

## Triangulation des surfaces implicites

Pascal J. FREY et Houman BOROUCAKI

P. J. F. : INRIA, Projet Gamma, Domaine de Voluceau-Rocquencourt,  
BP 105, 78153 Le Chesnay CEDEX France.  
E-mail : Pascal.Frey@inria.fr

H. B. : UTT GSM-LASMIS, BP 2060, 10010 Troyes, France.  
E-mail : Houman.Borouchaki@univ-troyes.fr

---

**Résumé.** On présente une méthode de triangulation des surfaces et volumes implicites généralisant les méthodes classiques d'extraction (adaptative) d'iso-surfaces, basée sur une tétraédrisation d'un nuage de points donné de  $\mathbf{R}^3$ , pour lesquels la valeur de la fonction est connue.

### *Triangulation of implicit surfaces*

**Abstract.** We present an implicit surface and volume triangulation method generalizing the classical (adaptive) iso-surfaces extraction methods, based on a tetrahedralization of a given set of points in  $\mathbf{R}^3$ , for which the value of the function is known.

---

### *Abridged English Version*

Implicit surfaces and volumes are commonly used for modelling purposes in numerous scientific applications, including CAD systems. In this context, recent years have witnessed an increasing interest in constructing a polyhedral representation of a given implicit surface. Our motivation comes from numerical simulations using the finite element method based on discrete (volumetric) data, and our aim is to control the accuracy of the polyhedral approximation of the geometric model, in particular, the surface mesh adequacy to finite elements requirements.

### **Geometric unit mesh**

The elements composing a simplicial triangulation shall satisfy geometric and topological properties as well as metric requirements. In order to create a geometric surface mesh, which is a second order approximation of the surface, the element sizes must be locally controlled in the vicinity of the mesh

---

Note présentée par Philippe G. CIARLET.

vertices. Therefore, each mesh edge is analyzed to determine if it agrees with the desired size map at its endpoints. The normalized length of an edge  $AB$  is acceptable, with respect to  $h(t)$  if, and only if,

$$(1) \quad d(AB) = \left( \int_0^1 \frac{1}{h(t)} dt \right)^{-1},$$

where  $d(AB)$  is the usual Euclidean length of  $AB$  and  $h(t)$  is a continuous monotonous function specifying the size variation along  $AB$ . A *mesh* having all edges of unit length is a so-called *unit mesh*. An isotropic geometric mesh is a unit mesh with respect to the size map associated with the minimal radii of curvature.

### Implicit surface triangulation

The triangulation procedure is based on two successive steps, the construction of the tetrahedralization of the set of points in  $\mathbb{R}^3$ , for which the value of the function is known, and the analysis and processing of these elements leading to the sought triangulation. Hence, the geometric approximation of the surface is related to the initial point set tetrahedralization. From this point of view, the Delaunay tetrahedralization, which connects the closest points, is probably a good choice. The implicit function is known at the vertices of the covering-up and the implicit surface intersects an element edge whenever the two endpoints are of opposite signs. Intersection points are then joined inside an element to form a triangle, or a quadrilateral. As the implicit function allows an exact computation of the surface vertices, a fast recursive procedure is used to track these vertices along a given edge.

The quadrilaterals elements resulting from the intersection of a tetrahedral element with the surface can be later subdivided into triangles, while preserving the geometric approximation. A nice feature of the proposed method is that it can be easily extended to the tetrahedral mesh generation of implicit volumes.

### Optimization

Given a surface triangulation, a geometric unit mesh can be achieved using mesh optimization tools, with respect to the size map associated with the minimal radii of curvature. The sole local modification tools are edge swapping and edge collapsing (or vertex removal). A smoothing procedure which aims at optimizing the surface approximation (according to  $G^1$  continuity) can also be applied. A mesh simplification algorithm is designed to reduce the number of mesh vertices, and leads to the construction of geometric unit meshes.

---

## 1. Introduction

Les surfaces et volumes implicites sont fréquemment utilisés pour la modélisation dans de nombreuses applications scientifiques et en particulier dans les systèmes de CAO. Obtenir une représentation polyédrique d'une surface implicite est un problème qui intéresse donc de nombreux domaines d'activité, à des degrés divers. Notre intérêt pour ces surfaces, sensiblement différent, vient de la modélisation par la méthode des éléments finis à partir de données discrètes. Les valeurs approchées du champ des solutions sont calculées aux nœuds du domaine d'étude et le champ des solutions peut être déduit formellement en tout point du domaine, au moyen d'une interpolation.

La qualité et la validité du champ de solutions calculées sont liées aux propriétés du maillage support (servant à l'interpolation). Dans ce contexte, la génération de maillages gouvernés et adaptés (tenant compte de requis spécifiques) est une technique permettant d'automatiser le processus de calcul (voir [5]). Nous traitons ici du problème d'approcher la surface le plus fidèlement possible par une surface plane par morceaux, possédant de plus une régularité suffisante entre morceaux adjacents. En particulier, on souhaite contrôler l'écart entre les polygones et la surface implicite.

Un couplage des techniques de simplification et d'optimisation de maillages permet d'envisager la construction de maillages géométriques de la surface implicite. Dans une première étape, une triangulation de la surface est construite à partir d'un recouvrement du domaine d'étude en cellules polyédriques convexes, puis optimisée pour conduire au maillage géométrique désiré.

## 2. Maillages géométriques unités

On rappelle d'abord les principaux requis relatifs aux maillages de surfaces.

Une triangulation simpliciale d'un domaine  $\Omega$  de  $\mathbf{R}^3$  est par définition un ensemble  $\mathcal{T}$  de tétraèdres recouvrant  $\Omega$ . Les éléments de  $\mathcal{T}$  doivent satisfaire des propriétés de conformité géométrique et topologique. En outre, une triangulation de variété (en particulier, une surface) doit vérifier des conditions supplémentaires de métrique (voir [2]). Un maillage (en termes d'éléments finis) est une triangulation dont tous les éléments sont proches de l'équilatéralité. Pour générer un maillage de la surface, approchant celle-ci au second ordre, il suffit de contrôler localement la taille des éléments au voisinage de chaque sommet. Pour cela, les arêtes du maillage sont examinées pour déterminer si elles ont une longueur idéale par rapport aux tailles souhaitées aux extrémités. La longueur normalisée d'une arête  $AB$  est idéale par rapport à  $h(t)$  si et seulement si

$$(2) \quad d(AB) = \left( \int_0^1 \frac{1}{h(t)} dt \right)^{-1},$$

où  $d$  est la distance euclidienne usuelle et  $h(t)$  est une fonction monotone continue qui donne la variation de tailles sur l'arête  $AB$ . Un maillage dont toutes les arêtes ont une longueur normalisée unité est un *maillage unité*. De fait, un maillage géométrique est un maillage unité par rapport à la carte des tailles de rayons de courbure minimaux. Dans le type d'application envisagé, l'objectif est d'obtenir un maillage géométrique de la surface implicite.

## 3. Triangulation des surfaces implicites

L'objectif des algorithmes de triangulation de surfaces implicites ou d'isosurfaces est de déterminer les intersections de la surface avec les arêtes de la cellule, et de former des triangles à partir de ces points. Le comportement de la fonction peut être connu précisément en tout point de l'espace, ou doit être approché par un interpolant, dans le cas des données discrètes.

3.1. POSITION DU PROBLÈME. – Dans le cadre qui nous intéresse ici, c'est-à-dire la simulation numérique par des méthodes d'éléments finis, la procédure de triangulation se compose de deux étapes :

1. le partitionnement spatial du domaine en cellules tétraédriques,
2. l'analyse et le traitement des cellules conduisant à la triangulation.

La première étape conduit à un recouvrement conforme (pavage) du domaine d'étude à base de tétraèdres (préféré à un recouvrement en hexaèdres, source d'ambiguïtés topologiques (voir [2])). La fonction implicite est évaluée aux sommets de ce recouvrement et la surface implicite intersecte toute arête du recouvrement connectant des sommets de signes opposés. Dans chaque polyèdre, les

points d'intersection sont alors reliés pour former un ou deux triangles, dont la réunion conduit à la triangulation cherchée.

3.2. RECHERCHE DES RACINES. – Les fonctions implicites autorisent le calcul exact des sommets appartenant à la surface, contrairement au cas des données discrètes pour lequel l'approximation linéaire est couramment utilisée. Une procédure récursive (dichotomie) est utilisée pour localiser ces sommets. Étant donnés deux sommets de signes opposés, la méthode consiste à subdiviser récursivement le segment droit connectant les valeurs de la fonction de signes opposés. La convergence peut être établie dès que la longueur du segment devient plus petite que le pouvoir de séparation de la méthode. L'algorithme proposé a été étendu pour converger vers le point de la surface, y compris dans le cas particulier où la fonction s'annule sur tout un segment de l'arête. Il repose toutefois sur l'hypothèse qu'une intersection, au plus, existe le long d'un segment reliant deux sommets opposés.

3.3. ANALYSE DES TÉTRAÈDRES. – L'étape d'analyse conduit à l'approximation au moyen de triangles de la partie de la surface contenue dans un tétraèdre. Cette approximation procède en trois étapes : La première correspond au calcul des points d'intersection de la surface avec le tétraèdre, au moyen de la procédure de recherche dichotomique des racines. La seconde étape consiste à connecter ces points par des segments dans le plan des faces ; ces segments matérialisent l'approximation de l'intersection de la surface avec les faces du tétraèdre. La troisième étape représente la connection de ces segments pour former des triangles, qui correspondent à l'approximation de la surface dans ce tétraèdre.

Dans un tétraèdre, les sommets de signes positifs peuvent être séparés des sommets de signes négatifs simplement par un plan. Il en résulte donc  $2^4 = 16$  cas d'intersection possibles de la surface avec le tétraèdre. Les deux seuls polygones résultant de l'intersection sont les triangles et les quadrangles. Les éventuels cas dégénérés qui peuvent se présenter et conduisent à la création de triangles plats ou nuls sont évités grâce à une procédure dite d'expansion locale de la fonction implicite (voir [2]).

En remplaçant les sommets de valeur nulle par des sommets de valeur  $\varepsilon \approx 0$ , le problème de dégénérescence est évité. Cette méthode revient à faire subir localement à la surface (\*) une dilatation de coefficient  $\varepsilon$ . Plus précisément,  $\varepsilon$  est choisi de la manière suivante :

$$(3) \quad \varepsilon = \min(\tau, \min(\Delta^-, \Delta^+) \tau),$$

où  $\tau$  est un seuil fixé (en pratique,  $\tau = 10^6$ ),  $\Delta^-$  et  $\Delta^+$  représentent les amplitudes maximales de variations des valeurs de la fonction dans les intervalles  $[-\infty, 0]$  et  $[0, \infty[$ , respectivement. En conséquence, toute valeur  $x$  telle que  $|x| < \varepsilon$  est remplacée par  $\text{sgn}(x) \times \varepsilon$ .

Les quadrangles issus de la triangulation sont subdivisés en triangles au moyen d'une procédure qui sélectionne la diagonale garantissant la meilleure approximation géométrique de la surface. En outre, l'intérêt du partitionnement tétraédrique est qu'il permet d'orienter les polygones générés (la normale à la surface étant orientée vers l'extérieur).

Une extension intéressante de cette approche est qu'elle permet d'obtenir une triangulation volumique (en tétraèdres) du domaine d'étude. Pour cela, il suffit de retriangler indépendamment la partie interne au domaine de chaque tétraèdre intersecté par la surface implicite.

3.4. OPTIMISATIONS. – En optimisant une triangulation géométrique donnée (qui vérifie des conditions de métriques), il est possible d'obtenir un maillage géométrique de la surface. Les deux modifications locales utilisées sont le retournement d'arête (opération topologique qui vise à changer la triangulation d'un quadrangle) et la suppression d'une arête (opération qui peut être remplacée par la suppression d'un sommet suivie de la retriangleration de la cavité ainsi créée).

Une procédure de régularisation des triangulations permet d'améliorer la qualité de l'approximation géométrique et vise de fait à optimiser la régularité de la surface au sens de la continuité ( $G^1$  ou

$C^1$ ). Elle est basée sur le retournement d'arête. Le défaut principal de la méthode proposée est de conduire à un nombre de triangles très important (souvent trop important par rapport à la qualité de l'approximation géométrique souhaitée). Les algorithmes de simplification de maillage, gouvernée par la carte de tailles associée aux sommets de la triangulation initiale, ont pour objectif de diminuer ce nombre de triangles tout en préservant la qualité de l'approximation géométrique, c'est-à-dire de produire des maillages géométriques. Les sommets du maillage final constituent un sous-ensemble des sommets de la triangulation d'origine.

Enfin, une procédure d'optimisation de maillage analyse les arêtes de la triangulation, et les arêtes jugées trop longues sont subdivisées en segments de longueurs unité, tandis que les arêtes trop courtes sont supprimées.

En premier lieu, une technique de simplification a été appliquée (voir [4]) sur les maillages obtenus avec la méthode présentée. Cette technique vise à éliminer les arêtes de la triangulation dont la longueur normalisée est jugée trop petite par rapport au champ des rayons de courbure minimaux, évalué approximativement (voir [3]). L'élimination est basée sur le collapsus d'arête (*edge collapsing*), c'est-à-dire que l'une des extrémités de l'arête est identifiée avec l'autre. Cette modification locale est appliquée si la qualité du maillage résultant est raisonnablement proche de la qualité du maillage précédent. Cette procédure s'accompagne d'une optimisation locale au moyen de bascules d'arêtes (*edge swapping*). Enfin, une procédure classique de bouger de points en augmentation de qualité est effectuée.

#### 4. Exemples

Pour illustrer la méthode proposée, on considère deux exemples analytiques de surfaces implicites. La Figure 1 représente la triangulation d'une surface implicite sans bord, correspondant à l'intersection de trois cylindres orthogonaux de rayons identiques. Cette surface de degré 6 est définie analytiquement comme une surface de niveau (iso-surface) correspondant à l'union des trois cylindres passant par un point choisi de manière adéquate. La fonction implicite décrivant cette surface est de la forme

$$(4) \quad f_1(x, y, z) = (x^2 + y^2 - 4)(x^2 + z^2 - 4)(y^2 + z^2 - 4) - 4.0078 = 0.$$

La surface est  $G^1$ , c'est-à-dire qu'elle ne présente pas de discontinuités et la triangulation résultante est composée de 6656 sommets et de 12816 faces. La Figure 2 représente une triangulation d'un exemple

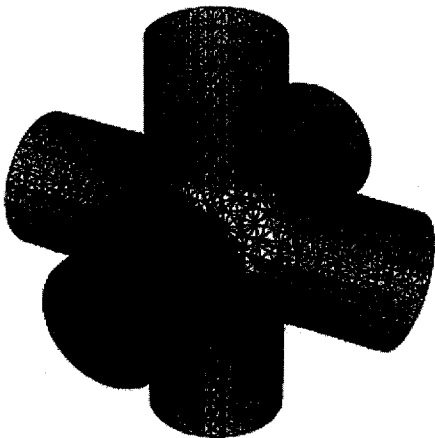


Fig. 1. – Triangulation de  $f_1$ .  
Fig. 1. – Triangulation of  $f_1$ .

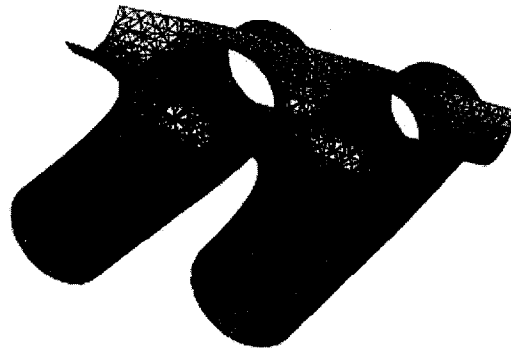


Fig. 2. – Triangulation de  $f_2$ .  
Fig. 2. – Triangulation of  $f_2$ .

analytique similaire à l'exemple précédent, représentant un autre arrangement des trois cylindres. Dans ce cas, la fonction implicite est de la forme

$$(5) \quad f_2(x, y, z) = (x^2 + (z - 5)^2 - 4)((y + 4)^2 + z^2 - 4)((y - 4)^2 + z^2 - 4) - 2287.5587 = 0,$$

et la triangulation (générée à partir d'une grille régulière de dimensions  $44 \times 50 \times 20$ ) comporte 7732 sommets et 14916 faces. Le partitionnement en tétraèdres du domaine d'étude est obtenu à partir des cellules d'un réseau cubique entier et les valeurs de la fonction implicite sont supposées connues en chacun des nœuds de ce réseau. Chaque cellule est découpée en 12 tétraèdres, ce qui conduit à une décomposition du domaine unique et sans ambiguïté.

Les Figures 3 et 4 illustrent le résultat de la procédure de simplification gouvernée par le champ des rayons de courbure avec deux niveaux d'approximation géométrique distincts. Le maillage de la Figure 3 comporte 5964 sommets et 11936 faces pour une tolérance d'approximation (écart entre une arête du maillage et la surface) fixe donnée. La qualité minimale obtenue est de 0.42 et les longueurs d'arêtes normalisées varient entre 0.62 et 3 (voir [3]). Dans la Figure 4, le maillage comporte 1516 sommets et 3040 faces pour une tolérance 1.5 fois moindre, avec une qualité minimale de 0.5 et des longueurs normalisées comprises entre 0.48 et 2.1.

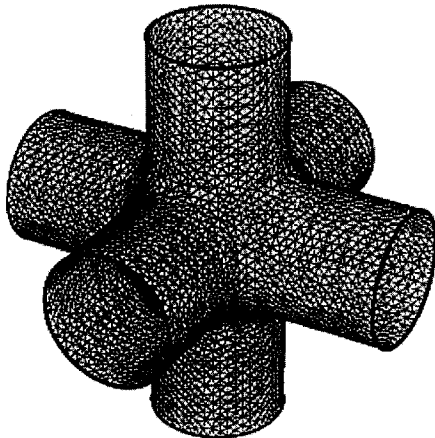


Fig. 3. – Maillage géométrique unité de  $f_1$   
(pour un écart  $\delta$ ).

Fig. 3. – Unit geometric mesh of  $f_1$   
(given tolerance  $\delta$ ).

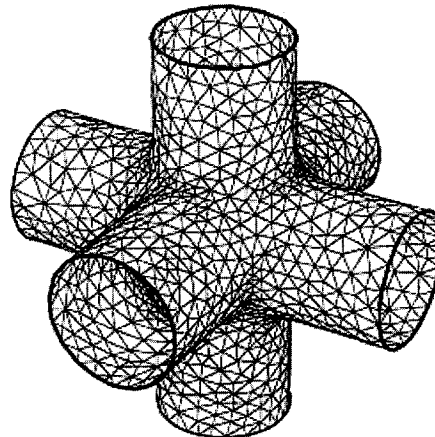


Fig. 4. – Maillage géométrique unité de  $f_1$   
(pour un écart  $1.5 \delta$ ).

Fig. 4. – Unit geometric mesh of  $f_1$   
(given tolerance  $1.5 \delta$ ).

Note remise le 21 février 1997, acceptée le 28 avril 1997.

### Références bibliographiques

- [1] Frey P. J. et Borouchaki H., 1996. Texel : triangulations de surfaces implicites. Partie I : aspects théoriques, *Rapport de Recherche INRIA*, RR-3066.
- [2] Frey P. J. et Borouchaki H., 1996. Critères géométriques pour l'évaluation des triangulations de surfaces, *Rapport de Recherche INRIA*, RR-2951.
- [3] Frey P. J. et Borouchaki H., 1997. Unit surface mesh simplification, McNu'97 Conference, June 29-July 2, 1997, Northwestern Univ., IL, USA.
- [4] George P. L. et Borouchaki H. Triangulation de Delaunay et maillage. Applications aux éléments finis, à paraître.