que C est fermé, on considère $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C$ tel que $f_n \to f$ dans E (uniformément). Comme la convergence uniforme implique la convergence ponctuelle, on a $f_n(1) = 1 \to f(1)$ et $f_n(0) = 1 \to f(0)$, donc $f(0) = f(1) = 1$.

(c) (0,5 points) Montrer que J est convexe sur C.

Soit $f_1, f_2 \in C$ et $\theta \in [0,1]$. Alors,

$$\begin{aligned}
J(\theta f_1 + (1-\theta) f_2) &= \int_0^1 |\theta f_1(t) + (1-\theta) f_2|\, dt + 1 \\
&\leq \theta \int_0^1 |f_1(t)| dt + (1-\theta) \int_0^1 |f_2(t)| dt + \theta + (1-\theta) \\
&= \theta \left(\int_0^1 |f_1(t)| dt + 1 \right) + (1-\theta) \left(\int_0^1 |f_2(t)| dt + 1 \right) \\
&= \theta J(f_1) + (1-\theta) J(f_2).
\end{aligned}$$

On conclut que J est convexe.

(d) (1 point) Calculer explicitement la valeur de cet infimum et déterminer s'il est atteint ou non.
D'abord, il est clair que $J(f) \geq 1$ pour tout $f \in C$. Montrons que cet infimum vaut 1. Soit $\varepsilon > 0$. On doit trouver $f_\varepsilon \in C$ tel que $J(f_\varepsilon) < 1 + \varepsilon$. Soit

$$f_\varepsilon(x) := \begin{cases} -\dfrac{2}{\varepsilon} x + 1 & \text{si } x \in [0, \varepsilon/2], \\ 0 & \text{si } x \in]\varepsilon/2, 1 - \varepsilon/2] \\ \dfrac{2}{\varepsilon} x - \dfrac{2}{\varepsilon} + 1 & \text{si } x \in]1 - \varepsilon/2, 1]. \end{cases}$$

Alors, $f_\varepsilon \in C$ et $J(f_\varepsilon) = 1 + \frac{\varepsilon}{2} < 1 + \varepsilon$. Ceci montre que

$$\inf\{J(f) : f \in C\} = 1.$$

Il est clair que cet infimum n'est pas atteint. En effet, si $J(f) = 1$, alors $\int_0^1 |f(t)| dt = 0$ donc $f(t) = 0$ pour tout $t \in [0,1]$, ce qui est impossible car $f(0) = f(1) = 1$.

(e) (0,5 points) Peut-on utiliser un résultat du cours concernant les problèmes d'optimisation des fonctions sci et convexes sur des ensembles convexes et fermés ? Justifier la réponse.
On ne peut pas appliquer le Corollaire 6.4.16 pour plusieurs raisons. D'abord, $(E, \|\cdot\|_\infty)$ n'est pas réflexif (vu en TD). De plus, il faudrait que J soit coercive ou que C soit borné. On a vu dans la question (a) que J n'est pas coercive et il est très facile de montrer que C n'est pas borné dans E.