Sorbonne Université
Faculté des Sciences et Ingénierie
Master de Mathématiques

Année universitaire 2022–2023
MU4MA025
Analyse fonctionnelle approfondie

Contrôle N° 2 – jeudi 6 avril – Durée : 1 heure

Exercice 1 (3 points) Soit E un espace vectoriel normé et $A \subset E$. On rappelle que A est faiblement borné si $f(A)$ est borné dans $\mathbb{R}$ pour tout $f \in E'$. Démontrer que A est borné si et seulement si A est faiblement borné.

Exercice 2 (3,5 points) Soit $E := L^2(]-1,1[)$. On définit $T_n : E \to \mathbb{R}$ par

$$T_n(f) := \int_{-1}^{1} f(t)\cos(n\pi t)dt, \ \forall f \in E.$$

(a) (0,5 points) Montrer que $T_n \in E'$.

(b) (2,5 points) Montrer que $T_n \rightharpoonup^* 0$ dans E'.
Indication : on pourra utiliser la densité de $C_c^\infty(]-1,1[)$ dans E.

(c) (0,5 points) Est-ce que T_n converge vers 0 dans E' ?

Exercice 3 (4,5 points) Soit $E := C([0,1];\mathbb{R})$ muni de la norme uniforme et $J : E \to \mathbb{R}$ donné par

$$J(f) = \int_0^1 |f(t)|\, dt + 1, \ \forall f \in E.$$

(a) (2 points) Montrer que l'application J est continue sur E. Est-elle coercive sur E ?

Dans la suite de l'exercice, on considère

$$C := \{f \in E : f(0) = f(1) = 1\}$$

et on s'intéresse au problème d'optimisation

$$\inf\{J(f) : f \in C\}.$$

(b) (0,5 points) Montrer que C est convexe et fermé dans E.

(c) (0,5 points) Montrer que J est convexe sur C.

(d) (1 point) Calculer explicitement la valeur de cet infimum et déterminer s'il est atteint ou non.

(e) (0,5 points) Peut-on utiliser un résultat du cours concernant les problèmes d'optimisation des fonctions sci et convexes sur des ensembles convexes et fermés ? Justifier la réponse.