Contrôle N° 1 – jeudi 23 février – Durée : 1 heure

Corrigé.

Exercice 1 (3 points) Soit $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$. Montrer que

$$\lim_{p\to\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty.$$

• D'abord, si $\|f\|_\infty = 0$, alors $f = 0$ presque partout $\mathbb{R}$ et donc $\|f\|_p = 0$ pour tout $p \in [1, \infty]$.
• Supposons que $\|f\|_\infty > 0$. On montre d'abord que

$$\limsup_{p\to\infty} \|f\|_p \le \|f\|_\infty. \tag{1}$$

Comme

$$\frac{|f(x)|}{\|f\|_\infty} \le 1 \text{ p. p. } x \in \mathbb{R},$$

et $f \in L^1(\mathbb{R})$, on a

$$\|f\|_p = \|f\|_\infty \left\| \frac{f}{\|f\|_\infty} \right\|_p \le \|f\|_\infty \left\| \frac{f}{\|f\|_\infty} \right\|_1^{1/p} = \|f\|_\infty \left(\frac{\|f\|_1}{\|f\|_\infty} \right)^{1/p}. \tag{2}$$

Comme $\|f\|_1/\|f\|_\infty > 0$, on a que

$$\lim_{p\to\infty} \left(\frac{\|f\|_1}{\|f\|_\infty} \right)^{1/p} = 1.$$

En prenant $\limsup_{p\to\infty}$ dans (2), on trouve (1). Une autre façon de trouver (1) est :

$$\|f\|_p \le \left(\int_{\mathbb{R}} |f|^{p-1} \|f\|_\infty dx \right)^{1/p} = \|f\|_1^{1/p} \|f\|_\infty^{1-1/p}.$$

Comme

$$\lim_{p\to\infty} \|f\|_1^{1/p} \|f\|_\infty^{1-1/p} = \|f\|_\infty,$$

on peut conclure.

Montrons enfin que

$$\liminf_{p\to\infty} \|f\|_p \ge \|f\|_\infty. \tag{3}$$

On considère, pour tout $\alpha \in]0, \|f\|_\infty[$, l'ensemble

$$A_\alpha := \{x \in \mathbb{R} : |f(x)| > \alpha\}.$$

D'après un résultat de TD, la mesure de Lebesgue de A_α est strictement positive. Alors, pour tout $p \in [1, \infty[$, on a

$$\|f\|_p \geq \left(\int_{A_\alpha} |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p} \geq \alpha \left(\lambda(A_\alpha) \right)^{1/p}.$$

Comme $\lambda(A_\alpha) > 0$, on a que

$$\lim_{p \to \infty} \left(\lambda(A_\alpha) \right)^{1/p} = 1.$$

En prenant $\liminf_{p \to \infty}$ dans (2), on trouve

$$\liminf_{p \to \infty} \|f\|_p \geq \alpha.$$

Comme cette inégalité est vraie pour tout $\alpha \in]0, \|f\|_\infty[$, on peut faire α tendre vers $\|f\|_\infty$ et on obtient (3).

La conclusion de l'exercice est une conséquence des inégalités (1) et (3).

Exercice 2 On considère la suite de fonctions $f_n(t) := \sin\left(\sqrt{t + 4\pi^2 n^2}\right)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in [0, +\infty[$.

(a) (2 points) Montrer que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers $f \equiv 0$.

Pour $t \geq 0$, fixé, on a :

$$f_n(t) = \sin\left(2\pi n \sqrt{1 + \frac{t}{4\pi^2 n^2}}\right).$$

Or,

$$\sqrt{1 + \frac{t}{4\pi^2 n^2}} = 1 + \frac{t}{8\pi^2 n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

donc

$$f_n(t) = \sin\left(\frac{t}{4\pi n}\right) + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Ainsi, $\lim_{n \to \infty} f_n(t) = 0$ pour tout $t \geq 0$.

Une autre façon de montrer ceci est :

$$\sin\left(\sqrt{t + 4\pi^2 n^2}\right) = \sin\left(\sqrt{t + 4\pi^2 n^2} - 2\pi n\right) = \sin\left(\frac{t}{\sqrt{t + 4\pi^2 n^2} + 2\pi n}\right).$$

Comme

$$\lim_{n \to \infty} \sin\left(\frac{t}{\sqrt{t + 4\pi^2 n^2} + 2\pi n}\right) = 0,$$

on peut conclure.

(b) (2 points) Montrer que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite équicontinue.

Pour $n \geq 1$,

$$|f_n'(t)| = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{t + 4\pi^2 n^2}} \left| \cos\left(\sqrt{t + 4\pi^2 n^2}\right) \right| \leq \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{t + 4\pi^2}} \leq \frac{1}{4\pi}.$$

Ainsi, pour $\varepsilon > 0$, on pose $\delta := 4\pi\varepsilon$ et l'inégalité des accroissements finis implique

$$\forall n \geq 1, |t - t'| < \delta \Rightarrow |f_n(t) - f_n(t')| \leq \frac{1}{4\pi} |t - t'| < \varepsilon.$$

Donc, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est équicontinue.

(c) (2 points) On rappelle que l'espace $C_b([0,+\infty[)$ désigne l'espace des fonctions continues et bornées définies sur $[0,+\infty[$ et à valeurs réelles. Est-ce que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite convergente dans $(C_b([0,+\infty[), \|\cdot\|_\infty)$?

On constate que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers $f \equiv 0$. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$ prenons

$$t_n := (\pi/2 + 2\pi n)^2 - 4\pi^2 n^2.$$

Alors, $f_n(t_n) = \sin(\pi/2 + 2\pi n) = 1$.

On trouve donc que $\|f_n - 0\|_\infty = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme la limite ponctuelle est la fonction identiquement nulle, le seul candidat à limite uniforme est la fonction identiquement nulle. Mais aucune sous-suite ne peut converger uniformément vers $f \equiv 0$ car $\|f_n - 0\|_\infty = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne possède aucune sous-suite convergente dans $(C_b([0,+\infty[), \|\cdot\|_\infty)$.

Exercice 3 (2 points) Soit $[a,b]$ un intervalle borné, $f_n(x) := \cos(nx)$, $\forall x \in [a,b]$, $\forall n \in \mathbb{N}$ et $1 \leq p < +\infty$. On suppose que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède une sous-suite qui converge vers une fonction f dans $L^p(]a,b[)$. Montrer que f coïncide avec la fonction identiquement nulle presque partout $[a,b]$.

D'après le Corollaire 3.3.11 du poly, il suffit de montrer que

$$\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx = 0,\ \forall \varphi \in C_c^\infty(]a,b[).$$

Soit $\varphi \in C_c^\infty(]a,b[)$. Par intégration par parties, on a

$$\int_a^b f_n(x)\,\varphi(x)\,dx = -\frac{1}{n}\int_a^b \sin(nx)\,\varphi'(x)\,dx,\ \forall n \geq 1.$$

Ici, on a utilisé que le support de φ est compact dans $]a,b[$. On en déduit que

$$\left|\int_a^b f_n(x)\,\varphi(x)\,dx\right| \leq \frac{\|\varphi'\|_\infty}{n},\ \forall n \geq 1. \tag{4}$$

On suppose que la sous-suite $(f_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f dans $L^p(]a,b[)$. Alors, en utilisant l'inégalité de Hölder et l'inégalité (4) pour $\sigma(n)$, on trouve

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx\right| &= \left|\int_a^b (f(x) - f_{\sigma(n)}(x))\,\varphi(x)\,dx + \int_a^b f_{\sigma(n)}(x)\,\varphi(x)\,dx\right| \\ &\leq \|f - f_{\sigma(n)}\|_{L^p(]a,b[)}\|\varphi\|_{L^{p'}(]a,b[)} + \frac{\|\varphi'\|_\infty}{\sigma(n)},\ \forall n \geq 1.\end{aligned}$$

Comme le terme de droite tend vers 0 lorsque $n \to \infty$, on a que

$$\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx = 0.$$