Sorbonne Université
Faculté des Sciences et Ingénierie
Master de Mathématiques

Année universitaire 2022–2023
MU4MA025
Analyse fonctionnelle approfondie

Contrôle N° 1 – jeudi 23 février – Durée : 1 heure

Exercice 1 (3 points) Soit $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$. Montrer que

$$\lim_{p\to\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty.$$

Exercice 2 On considère la suite de fonctions $f_n(t) := \sin\left(\sqrt{t + 4\pi^2 n^2}\right)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in [0, +\infty[$.

(a) (2 points) Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers $f \equiv 0$.

(b) (2 points) Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite équicontinue.

(c) (2 points) On rappelle que l'espace $C_b([0, +\infty[)$ désigne l'espace des fonctions continues et bornées définies sur $[0, +\infty[$ et à valeurs réelles. Est-ce que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite convergente dans $(C_b([0, +\infty[), \|\cdot\|_\infty)$?

Exercice 3 (2 points) Soit $[a, b]$ un intervalle borné, $f_n(x) := \cos(nx)$, $\forall x \in [a, b]$, $\forall n \in \mathbb{N}$ et $1 \le p < +\infty$. On suppose que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède une sous-suite qui converge vers une fonction f dans $L^p(]a, b[)$. Montrer que f coïncide avec la fonction identiquement nulle presque partout $[a, b]$.