

Delaunay-admissibilité des triangulations de surfaces

Philippe P. PÉBAY ^a, Pascal J. FREY ^b

^a INSA, LMMCS/UMR CNRS 5585, bâtiment 401, avenue Albert-Einstein, 69621 Villeurbanne cedex, France

Courriel : philippe.pebay@insa-lyon.fr

^b Institut national de recherche en informatique et en automatique, projet Gamma, domaine de Voluceau-Rocquencourt, B.P. 105, 78153 Le Chesnay cedex, France

Courriel : Pascal.Frey@inria.fr

(Reçu le 19 juin 1998, accepté le 6 juillet 1998)

Résumé. Dans cette Note, on rappelle quelques propriétés des triangulations de Delaunay de l'enveloppe convexe d'un nuage de points donné S en dimensions trois. On montre que si on applique une triangulation de Delaunay sur S , il n'est en général pas possible de respecter une contrainte de frontière Γ (exprimée sous forme d'une liste de faces et éventuellement d'arêtes, dont les sommets constituent un sous-ensemble de S). On établit alors un théorème d'existence a priori (il s'agit d'une condition nécessaire et suffisante) d'une face donnée dans toute triangulation de Delaunay de l'enveloppe convexe de S . Cette propriété, indépendante du mode de construction d'une triangulation de Delaunay, est appelée *Delaunay-admissibilité forte* d'une face dans \mathbb{R}^3 . © Académie des Sciences/Elsevier, Paris

Delaunay-conformity of surface triangulations

Abstract. *In this Note we recall some properties of Delaunay triangulations of the convex hull of a given point set S in three dimensions. We show that a Delaunay triangulation algorithm of S does not necessarily conform to a boundary constraint Γ (composed of edges and faces, whose vertices are a subset of S). Therefore, we give a theorem ensuring the existence a priori of a given face in any such Delaunay triangulation of the convex hull of S (this result provides a necessary and sufficient condition of existence). This property, independent of the Delaunay construction algorithm, is called strong Delaunay-conformity of a face in \mathbb{R}^3 . © Académie des Sciences/Elsevier, Paris*

Abridged English Version

Let us consider a point set S in \mathbb{R}^d ($d = 2$ or $d = 3$). A *Delaunay triangulation* of S is a triangulation of the convex hull $\text{Conv}(S)$ of S that satisfies several properties: empty circumball

Note présentée par Olivier PIRONNEAU.

criterion, maximization of the minimum face angle, duality property with the Voronoï diagram associated with the points of \mathcal{S} , etc., ...

If the input data of a problem is composed of a set of edges and faces Γ (i.e., the constraint), of which the vertices form a subset $\mathcal{S}(\Gamma)$ of the set of vertices \mathcal{S} , a Delaunay triangulation \mathcal{T} of $\text{Conv}(\mathcal{S})$ does not necessarily contain all faces of Γ .

Numerical simulations based on finite element methods for arbitrarily shaped three-dimensional domains Ω , require at first a mesh \mathcal{T}_Ω (i.e., a polyhedral covering-up of Ω). Such domains Ω are usually represented through a discretization (e.g. a triangulation) of the domain boundary $\partial\Omega$, that forms the constraint Γ . The set of vertices \mathcal{S} is thus composed of the edge and face vertices of Γ . A Delaunay triangulation algorithm of \mathcal{S} does not necessarily lead to a mesh \mathcal{T}_Ω of Ω (as soon as Ω is not convex) enforcing the constraint Γ . The envisaged numerical application is only possible if the resulting triangulation \mathcal{T}_Ω preserves the integrity of the constraint (or, at least, contains a topological and geometric equivalent of it).

Let Γ be a given topological constraint based on a point set \mathcal{S} in \mathbb{R}^3 , this Note establishes a theorem allowing to classify a priori the faces of Γ that will appear in any triangulation of the convex hull $\text{Conv}(\mathcal{S})$ of \mathcal{S} . Hence, if each and any face of Γ satisfies the proposed criterion, then Γ will belong to any Delaunay triangulation of $\text{Conv}(\mathcal{S})$. In other words, being automatically satisfied, the constraint is no longer a constraint for any Delaunay triangulation algorithm.

The proposed classification permits notably to consider:

- either the a posteriori recovering of the topological requirements of the constraint by means of local modifications [3], thus leading usually to a mesh that does not comply with the Delaunay properties any longer. In addition, such modifications may not exist in three dimensions [6];
- or the a priori redefinition of the constraint into a topological and geometric equivalent Γ' , of which any face conforms to the criterion described hereafter. The problem we face is to find a robust and reliable algorithm allowing to modify Γ into Γ' [5].

Some preliminary definitions related to Delaunay triangulations, their properties and constrained Delaunay triangulations are briefly recalled in Section 2. In Section 3, the classification of the faces of a topological constraint Γ is proposed, that leads to a theorem related to the strong Delaunay-conformity of a face allowing to decide whether or not a face belongs to the Delaunay covering-up of the given point set \mathcal{S} . An example of surface remeshing is proposed in Section 4 to emphasize an algorithm designed to recover the non-Delaunay-admissible faces. Finally, in Section 5, potential applications of the proposed approach are briefly mentioned.

1. Introduction

Soit \mathcal{S} un ensemble de points dans \mathbb{R}^d ($d = 2$ ou 3). Une *triangulation de Delaunay* de \mathcal{S} est une triangulation de l'enveloppe convexe $\text{Conv}(\mathcal{S})$ de \mathcal{S} qui possède certaines propriétés : satisfaction du critère de la boule vide, maximisation du minimum des angles de faces des éléments, dualité avec le diagramme de Voronoï associé aux points de \mathcal{S} , etc., ...

Si la donnée du problème est constituée d'un ensemble de faces Γ (i.e., une contrainte), dont les sommets forment un sous-ensemble de l'ensemble des sommets \mathcal{S} , une triangulation de Delaunay \mathcal{T} de $\text{Conv}(\mathcal{S})$ ne contiendra pas nécessairement toutes les faces de Γ .

Les simulations numériques basées sur des méthodes d'éléments finis et appliquées à des domaines Ω quelconques de \mathbb{R}^3 , nécessitent au préalable d'obtenir un maillage \mathcal{T}_Ω qui constitue un recouvrement polyédrique de Ω . De tels domaines Ω sont en général représentés par une discrétisation (i.e., une

triangulation) de leur frontière $\partial\Omega$ qui constitue la contrainte Γ ci-dessus. L'ensemble \mathcal{S} des sommets est alors constitué des sommets des faces (et éventuellement des arêtes) de Γ . Un algorithme de triangulation de Delaunay de l'ensemble \mathcal{S} ne conduit généralement pas à un maillage \mathcal{T}_Ω de Ω (dès lors que celui-ci n'est pas convexe); en particulier, cette triangulation ne respecte pas la contrainte Γ . L'application numérique envisagée n'est donc possible que si la triangulation résultante \mathcal{T}_Ω préserve l'intégrité de la contrainte Γ (ou, à défaut, en contient un équivalent topologique et géométrique).

Étant donné une contrainte topologique Γ dont les sommets forment un nuage de points \mathcal{S} de \mathbb{R}^3 , cette Note établit un résultat permettant de distinguer a priori les arêtes et faces de Γ qui seront présentes dans toute triangulation de Delaunay de l'enveloppe convexe $\text{Conv}(\mathcal{S})$ de \mathcal{S} , de celles qui ne le seront pas. Par suite, si toute face de Γ satisfait le critère proposé, alors toute triangulation de Delaunay de $\text{Conv}(\mathcal{S})$ contiendra Γ . En d'autres termes, dès lors qu'elle est satisfaite automatiquement par toute méthode de construction de triangulation de Delaunay, la contrainte Γ n'en est plus une.

La classification proposée permet notamment d'envisager :

- soit la récupération a posteriori des exigences topologiques de la contrainte au moyen de transformations topologiques locales [3], ce qui conduit généralement à un maillage qui ne vérifie plus les propriétés de Delaunay. En outre, de telles modifications peuvent ne pas exister en dimension trois [6];
- soit la redéfinition a priori de la contrainte en un équivalent topologique et géométrique Γ' dont toute face (arête) satisfait le critère introduit ici. Le problème est alors de trouver un algorithme robuste permettant de modifier Γ en Γ' [5].

Quelques définitions préliminaires relatives aux triangulations de Delaunay, à leurs propriétés et à la définition de triangulations respectant un champ de contraintes sont brièvement rappelées en section 2. En section 3, une classification des faces d'une contrainte topologique Γ est proposée, qui conduit à un théorème relatif à la Delaunay-admissibilité forte d'une face permettant de décider a priori si une face donnée de Γ appartient au recouvrement de Delaunay de l'enveloppe convexe $\text{Conv}(\mathcal{S})$ du nuage de points \mathcal{S} extrait de Γ . Un algorithme de récupération des faces qui ne sont pas fortement Delaunay-admissibles a été développé et un exemple de résultat est proposé en section 4. Enfin, en section 5, quelques applications potentielles de ce travail sont brièvement évoquées.

2. Définitions préliminaires

Soit \mathcal{S} un ensemble fini de points P_i de \mathbb{R}^3 , deux à deux distincts. Les points de \mathcal{S} sont dits en *position générale* si \mathcal{S} ne contient aucun quintuplet de points cosphériques. On rappelle qu'une *triangulation* \mathcal{T} est un maillage conforme d'une partie Ω de \mathbb{R}^3 dont tous les éléments sont des tétraèdres.

Triangulation de Delaunay. – Le *recouvrement de Delaunay*, noté $\mathcal{D}_\mathcal{S}$, peut être défini à partir des cellules de Voronoï, notée $V_i^\mathcal{S}$, comme le dual du diagramme de Voronoï, noté $\mathcal{V}(\mathcal{S})$. C'est un maillage conforme de l'enveloppe convexe $\text{Conv}(\mathcal{S})$ de \mathcal{S} . Si les points de \mathcal{S} sont en position générale, le recouvrement de Delaunay $\mathcal{D}_\mathcal{S}$ est une triangulation unique, notée \mathcal{T} , appelée *triangulation de Delaunay* de \mathcal{S} . Tout élément non simplicial de l'unique recouvrement $\mathcal{D}_\mathcal{S}$ admettant différentes décomposition en tétraèdres, la triangulation de Delaunay n'est donc pas unique. Il est à noter que la Delaunay-admissibilité des trois arêtes d'une face n'entraîne pas nécessairement la Delaunay-admissibilité de la face. En outre, la *propriété de la boule vide* précise que tout polytope K de $\mathcal{D}_\mathcal{S}$ est tel que sa boule fermée circonscrite \mathcal{B}_K ne contient pas d'autre point de \mathcal{S} que les sommets de K [2].

THÉORÈME 2.1 (Lemme général de Delaunay). – *Soit \mathcal{T} une triangulation de l'enveloppe convexe d'un ensemble fini de points \mathcal{S} . Si la propriété de la boule vide est satisfaite pour toute configuration de deux éléments adjacents de \mathcal{T} , alors elle est vraie sur tout \mathcal{T} qui est alors une triangulation de Delaunay.*

Triangulation contrainte. – On considère à présent un ensemble fini de points \mathcal{S} dans \mathbb{R}^3 et une contrainte topologique Γ constituée d'un ensemble d'arêtes et de faces dont les sommets forment un sous-ensemble de \mathcal{S} . Plus précisément, on appelle *champ de contraintes*, noté Γ , d'un ensemble fini de points distincts \mathcal{S} un ensemble fini d'arêtes et de faces (ne s'intersectant pas hormis éventuellement en leurs bords) dont les sommets sont dans \mathcal{S} . On dit alors que la triangulation de Delaunay \mathcal{T} de $\text{Conv}(\mathcal{S})$ vérifie le champ de contraintes Γ , si les entités de Γ existent d'une manière appropriée dans \mathcal{T} . Une telle triangulation est appelée *triangulation contrainte*. La condition la plus forte exige que \mathcal{T} contienne exactement les éléments de Γ :

DÉFINITION 2.1. – Une triangulation \mathcal{T} vérifie *exactement* un champ de contraintes Γ si toute entité de Γ existe exactement dans \mathcal{T} .

L'unique recouvrement de Delaunay $\mathcal{D}_{\mathcal{S}}$ de \mathcal{S} ne permet généralement pas de satisfaire exactement Γ (si $\mathcal{D}_{\mathcal{S}}$ contient des éléments non simpliciaux, leur décomposition en tétraèdres n'est pas unique). Dans ce cas, en modifiant localement une triangulation de Delaunay \mathcal{T} , il est possible de recouvrir les entités de Γ , ce qui conduit à une nouvelle triangulation \mathcal{T}' qui n'est en principe pas de Delaunay. Ce qui revient à définir un champ de contraintes Γ' dont les faces et arêtes sont obtenues par subdivisions des entités de Γ . D'où la définition suivante :

DÉFINITION 2.2. – Une triangulation \mathcal{T} vérifie *faiblement* Γ si toute entité de Γ existe exactement ou par recouvrement dans \mathcal{T} .

3. Triangulation de Delaunay fortement admissible

Considérons maintenant un domaine quelconque Ω de \mathbb{R}^3 , représenté par une discrétisation de sa frontière $\partial\Omega$ dont l'ensemble des faces et arêtes constitue un champ de contraintes Γ . Pour des besoins de simulation numérique, on cherche à obtenir un maillage \mathcal{T}_{Ω} (recouvrement polyédrique en tétraèdres) de Ω , au moyen d'un algorithme de triangulation de Delaunay, qui doit satisfaire le champ de contraintes Γ donné, ce qui n'est généralement pas le cas (en particulier, dès lors que Ω n'est pas convexe). Dans ce contexte, il est donc intéressant de savoir a priori si le champ de contraintes Γ sera satisfait exactement ou non dans toute triangulation \mathcal{T}_{Ω} , de Ω et plus précisément, de distinguer les arêtes et faces de Γ qui seront présentes dans toute triangulation de Delaunay de $\text{Conv}(\mathcal{S})$ de celles qui ne le seront pas.

Rappelons que le recouvrement de Delaunay $\mathcal{D}_{\mathcal{S}}$ de $\text{Conv}(\mathcal{S})$ contenant éventuellement des éléments non simpliciaux dont la décomposition en tétraèdres n'est pas unique, une face de Γ peut être contenue dans certaines triangulations de Delaunay de $\text{Conv}(\mathcal{S})$, mais pas dans toutes. La Delaunay-admissibilité d'une telle face dépend donc de l'algorithme de construction utilisé. C'est pourquoi nous introduisons la notion de Delaunay-admissibilité forte et en déduisons une condition nécessaire et suffisante, garantissant l'existence a priori d'une face donnée dans toute triangulation de Delaunay, indépendamment de la méthode de construction. Cette notion fait appel à une classification des faces liée à leurs propriétés relatives au diagramme de Voronoï.

Classification. – Considérons un ensemble fini de points distincts \mathcal{S} de \mathbb{R}^3 et un champ de contraintes associé Γ . On appelle *petite sphère*, notée $\partial\mathcal{B}_{ijk}$ (resp. *petite boule*, notée \mathcal{B}_{ijk}) d'un triangle non dégénéré $P_iP_jP_k$ la sphère (resp. la boule) ayant pour grand cercle le cercle circonscrit à ce triangle. On remarque que la petite sphère est la plus petite des sphères passant par les trois sommets du triangle. Nous introduisons une indicatrice Θ qui permet une classification de toute face de Γ de la manière suivante :

DÉFINITION 3.1. – Soit une face $f = P_i P_j P_k$ dont les sommets sont des points de \mathcal{S} deux à deux distincts. On désigne par \mathcal{H}_{ijk}^+ et \mathcal{H}_{ijk}^- les deux demi-espaces ouverts limités par le plan $(P_i P_j P_k)$, noté \mathcal{H}_{ijk} . L'indicatrice Θ associée à toute face f de Γ son type $\Theta(f)$, défini par :

- si $\mathcal{B}_{ijk} \cap \mathcal{S} = \{P_i, P_j, P_k\}$, alors $\Theta(f) = 0$;
- si $\mathcal{B}_{ijk} \cap \mathcal{S} \setminus \{P_i, P_j, P_k\} = \{Q_1, \dots, Q_r\} = \mathcal{E}$ tel que $\mathcal{E} \subset \mathcal{H}_{ijk}^+$ ou $\mathcal{E} \subset \mathcal{H}_{ijk}^-$, on désigne par Q^* un point de \mathcal{E} tel que la boule \mathcal{B}_t circonscrite au tétraèdre $t = P_i P_j P_k Q^*$ soit de rayon maximal :
 - si $Q^* \in \partial \mathcal{B}_{ijk}$ ou si $\mathcal{B}_t \cap \mathcal{S} = \{P_i, P_j, P_k, Q^*\}$, alors $\Theta(f) = 1.0$;
 - si $\mathring{\mathcal{B}}_t \cap \mathcal{S} \neq \emptyset$, alors $\Theta(f) = 1.1$;
 - si $Q^* \notin \partial \mathcal{B}_{ijk}$ et $\mathring{\mathcal{B}}_t \cap \mathcal{S} = \emptyset$ et $(\mathcal{B}_t \cap \mathcal{S}) \setminus \{P_i, P_j, P_k, Q^*\} = \mathcal{F} \neq \emptyset$, alors :
 - si $\mathcal{F} \cup \{Q^*\} \subset \mathcal{H}_{ijk}^+$ ou si $\mathcal{F} \cup \{Q^*\} \subset \mathcal{H}_{ijk}^-$, alors $\Theta(f) = 1.2.0$;
 - si $(\mathcal{F} \cup \{Q^*\}) \cap \mathcal{H}_{ijk}^+ \neq \emptyset$ et $(\mathcal{F} \cup \{Q^*\}) \cap \mathcal{H}_{ijk}^- \neq \emptyset$, alors $\Theta(f) = 1.2.1$;
- si, \mathcal{B}_{ijk} contient des points de \mathcal{S} autres que P_i, P_j et P_k , de part et d'autre de \mathcal{H}_{ijk} , et aucun dans celui-ci, alors $\Theta(f) = 2$;
- si \mathcal{B}_{ijk} contient un ensemble de points $\mathcal{E} \subset \mathcal{S}$ autres que P_i, P_j et P_k , dont certains dans le disque fermé $\Delta_{ijk} = \mathcal{B}_{ijk} \cap \mathcal{H}_{ijk}$:
 - si $\mathcal{E} \subset \mathcal{H}_{ijk}^+ \cup \mathcal{H}_{ijk}$ ou $\mathcal{E} \subset \mathcal{H}_{ijk}^- \cup \mathcal{H}_{ijk}$, alors $\Theta(f) = 3.1$;
 - si des points de \mathcal{E} sont de part et d'autre de \mathcal{H}_{ijk} , alors $\Theta(f) = 3.2$;
 - si \mathcal{E} ne contient pas d'autres points que ceux de Δ_{ijk} , alors $\Theta(f) = 3.3$.

DÉFINITION 3.2. – Une arête ou une face est *fortement Delaunay-admissible* si elle appartient au recouvrement de Delaunay $\mathcal{D}_{\mathcal{S}}$ de $\text{Conv}(\mathcal{S})$.

Le théorème suivant (dont on trouve une preuve dans [5]) représente une condition nécessaire et suffisante de Delaunay-admissibilité forte d'une face de Γ :

THÉORÈME 3.1 (Delaunay-admissibilité forte). – *Une face f est fortement Delaunay-admissible si et seulement si $\Theta(f) \in \{0; 1.0; 1.2.0\}$.*

Éléments de démonstration. – La démonstration complète du théorème est donnée dans [5]. On analyse les différents cas liés à la valeur de $\Theta(f)$. Si $\Theta(f) \in \{0; 1.0; 1.2.0\}$, on s'appuie sur un résultat, démontré dans [5], qui assure l'existence de f en tant que face d'au moins un polyèdre Π , éventuellement tétraédrique, du recouvrement de Delaunay de $\text{Conv}(\mathcal{S})$. Si $\Theta(f) \in \{1.1; 1.2.1; 2\}$, on montre au contraire qu'il n'existe pas de tel polyèdre Π . En particulier, dans le cas où $\Theta(f) = 1.1$, plusieurs cas doivent être discutés. Enfin, si $\Theta(f) = 3.x$, il suffit de considérer les seuls points de $\mathcal{E} \cap \Delta_{ijk}$, ce qui permet de se ramener à un problème bi-dimensionnel de Delaunay-admissibilité du triangle f dans le plan $P_i P_j P_k$ (voir [4]).

Dans la pratique, étant donné une contrainte Γ (dont on extrait un ensemble de points \mathcal{S}) correspondant à la discrétisation de la frontière d'un domaine quelconque Ω de \mathbb{R}^3 , le schéma général d'un algorithme de classification relatif à la Delaunay-admissibilité forte des faces de Γ consiste, pour toute face $f \in \Gamma$, à déterminer sa petite boule \mathcal{B}_f et le plan \mathcal{H}_f contenant f puis, si nécessaire, la boule \mathcal{B}_K circonscrite au tétraèdre K formé par les sommets de f et le point Q^* introduit dans la définition (3.1).

4. Exemple d'application

Le théorème (3.1) permettant de repérer les faces qui seront présentes dans toute triangulation de Delaunay de $\text{Conv}(\mathcal{S})$ de celles qui ne le seront pas, un algorithme de traitement de ces dernières a été développé (voir [5]). L'approche retenue consiste d'une part à subdiviser les faces non admissibles en deux sous-faces (ce qui a pour effet de propager la subdivision pour préserver la conformité du

maillage) et d'autre part à utiliser des bascules d'arêtes (dans le cas où les deux faces partageant une arête ne sont pas fortement Delaunay-admissibles). La figure 1 illustre un remaillage de surface obtenu au moyen de l'algorithme cité. La triangulation initiale contient 658 points et 1312 faces, définissant le champ de contraintes Γ , dont 436 ne sont pas Delaunay-admissibles. La triangulation Delaunay-admissible 2 contient 2033 points et 4062 triangles. Nous avons validé les résultats obtenus à l'aide d'un mailleur volumique de Delaunay contraint (GHS3D, INRIA-Rocquencourt), pour lequel tous les maillages obtenus vérifiaient la contrainte redéfinie Γ' (toutes les faces étaient générées après l'insertion des points).

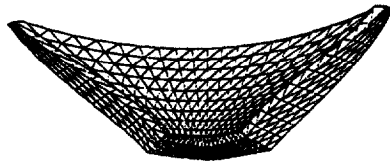


Figure 1. – Maillage surfacique non fortement Delaunay-admissible d'un barrage.

Figure 1. – Initial non-Delaunay-admissible surface mesh.

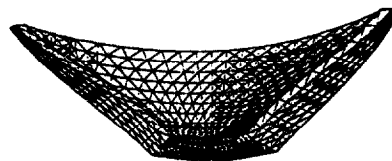


Figure 2. – Remaillage fortement Delaunay-admissible de la surface du barrage.

Figure 2. – Strongly Delaunay-admissible surface remeshing

5. Conclusion et extensions

Dans cette Note, nous avons brièvement rappelé quelques propriétés des triangulations de Delaunay et triangulations de Delaunay contraintes en dimensions trois. Étant donné un domaine quelconque de \mathbb{R}^3 dont on connaît une discrétisation Γ de la frontière (i.e., une liste d'arêtes et de faces), nous avons introduit la définition de Delaunay-admissibilité forte qui permet de garantir a priori l'existence d'une arête ou une face de Γ dans toute triangulation de Delaunay de l'enveloppe convexe $\text{Conv}(\mathcal{S})$ de \mathcal{S} au moyen d'un critère géométrique.

Certaines applications numériques requièrent un maillage de Delaunay d'un domaine Ω de \mathbb{R}^3 . C'est le cas, par exemple, de l'extraction de la surface médiane (parfois appelée squelette) et par suite du partitionnement du domaine Ω en sous-domaines de formes plus simples. Dans ce type d'applications, il s'avère parfois nécessaire de modifier a priori la discrétisation Γ de la frontière du domaine Ω , pour obtenir une contrainte Γ' , équivalente à Γ en un certain sens, de telle sorte que Γ' soit fortement Delaunay-admissible [5]. Le nouveau champ de contraintes Γ' existera donc dans toute triangulation de Delaunay de l'enveloppe convexe des points sur lesquels elle s'appuie.

Références bibliographiques

- [1] Armstrong C.G. et al., Applications of the medial axis transform in analysis modelling, Nafems, Proc. of the 5th Int. Conf. Reliability of FEM for Engng. Appl., Amsterdam, Netherlands, 10–12 May, 1995, pp. 415–426.
- [2] Delaunay B., Sur la sphère vide, Bull. Acad. Sci. URSS, Class. Sci. Nat. (1934) 793–800.
- [3] George P.L., Hecht F., Saltel E., Automatic mesh generator with specified boundary, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 92 (1992) 269–288.
- [4] George P.L., Borouchaki, H., Triangulation de Delaunay et maillage. Application aux méthodes d'éléments finis, Hermès, Paris, 1998.
- [5] Pébay P., Construction d'une triangulation surfacique Delaunay-admissible, Rapport de Recherche INRIA, no 3369, 1998.
- [6] Schönhart E., Über die Zerlegung von Dreieckspolyedern, Math. Ann. 98 (1928) 309–312.