

# Qualité des maillages de surfaces

Pascal J. FREY et Houman BOROUCAKI

P. J. F. : Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique,  
Projet Gamma, Domaine de Voluceau-Rocquencourt, BP 105, 78153 Le Chesnay cedex, France.  
E-mail : Pascal.Frey@inria.fr

H. B. : Université de Technologie de Troyes,  
GSM-LASMIS, BP 2060, 10010 Troyes cedex, France.  
E-mail : Houman.Borouchaki@univ-troyes.fr

---

**Résumé.** Cette Note traite des qualités en taille et en forme des maillages surfaciques contraints, la contrainte représentant soit la métrique associée à l'espace de définition de la surface, soit la métrique associée à la géométrie de la surface. Les requis en forme sont ceux de la méthode des éléments finis. Les mesures de qualité proposées permettent de valider le maillage surfacique dans un schéma général d'adaptation de maillages pour la résolution de problèmes par éléments finis où la carte de métriques est évaluée par un estimateur d'erreur *a posteriori*.

## *Quality of surface meshes*

**Abstract.** *This Note deals with the size quality as well as the shape quality of constrained surface meshes, the constraint being either the metric associated with the domain of definition of the surface or the metric associated with the surface geometry. The shape requirements are those of the finite element method. The proposed measures allow to validate the surface mesh within a general mesh adaption scheme as can be found in numerical computations of finite element problems for which the metric map is provided via an a posteriori error estimate.*

---

## **Abridged English Version**

The adaption of finite element meshes to the physical behavior of the problem is a clever way of reducing the CPU time as well as of improving the accuracy of the numerical results. The adaption criteria rely on an *a posteriori* error estimate (see [3]) and the result of the analysis is translated in terms of metrics associated with the underlying mesh nodes. At a next stage of the iterative process, the mesh is then governed by the discrete metric map.

This paper deals with the adequacy between the mesh and the relevant metric map. In case of a volumetric mesh, this adequacy can be estimated through the edge lengths analysis with respect to the

---

Note présentée par Philippe G. CIARLET.

specified metrics. If the optimal edge length is normalized to one, the aim is to verify that every mesh edge is of unit length. This check turns out to be more tedious in case of surface meshes. Indeed, additional geometric constraints are mixed to the initial metric specifications. Thus, several type of adequacy must be considered: *physical conformity*, *geometrical conformity*, and *physico-geometrical conformity*. However, a mesh respecting the specified metric map is not necessarily optimal, in terms of the element shape (equilateral elements). The shape quality is indeed related to the area or volume of the elements as well as the edge length.

The objective of this Note is to introduce quality measures related to the element size (with respect to the metric map) as well as the element shape (finite element requirements) of the surface meshes.

Let  $T$  be a triangular surface mesh,  $S$  be the set of its vertices and  $\mathcal{M}_3(S)$  be a metric map associated with  $S$ . At each vertex, the metric is defined so that the desired edge lengths in any direction is normalized to unity. By interpolating  $\mathcal{M}_3(S)$  over  $T$ , we obtain a continuous map  $\mathcal{M}_3^c$  on  $T$ . The mesh  $T$  is conformal with respect to  $\mathcal{M}_3$  if

$$(1) \quad \forall PQ \in T, \quad \int_0^1 \sqrt{{}^tPQ \mathcal{M}_3^c(P + tPQ) \overline{PQ}} dt \approx 1,$$

where  $PQ$  is a mesh edge. A geometric metric map  $\mathcal{G}_3$  can be defined and associated with the surface vertices (see [1]), such that for a mesh respecting this map (a so-called geometric mesh), the gap between the triangles and the surface is controlled. Actually, the metric  $\mathcal{G}_3$  specifies at any vertex the sizes along its principal basis corresponding to the two main vectors of the principal directions (in the tangent plane) and to the normal vector. The sizes specified along the principal directions are related to the principal radii of curvature and the size specification in the normal direction is arbitrary. The mesh  $T$  is called *geometrically conform* if each edge of  $T$  is of unit length with respect to  $\mathcal{G}_3$ .

A mesh  $T$  is a *physico-geometric surface mesh* if it is conformal to the map defined as the intersection of  $\mathcal{M}_3$  and  $\mathcal{G}_3$ . This intersection is characterized by the largest unit ball contained into those of  $\mathcal{M}_3$  and  $\mathcal{G}_3$ .

The shape quality of a triangle  $K$  of the surface is related to the qualities of the traces of  $K$  in the tangent plane associated to its vertices. These traces are obtained by matching the triangle normal and the vertex normals using an appropriate rotation. A possible quality definition of the traces of  $K$  in the vertex tangent plane can be found in [2].

## 1. Introduction

L'adaptation de maillages en éléments finis permet principalement de réduire les temps de calcul et d'améliorer la précision numérique des résultats en effectuant les calculs sur des maillages adaptés au phénomène physique étudié. Les critères d'adaptation sont basés sur l'analyse de la solution par un estimateur d'erreur *a posteriori* (voir [3]), et le résultat est traduit en termes de métriques associées aux nœuds du maillage support du calcul. Cette carte discrète de métriques permet de gouverner le maillage à l'itération suivante.

On s'intéresse ici à l'adéquation du maillage adapté avec la carte associée. Dans le cas d'un maillage volumique, cette adéquation peut être vérifiée en analysant la longueur des arêtes du maillage adapté par rapport à la carte spécifiée. En normalisant la longueur idéale à l'unité pour chaque métrique, il s'agit de vérifier que chaque arête du maillage adapté est de longueur unité. Le cas des maillages surfaciques est quant à lui plus délicat. En effet, des contraintes de nature géométrique s'ajoutent aux spécifications de métriques initiales. Dans ce cas, plusieurs types d'adéquation entre le maillage et

la carte doivent être envisagés : *conformité physique*, *conformité géométrique* et *conformité physico-géométrique*. Toutefois, le respect de la carte de métriques ne suffit pas à garantir un maillage équilatéral (optimal en forme), dans lequel tous les éléments sont équilatéraux vis-à-vis de la carte spécifiée. En effet, seule la longueur des arêtes des éléments est contrôlée, alors que la qualité en forme de ceux-ci dépend aussi de leurs surfaces ou de leurs volumes.

L'objectif de cette Note est d'introduire des mesures de qualité relatives à la taille (respect de la carte de métriques) et à la forme (respect de requis de type éléments finis) des maillages surfaciques. Un exemple numérique vient illustrer les mesures proposées.

## 2. Respect de la taille

Soient  $T$  un maillage surfacique composé de triangles,  $S$  l'ensemble de ses sommets et  $\mathcal{M}_3(S)$  une carte de métriques associée à  $S$ . La métrique en un sommet  $P$  de  $T$  est représentée par une matrice symétrique définie positive caractérisant la longueur unité des arêtes  $PX$  incidentes à  $P$  par la relation

$$(2) \quad {}^t \overrightarrow{PX} \mathcal{M}_3(P) \overrightarrow{PX} = 1.$$

Le lieu géométrique des points vérifiant cette équation est généralement un ellipsoïde désigné par  $\overline{\mathcal{M}_3(P)}$ . En interpolant la carte discrète de métriques  $\mathcal{M}_3(S)$  sur  $T$ , on obtient une carte continue  $\mathcal{M}_3^c$  dans  $\mathbb{R}^3$ . On définit ainsi une structure riemannienne en munissant  $\mathbb{R}^3$  de la carte  $\mathcal{M}_3^c$ . Vérifier si  $T$  respecte, sans considération géométrique (aucune arête n'est tracée sur la surface), la carte  $\mathcal{M}_3(S)$  revient à montrer que

$$(3) \quad \forall a \in T, \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \leq \ell(a) \leq \sqrt{2},$$

où  $a$  est une arête et  $\ell(a)$  sa longueur par rapport à  $\mathcal{M}_3^c$ . Rappelons que si  $P$  et  $Q$  sont les extrémités de l'arête  $a$ , paramétrée entre 0 et 1 par  $P + t\overrightarrow{PQ}$ , alors

$$(4) \quad \ell(PQ) = \int_0^1 \sqrt{{}^t \overrightarrow{PQ} \mathcal{M}_3^c(P + t\overrightarrow{PQ}) \overrightarrow{PQ}} dt.$$

Un calcul approché de cette expression consiste à trouver le point  $P_1$  (resp.  $Q_1$ ) sur la droite support de  $PQ$  appartenant à  $\overline{\mathcal{M}_3(P)}$  (resp.  $\overline{\mathcal{M}_3(Q)}$ ) vérifiant ainsi  $P_1 = PQ \cap \overline{\mathcal{M}_3(P)}$  (resp.  $Q_1 = QP \cap \overline{\mathcal{M}_3(Q)}$ ) et à approcher  $\ell(PQ)$  par :

$$(5) \quad \ell(PQ) = \|\overrightarrow{PQ}\| \int_0^1 \frac{1}{h(t)} dt,$$

où  $h(t)$  est une fonction monotone d'interpolation de tailles (par exemple, une progression géométrique) vérifiant  $h(0) = \|\overrightarrow{PP_1}\|$  et  $h(1) = \|\overrightarrow{QQ_1}\|$ . Avec cette approximation, la variation de taille est contrôlée dans toutes les directions. Comme dans une structure riemannienne, la variation de taille ne peut être imposée que dans deux directions fixées (voir [2]), l'approche considérée représente une approximation assez grossière de  $\ell(PQ)$ . Toutefois, elle présente l'avantage de remplacer l'interpolation des métriques par une interpolation de taille sur un segment de  $\mathbb{R}^3$ .

Si on considère les arêtes tracées sur la surface, il convient de vérifier si  $T$  respecte la carte  $\mathcal{M}_2(S)$  vérifiant, pour chaque point  $P$ ,

$$(6) \quad \overline{\mathcal{M}_2(P)} = \overline{\mathcal{M}_3(P)} \cap \Pi(P),$$

où  $\Pi(P)$  est le plan tangent en  $P$  à la surface. En remarquant que la carte  $\mathcal{M}_2$  n'est définie que dans les plans tangents, la longueur d'une arête  $a = PQ$  est alors donnée par la formule (5) où, dans ce cas,  $P_1 = PQ \cap \overline{\mathcal{M}_2(P)}$  (resp.  $Q_1 = QP \cap \overline{\mathcal{M}_2(Q)}$ ),  $\tilde{Q}$  (resp.  $\tilde{P}$ ) étant la projection de  $Q$  (resp.  $P$ ) dans le plan tangent  $\Pi(P)$  (resp.  $\Pi(Q)$ ). Cette conformité en taille est appelée *conformité physique*.

Il est possible de construire une carte de métriques géométrique  $\mathcal{G}_3$  associée aux points d'une surface (voir [1]), telle que pour un maillage respectant cette carte (maillage dit *géométrique*), l'écart entre les triangles et la surface est contrôlé. En réalité, la métrique  $\mathcal{G}_3$  impose, pour chaque point, des tailles suivant sa base principale composée des deux vecteurs directeurs des directions principales (appartenant au plan tangent), et du vecteur normal. Les tailles imposées suivant les directions principales dépendent des rayons de courbure principaux et la taille imposée suivant la normale est quelconque. Dans [4] on trouve une procédure permettant un calcul approché de la base principale et des rayons de courbure principaux, à partir de la seule donnée du maillage de la surface. En pratique, cette approche est utilisée pour déterminer la métrique  $\mathcal{G}_3$ .

Comme la taille imposée suivant la normale est quelconque, on considère plutôt la trace  $\mathcal{G}_2$  de  $\mathcal{G}_3$  dans les plans tangents vérifiant, pour chaque point  $P$ ,

$$(7) \quad \overline{\mathcal{G}_2(P)} = \overline{\mathcal{G}_3(P)} \cap \Pi(P).$$

Vérifier si  $T$  est géométrique revient à vérifier si  $T$  respecte la carte  $\mathcal{G}_2$  (définie dans les plans tangents) associée aux sommets de  $T$ . La conformité par rapport à la carte  $\mathcal{G}_2$  est appelée *conformité géométrique*. Notons que cette conformité géométrique est relative à l'écart maximal fixé entre la triangulation et la surface. Ainsi, pour un écart fixé, un maillage est ou n'est pas géométrique. En pratique, pour un écart fixé, c'est la longueur maximale des arêtes incidentes en un sommet de  $T$  qui détermine localement si  $T$  est géométrique (en ce sommet).

Dans le cas où  $T$  respecte à la fois  $\mathcal{M}_2$  et  $\mathcal{G}_2$ ,  $T$  est un maillage *physico-géométrique*. Vérifier si  $T$  est physico-géométrique revient à vérifier si  $T$  respecte la carte intersection des deux cartes  $\mathcal{M}_2$  et  $\mathcal{G}_2$  définies dans les plans tangents (voir [2]). Cette intersection est caractérisée par les plus grandes boules unité incluses à la fois dans les boules unité associées à  $\mathcal{M}_2$  et à celles de  $\mathcal{G}_2$ .

### 3. Respect de la forme

L'une des définitions possibles de la qualité en forme d'un triangle  $K$  tracé dans un plan, est donnée par (voir [2]) :

$$(8) \quad \Gamma(K) = \min_{1 \leq i \leq 3} \gamma^i(K),$$

où  $\gamma^i(K)$  est la qualité du triangle  $K$ , calculée dans la métrique  $\mathcal{M}_i$  spécifiée au sommet  $i$  de  $K$ , et donnée par :

$$(9) \quad \gamma^i(K) = 2\sqrt{3} \frac{|\sqrt{\text{Det}(\mathcal{M}_i)} \text{Det}(\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1P_3})|}{\sum_{1 \leq j < k \leq 3} {}^t P_j P_k \mathcal{M}_i P_j P_k}.$$

On peut généraliser cette mesure de qualité aux cas des triangles de maillages surfaciques. Notons que dans ce cas, la métrique en un sommet est définie dans le plan tangent associé. L'extension proposée consiste à redéfinir  $\gamma^i(K)$ , pour un élément  $K$ . Soient  $P$  le sommet  $i$  de  $K$ ,  $\vec{n}_K$  un vecteur normal au plan support de  $K$  et  $\vec{n}_P$  un vecteur normal au plan tangent  $\Pi(P)$ . Soit  $\theta$  l'angle entre

les deux vecteurs  $\vec{n}_K$  et  $\vec{n}_P$ . Soit  $\tilde{K}_i$  l'image de  $K$  par la rotation autour de l'axe support du vecteur  $\vec{n}_K \times \vec{n}_P$  et d'angle  $\theta$ . Le triangle  $\tilde{K}_i$  appartient donc au plan tangent  $\Pi(P)$  et on peut mesurer sa qualité par rapport à la métrique associée à  $P$  définie dans ce plan. Ainsi, la qualité de  $K$  est définie comme

$$(10) \quad \Gamma(K) = \min_{1 \leq i \leq 3} \gamma^i(\tilde{K}_i).$$

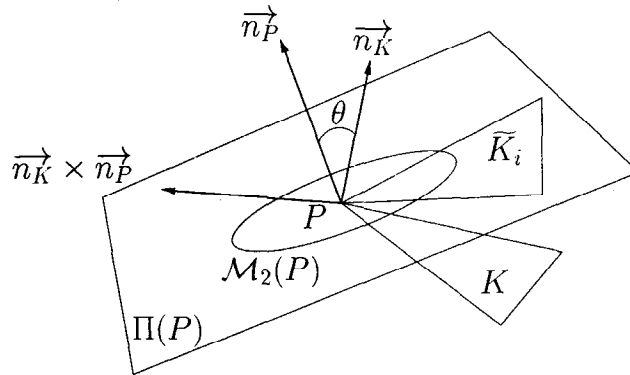


Fig. 1. – Qualité d'un triangle.

Fig. 1. – Triangle quality.

Cette mesure de qualité varie dans l'intervalle  $[0, 1]$ , où 0 (resp. 1) est associé à un triangle de qualité médiocre (resp. bonne). La qualité d'un maillage surfacique  $T$  est caractérisée par, d'une part la moyenne, et d'autre part le minimum des qualités des triangles de  $T$ .

*Remarque.* – Dans l'hypothèse où la carte de métriques  $\mathcal{M}_3(S)$  n'est pas spécifiée, celle-ci est construite à partir du maillage  $T$ . Dans le cas isotrope (où la spécification de taille est uniforme suivant toutes les directions), la taille en chaque sommet  $P$  de  $T$  est une moyenne des longueurs d'arêtes incidentes à  $P$ . Cette moyenne représente la solution d'un problème de minimisation d'écart entre la taille cherchée et les longueurs d'arêtes issues de  $P$ ; plus précisément, on cherche à résoudre le problème suivant :

$$(11) \quad \min \sum_Q \left( h(P) - \|\vec{PQ}\| \right)^2,$$

où  $Q$  parcourt l'ensemble des extrémités d'arêtes issues de  $P$ . Ce problème devient plus délicat dans le cas anisotrope, car la solution correspondante n'est pas unique.

#### 4. Exemple

Dans cette courte section, on se propose d'analyser une triangulation de surface représentant le squelette d'un pied (voir Fig. 2) ainsi qu'un remaillage géométrique de celle-ci (voir Fig. 3). Le maillage initial comporte 2154 points et 4204 triangles, sa qualité en forme minimale (resp. moyenne) est de 0 (resp. 0.67) et sa qualité en taille minimale (resp. moyenne) est de 0.07 (resp. 0.36). Ce maillage n'est donc pas un maillage géométriquement conforme. Le maillage optimisé comporte 28896 points et 57688 triangles. Sa qualité en forme minimale (resp. moyenne) est de 0.36 (resp. 0.93) et

sa qualité en taille minimale (resp. moyenne) est de 0.3 (resp. 0.94). Ce dernier maillage est donc globalement un maillage géométriquement conforme (l'écart à la surface, fixé à 14 degrés, est localement violé).

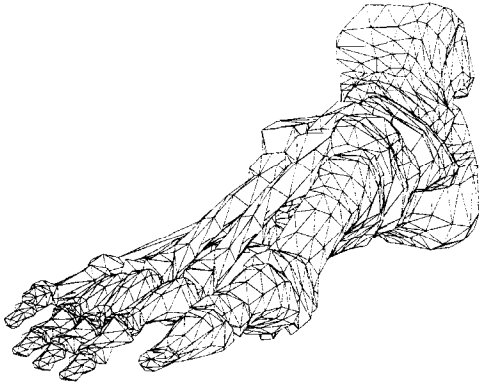


Fig. 2. – Maillage de surface initial.  
Fig. 2. – Initial surface mesh.

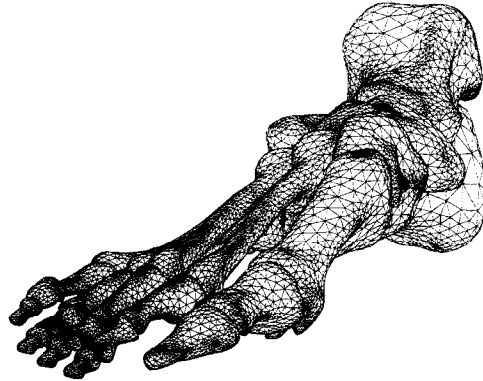


Fig. 3. – Maillage de surface optimisé.  
Fig. 3. – Optimized surface mesh.

Note remise le 16 juin 1997, acceptée le 15 septembre 1997.

### Références bibliographiques

- [1] Borouchaki H. et George P. L., 1997. Maillage des surfaces paramétriques. Partie I : Aspects théoriques, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 324, Serie I, p. 833-837.
- [2] Borouchaki H. et al., 1997. Delaunay mesh generation governed by metric specifications. Part I. Algorithms, *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 25, pp. 61-83.
- [3] Ciarlet P. G., 1991. Basic Error Estimates for Elliptic Problems, Handbook of Numerical Analysis, vol II, *Finite Element methods* (Part 1), pp. 17-352, North Holland.
- [4] Hamann B., 1993. Curvature approximation for triangulated surfaces, in *Geometric Modelling*, Computing Suppl. 8, Farin, Hagen, Noltmeier and Knodel eds., Springer, NY.