



INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE ET EN AUTOMATIQUE

*Génération et adaptation de maillages de surfaces
à partir de données anatomiques discrètes*

Pascal J. Frey

N° 4764

11 mars 2003

THÈME 4



*R*apport
de recherche



Génération et adaptation de maillages de surfaces à partir de données anatomiques discrètes

Pascal J. Frey*

Thème 4 — Simulation et optimisation
de systèmes complexes
Projet Gamma

Rapport de recherche n° 4764 — 11 mars 2003 — 34 pages

Résumé : Des systèmes de numérisation précis et rapides sont aujourd'hui largement utilisés dans de nombreux domaines de l'ingénierie scientifique et biomédicale. Les données discrètes en résultant sont généralement directement converties en maillages de surfaces polyédriques, au moyen d'algorithmes de type "brute-force", conduisant à des maillages pouvant souvent contenir plusieurs millions de polygones. De fait, simplifier de tels maillages permet d'en faciliter le stockage et la transmission, et d'en rendre le calcul et le rendu possibles sinon efficaces. Dans ce rapport, on présente un schéma général pour la simplification et l'adaptation de maillages de surfaces basé sur un contrôle de l'approximation géométrique ainsi que la qualité en forme et en taille des éléments (requis dans les simulations numériques). Plusieurs exemples académiques ou relatifs à des géométries anatomiques complexes sont présentés pour illustrer l'efficacité de l'approche proposée.

Mots-clés : maillage de surface, maillage géométrique, maillage unité, adaptation de maillage, simplification de maillage, métrique, estimateur d'erreur *a posteriori*, données discrètes, reconstruction.

* Email : Pascal.Frey@inria.fr

Generation and adaptation of surface meshes based on discrete anatomical data

Abstract: Fast and accurate scanning devices are nowadays widely used in many engineering and biomedical fields. The resulting discrete data is usually directly converted into polygonal surface meshes, using “brute-force” algorithms, often resulting in meshes that may contain several millions of polygons. Simplification is therefore required in order to make storage, computation and display possible if not efficient. In this report, we present a general scheme for mesh simplification and optimisation that allows to control the geometric approximation as well as the element shape and size quality (required for numerical simulations). Several examples ranging from academic to complex biomedical geometries (organs) are presented to illustrate the efficiency and the utility of the proposed approach.

Key-words: Surface mesh, geometric mesh, unit mesh, mesh adaptation, mesh simplification, metric, *a posteriori* error estimate, discrete data, reverse engineering.

Table des matières

1	Introduction	4
1.1	Motivations	4
1.2	Travaux similaires	5
1.3	Schéma général	6
1.4	Plan de l'exposé	7
2	Reconstruction de surfaces	8
2.1	Problème de reconstruction	8
2.2	Des coupes à la triangulation de surface	9
2.3	Triangulation de nuages de points	9
2.4	Triangulation d'une iso-surface	10
3	Construction d'un maillage géométrique	13
3.1	Définition d'un maillage géométrique	13
3.2	Procédure de lissage	14
3.3	Simplification géométrique de maillage	15
3.3.1	Distance de Hausdorff discrète.	15
3.3.2	Procédure de simplification	16
4	Génération d'un maillage de calcul	17
4.1	Sur les métriques	17
4.2	Définition du support géométrique	19
4.3	Optimisation du maillage de surface	19
4.4	Génération du maillage volumique	20
5	Adaptation de maillage	21
5.1	Un estimateur d'erreur géométrique	21
5.2	Schéma général	23
6	Exemples d'applications	24
6.1	Maillages géométriques	24
6.2	Maillages de calcul	26
6.3	Maillages adaptés	30
7	Conclusions et perspectives	32

1 Introduction

Avec le développement de systèmes de numérisation et d'imagerie rapides et précis, il est maintenant possible de collecter de larges volumes de données (nuages de points ou ensemble de voxels) sur de nombreux objets physiques et des organes humains quasiment en temps réel. Le souhait (ou la nécessité) d'une précision de plus en plus importante est lié au désir de capturer la géométrie du domaine d'intérêt aussi précisément que la technologie d'acquisition le permet. Parmi les diverses applications en génie logiciel et biomédical concernées par cette technique, le projet *MichelAnge* (Université de Stanford) et le projet d'*Homme virtuel* (Visual Human Project, National Library of Medicine) sont particulièrement représentatifs de cette tendance, chacun dans sa discipline spécifique. Dans de telles applications, le défi proposé aux participants est lié à la taille des jeux de données, typiquement composés de millions, dizaines de millions, voire milliards de points. Les images numériques (ou les nuages de points) ne sont généralement appropriées ni à l'archivage et au transfert de données, ni à la représentation d'une géométrie complexe en dimension trois, les modèles polygonaux leurs étant largement préférés. Ces dernières années, de nombreux algorithmes de reconstruction ont été proposés dans le but d'extraire des approximations linéaires par morceaux (*i.e.*, des triangulations) directement à partir des nuages de points ou des images numériques. En général, ces maillages (de surfaces) possèdent le même degré de complexité que les données d'origine. Toutefois, de telles triangulations ne peuvent être ni stockées en mémoire ni affichées par les cartes graphiques, même les plus performantes. Malheureusement, comme l'a bien exprimé Luebke [37], "le nombre de polygones désiré dépasse toujours le budget (de polygones) autorisé". C'est pourquoi, dans le souci de les rendre exploitables (ceci incluant le stockage, la transmission, le rendu, le calcul, etc.), la complexité des modèles polygonaux doit être réduite de manière drastique. Ce processus inclut notamment les techniques de simplification ou de décimation des maillages de surfaces. Ces méthodes numériques visent à réduire, autant que possible, le nombre de polygones du modèle, tout en préservant le degré de précision géométrique de celui-ci. En outre, des requis spécifiques peuvent être imposés sur les maillages résultants, concernant par exemple la qualité en forme et en taille des éléments, par exemple, dans le contexte des simulations numériques basées sur des méthodes d'éléments ou de volumes finis.

1.1 Motivations

Comme on l'a déjà dit, les maillages polygonaux sont largement répandus dans les applications graphiques et les simulations numériques, en grande partie parce qu'ils permettent de représenter virtuellement tout type de géométrie et de topologie pour des surfaces de complexité quelconque. Toutefois, les contraintes exercées sur ces maillages diffèrent largement d'un domaine d'application à l'autre. En graphique, par exemple, l'objectif est, en principe, d'afficher une scène complexe (composée d'une multitude d'objets polyédriques) aussi rapidement que possible (en temps réel), en fonction des capacités de la carte graphique, sans perte importante de précision (ou en contrôlant au mieux cette perte).

Dans ce cas, le nombre de rafraichissements d'écran par seconde dicte le nombre maximal de primitives (*i.e.*, de triangles) utilisés pour représenter le modèle. Ici, les algorithmes de simplification de maillage sont conçus pour générer des niveaux de détails (LOD) des objets de la scène à représenter, la complexité des objets dépendant de leur position relative par rapport à l'utilisateur (donc du point de vue). Dans les simulations numériques, l'accent est mis sur la précision ainsi que sur le contrôle de la qualité des éléments. Un compromis est recherché entre le nombre de sommets (*i.e.*, le nombre de degrés de liberté) et la qualité de l'approximation géométrique de la surface. Les maillages polygonaux sont souvent considérés comme un format pratique d'échange de données (plus souple qu'aucun fichier de type CAO). Dans ce contexte, la taille d'un modèle peut être réduite pour être compatible avec les contraintes de bande passante d'un réseau. Dans chaque domaine d'application, c'est l'utilisation finale du maillage qui guide les algorithmes de simplification en fonction des requis et besoins de cette application.

La motivation principale de la simplification de maillage est de créer un maillage *optimal* (en un sens que l'on précisera ultérieurement), qui représente une approximation précise de la géométrie de la surface à l'aide d'un nombre minimal d'éléments réguliers (de bonne qualité). Le contrôle de la qualité en taille et en forme des éléments et la décimation de sommets sont deux requis (souvent) contradictoires derrière le processus de simplification. De fait, pour préserver la géométrie de la surface, l'erreur d'approximation doit être équi-distribuée sur les éléments du maillage, ceci aboutissant à distribuer les sommets de manière uniforme sur la surface. Dans les sections suivantes, on va montrer que ceci peut s'obtenir en utilisant un estimateur d'erreur *a posteriori* géométrique basé sur le hessien de la surface [19] et en définissant une carte de métrique discrète anisotrope aux sommets de la triangulation d'origine. Cette carte de métrique sert alors à gouverner les algorithmes de modification de maillage.

1.2 Travaux similaires

Depuis les premiers papiers de Schroeder [40] et Turk [42], la simplification de maillage a fait l'objet de nombreux travaux de chercheurs et d'ingénieurs. Ainsi, par exemple, plus de 1 000 papiers sont recensés dans les base de données de l'Internet à la requête "simplification de maillage". Ceci atteste de l'importance de ce thème dans de nombreux domaines d'applications, incluant l'informatique graphique, la réalité virtuelle, les simulations biomédicales et numériques, etc. Récemment, quelques synthèses intéressantes des principales techniques de simplification ont été publiées par divers auteurs (on se référera en particulier à [28, 33, 37]), la plupart étant toutefois orientées principalement sur les problèmes graphiques.

Dans le contexte des calculs numériques, dans la mesure où les solveurs ont atteint un certain degré de maturité, il est maintenant possible d'envisager de complexes simulations biomédicales, comme par exemple des problèmes d'hémodynamique [10]. Comme divers logiciels de maillage de surfaces et de volumes sont également accessibles, le gou-

lot d'étranglement des simulations par des méthodes d'éléments ou de volumes finis est désormais lié au passage des images médicales au modèle discret de calcul.

En ce qui concerne les données discrètes obtenues par des appareils de numérisation ou d'imagerie, plusieurs algorithmes ont été proposés pour construire un maillage polygonal à partir d'ensembles de voxels [36] ou de nuages de points [7]. En dépit de leur efficacité et de leur robustesse, ces approches souffrent généralement de plusieurs défauts rédhibitoires :

- i) les données discrètes sont supposées fiables, mais les données numérisées peuvent s'avérer très bruitées (*i.e.*, les points sont "à côté" de la surface);
- ii) la précision accrue des appareils de numérisation ou d'imagerie produit des volumes de données beaucoup plus denses que nécessaire (la densité n'est pas directement liée à la complexité géométrique locale) et par conséquent à des modèles polygonaux trop complexes;
- iii) les algorithmes de reconstruction de type "force brute" (comme les "Marching-cubes" [36]) introduisent souvent des artéfacts dans l'approximation linéaire par morceaux (par exemple, des effets "marches d'escalier");
- iv) en général, aucun (ou alors très peu de) soin n'est apporté à la qualité des éléments, bien que ceci soit un requis d'importance dans les simulations numériques par des méthodes d'éléments ou de volumes finis [11].

Comme les deux premiers problèmes sont étroitement liés à la technologie des appareils d'échantillonnage utilisés dans l'étape d'acquisition, il s'agit de s'accomoder au mieux de ces contraintes et, aujourd'hui, aucune solution n'a, semble-t-il, émergé, qui soit capable de préserver la précision des données et conduise à un ensemble de données optimal (minimal). Donc, au lieu de se polariser sur l'optimisation des algorithmes d'acquisition de données (ce qui constitue à n'en pas douter un champ de recherches prometteur), on s'intéresse ici aux méthodes d'optimisation de maillages à partir de modèles polygonaux, sans hypothèse sur la géométrie ou la topologie du domaine. Ceci étant posé, l'approche suggérée dans ce rapport inclut deux étapes successives, l'une de "filtrage" (pour éliminer le bruit), l'autre de remaillage contrôlée par une spécification métrique basée sur les propriétés intrinsèques de la surface.

1.3 Schéma général

Formellement, le problème auquel on s'intéresse peut être décrit de la façon suivante. Soit un domaine fermé borné Ω de \mathbb{R}^3 décrit par sa frontière Σ . Étant donnée une triangulation initiale de la surface $\mathcal{M}_{ref}(\Sigma)$ de Σ , éventuellement couplée à une carte de métriques (discrète) $\mathcal{H}_{ref}(\Sigma)$ prescrivant les tailles désirées d'éléments aux sommets de la triangulation, l'objectif est de construire un maillage de calcul $\mathcal{M}(\Sigma)$. Pour cela, on construit d'abord un maillage de surface géométrique $\mathcal{M}_g(\Sigma)$ à partir de la triangulation $\mathcal{M}_{ref}(\Sigma)$. Ensuite, dans un deuxième temps, le maillage $\mathcal{M}_g(\Sigma)$ est optimisé au regard de la qualité en forme et en taille des éléments conduisant à un maillage de calcul $\mathcal{M}(\Sigma)$ de la surface.

Pour schématiser, la stratégie suggérée pour construire le maillage $\mathcal{M}(\Sigma)$ comprend les quatre étapes suivantes :

1. le maillage de référence initial $\mathcal{M}_{ref}(\Sigma)$ est simplifié et optimisé dans une bande de tolérance (une "enveloppe", basée sur la distance de Hausdorff) spécifiée par l'utilisateur, ceci conduisant au maillage de référence géométrique $\mathcal{M}_{ref,g}(\Sigma)$;
2. un support géométrique de continuité C^1 par morceaux est défini sur le maillage $\mathcal{M}_{ref,g}(\Sigma)$, afin de définir une représentation "lisse" de la surface Σ ;
3. la carte de métriques discrète $\mathcal{H}_{ref,g}(\Sigma)$ fournie avec le maillage $\mathcal{M}_{ref,g}(\Sigma)$ est modifiée afin de prendre en compte la géométrie de la surface et la gradation désirée;
4. le maillage $\mathcal{M}_{ref,g}(\Sigma)$ est alors adapté (au regard de la taille et de la forme de ses éléments) à la carte de métriques modifiée $\mathcal{H}_{ref,g}(\Sigma)$ conduisant au maillage de calcul $\mathcal{M}(\Sigma)$ souhaité.

Pour certaines applications, l'approche proposée peut être légèrement modifiée pour tenir compte de la nature spécifique des données. C'est le cas, par exemple, des terrains ou des surfaces cartésiennes [18].

1.4 Plan de l'exposé

Dans ce rapport, on présente une approche globale pour générer des maillages *géométriques* et *de calcul* à partir de triangulations de surfaces. À la Section 2, on présente brièvement les trois principales classes d'algorithmes de reconstruction de surface pour des données discrètes. À la Section 3, on introduit une approche globale pour construire un maillage de surface *géométrique* à partir d'une triangulation. À la Section 4, on détaille la stratégie adoptée pour construire un maillage *de calcul*, en prenant en compte des requis relatifs à la taille et à la forme des éléments. À cette fin, on indique comment construire un tenseur de métrique (fourni par un "estimateur d'erreur géométrique") destiné à gouverner la génération de maillage. À la Section 5, on montre comment cette approche peut aisément s'étendre à la génération de maillages adaptés dans le cas de simulations numériques. Finalement, Section 6, on donne plusieurs exemples de maillages *géométriques* et de maillages *de calcul* pour des application biomédicales, démontrant ainsi l'efficacité de l'approche proposée.

2 Reconstruction de surfaces

Aujourd'hui, les systèmes de numérisation actuels sont capables de fournir, de manière quasi-instantanée, des jeux de données précis et de grandes tailles sur à peu près tous les organes biomédicaux possibles. Toutefois, un tel volume de données échantillonnées peut compromettre tout traitement ultérieur de cette information en temps réel, le stockage ou la transmission de cette information, en raison des limitations matérielles actuelles. Par exemple, si on considère un échantillonnage uniforme de la surface d'un cube unité à une précision de 10^{-5} , le nuage de points résultant contient quelques 60 milliards de points (correspondant à environ 300 milliards de tétraèdres) ! De plus, dans le contexte de simulations numériques, un maillage de surface représente la discrétisation des frontières du domaine. Par conséquent, les algorithmes de reconstruction de surface sont utilisés pour passer de données volumétriques discrètes (ensembles de voxels ou nuages de points) à une approximation linéaire par morceaux qui interpole la géométrie de la surface sous-jacente. De fait, la triangulation de la surface reste la seule représentation de la géométrie du domaine, ayant ainsi remplacé la donnée échantillonnée d'origine. En fonction de la technologie utilisée, les systèmes de numérisation ou d'imagerie produisent en principe :

- des séries de coupes parallèles,
- des ensembles de voxels (*i.e.*, des images 3D),
- des nuages de points.

Comme la nature des données varie beaucoup d'une technique à l'autre, des méthodes de reconstruction spécifiques ont été développées pour chacun des types énumérés. Dans cette section, on présente brièvement les principes de base de chacune des trois classes d'algorithmes de reconstruction de surfaces.

2.1 Problème de reconstruction

Comme énoncé précédemment, l'immense majorité des algorithmes de reconstruction vise à extraire une triangulation (un maillage de surface) à partir des données brutes. Dans ce contexte, un schéma typique de construction de maillages éléments finis comprend trois étapes successives : traitement de l'image pour en extraire la région (le domaine) d'intérêt, construction d'une triangulation de surface et enfin, maillage du domaine. La première étape est généralement semi-automatique (bien qu'elle requiert une interaction minimale avec l'utilisateur) tandis que les deux autres étapes sont totalement automatiques.

Plusieurs algorithmes de segmentation d'image, de filtrage et d'amélioration de l'image peuvent être combinés afin d'extraire la région d'intérêt des données brutes. Cette thématique a été un thème de recherche très actif pendant de nombreuses années et a conduit au développement d'algorithmes performants (cf. [39] pour une synthèse des techniques de traitement d'images discrètes) et ne sera pas détaillée ici. En revanche, on va brièvement présenter les trois principales classes d'algorithmes de triangulation de surfaces à partir de données échantillonnées.

2.2 Des coupes à la triangulation de surface

La donnée est ici une séquence de p coupes (ou plans) régulièrement espacées, chacune contenant $n \times m$ pixels. Une valeur scalaire est attachée à chaque pixel indiquant un niveau de gris et représentant la densité du tissu (organe) en ce point.

Le principe de base de cette classe d'algorithmes est plutôt simple : à partir de contours bidimensionnels, des triangles de surface sont construits entre deux coupes adjacentes. La triangulation de surface désirée est alors obtenue en combinant les ensembles de triangles résultant du traitement de paires de coupes. En pratique, divers critères ont été proposés pour contrôler la triangulation de surface résultante : maximisation du volume, minimisation de la surface, minimisation des longueurs d'arêtes ou des angles, etc. [5]. Le problème principal de ce type de méthode est lié au fait que le nombre de contours fermés peut changer d'une coupe à l'autre, conduisant ainsi à un problème de "branchement". Celui-ci peut être résolu de diverses manières. Des auteurs ont suggéré des approches basées sur des hypothèses heuristiques favorisant par exemple les connexions verticales, d'autres se sont concentrés sur une technique plus globale pour générer directement une représentation polyédrique (au moyen d'un algorithme de reconstruction basé sur les propriétés de la triangulation de Delaunay).

La Figure 1 illustre une triangulation de surface obtenue par un algorithme basé sur la triangulation de Delaunay. Deux sections parallèles sont connectées au moyen de triangulations de Delaunay 2D. Chaque contour polygonal est une approximation linéaire par morceaux de la surface. Une fois la triangulation générée, un algorithme de coloriage peut être utilisé pour identifier les triangles externes des triangles internes en fonction de leur position relative par rapport aux contours [20].

2.3 Triangulation de nuages de points

Avec cette technique, il n'y a pas, en principe, besoin d'une étape de traitement d'image, puisque tous les points sont supposés appartenir à la surface. La donnée consiste en un ensemble (dense ou pas) de points aléatoires éventuellement complétés par des directions normales (Figure 2, à gauche). Reconstruire une triangulation de surface à partir d'un nuage de points fait désormais figure de problème classique dans diverses applications, par exemple en "reverse engineering", en traitement d'image, en infographie, etc. Les données peuvent provenir d'une large gamme de systèmes et techniques, incluant les lasers ou les surfaces implicites, par exemple. Ce sujet a reçu énormément d'attention ces dernières années. Les principaux problèmes sont liés à la nécessité de traiter des surfaces de topologie quelconque, des échantillons non uniformes et à celle de produire des maillages géométriques avec des contraintes fortes : approximation linéaire par morceaux précise, variétés "lisses", etc.

L'une des méthodes les plus robustes pour traiter ce problème est basée sur un algorithme en deux phases : une triangulation 3D de Delaunay (*i.e.*, composée de tétraèdres) est tout d'abord construite à partir du nuage de points, ensuite l'algorithme extrait une surface (lisse) polygonale en sélectionnant les triangles adéquats de la triangulation 3D, à partir de

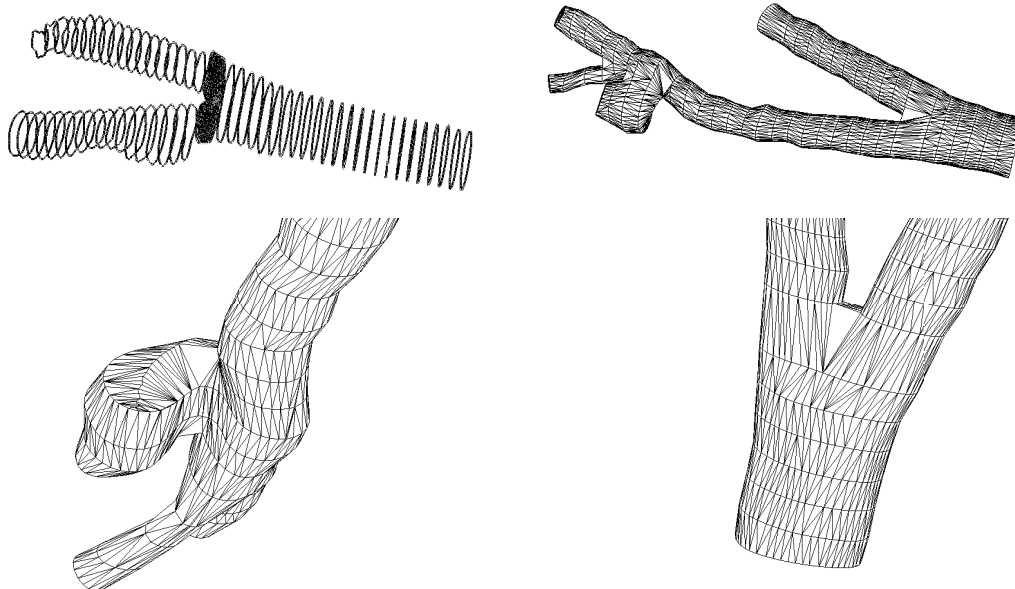


FIG. 1 – Reconstruction de surface basée sur un algorithme de Delaunay pour connecter des séries de coupes parallèles dans le cas d'un anévrisme. En bas : agrandissements montrant les éléments de surface au voisinage de singularités (maillage : E. Saltel, projet Gamma, INRIA-Rocquencourt).

considérations géométriques et topologiques. Boissonnat et Cazals [7] préconisent d'utiliser l'interpolation basée sur les *voisins naturels* pour définir la surface cherchée. Cette approche comprend la construction d'une triangulation de Delaunay, puis l'utilisation des segments du dual de Voronoï pour raffiner la triangulation initiale, le cas échéant, afin de satisfaire un critère d'échantillonnage. D'autres approches, plus heuristiques, ont également été proposées pour supprimer des triangles de la triangulation de Delaunay.

La Figure 2 (à droite) présente un résultat typique de ce type d'algorithme dans le cas d'un nuage de points relativement dense et uniforme.

2.4 Triangulation d'une iso-surface

Dans cette approche, la donnée consiste à utiliser une fonction de distance signée et à en calculer le zéro. En d'autres termes, la surface est vue comme une surface de niveau (*i.e.*, une iso-surface) définie sur l'espace entier. Avec les images 3D en niveaux de gris (comme celles fournies par les imageurs IRM), la fonction de densité peut être vue comme une fonction implicite discrète dont la valeur est connue uniquement aux points d'échantillonnage (les voxels). De telles méthodes ont été appliquées avec succès aux triangulations de surfaces par Lorensen et Cline [36], qui ont conçu l'algorithme bien connu du "Marching-Cubes", et ont été modifiées ou améliorées par de nombreux contributeurs.

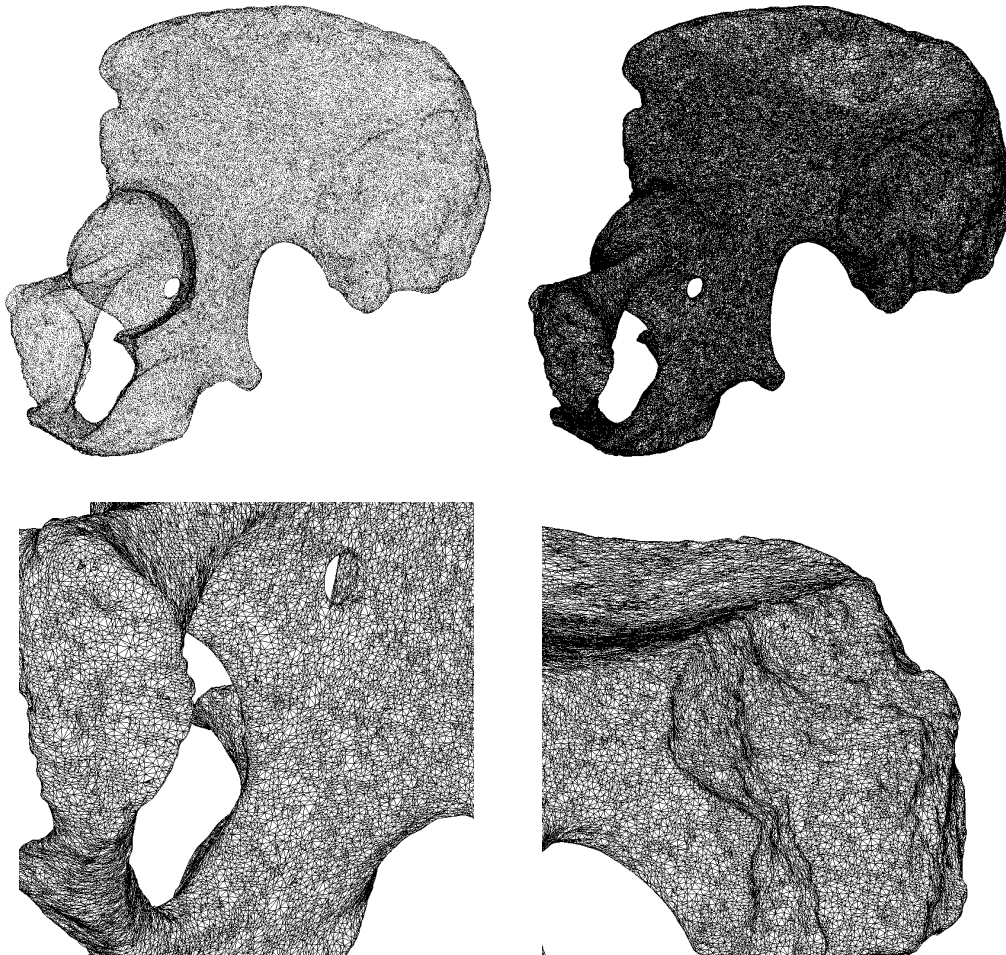


FIG. 2 – En haut : nuage de point initial et triangulation de surface reconstruite par une triangulation de Delaunay 3D. En bas : agrandissements montrant les éléments de la triangulation (maillage : P.L. George, projet Gamma, INRIA-Rocquencourt).

Le caractère essentiel de cet algorithme réside dans sa simplicité quasi-biblique. Étant donné un voxel défini par un ensemble de 8 pixels formant une cellule hexaédrique, la méthode consiste à analyser cette cellule de manière à déterminer si celle-ci est intersectée par la surface implicite. Ce test est basé simplement sur l'évaluation du signe de la fonction aux sommets de la cellule : un changement du signe aux extrémités d'une arête indique que la surface intersecte (au moins une fois) l'arête. La position du point d'intersection peut être déterminée au moyen de schémas d'interpolation. Cette étude conduit à identifier un ensemble de configurations possibles ($2^8 = 256$) qui peut être réduit à un ensemble de 16 motifs prédéfinis par le jeu de symétries et de rotations. Les quelques motifs donnant lieu

à des configurations ambiguës peuvent être éliminés en utilisant plus d'information (par exemple en utilisant des points d'échantillonnage supplémentaires dans un voxel).

La Figure 3 illustre une triangulation de surface générée par un algorithme de type "Marching-Cubes". Remarquer que cette surface prend un aspect "cabossé" à l'échelle du voxel en raison de l'alignement des faces du voxel avec le système d'axes usuel. Cet artéfact peut être éliminé au moyen des techniques de lissage décrites dans la section suivante.

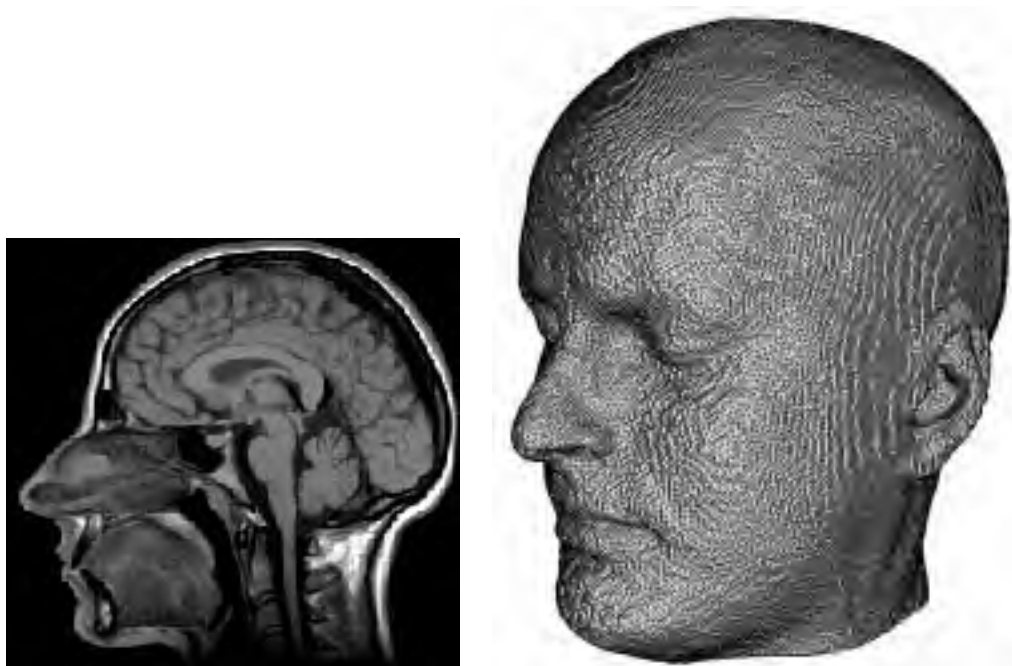


FIG. 3 – D'une image 3D à la triangulation : coupe d'une image MRI 3D (à gauche) et résultat de l'algorithme de reconstruction "Marching-Cubes" (à droite) (donnée : M. Seppa, Low Temp. Lab., Helsinki Univ. Tech., Finland).

La triangulation de surface reconstruite à l'aide de l'une des méthodes décrites ci-dessus, on se tourne à présent vers la génération d'un maillage de calcul à partir d'une telle triangulation. Ceci nécessite de d'abord générer un "maillage de référence", *i.e.*, un maillage représentant une approximation linéaire par morceaux de la surface très précise et comportant un nombre optimal (minimal) d'éléments auquel il sera possible de se référer en tant que modèle (géométrique) dans les traitements ultérieurs.

3 Construction d'un maillage géométrique

Une fois la triangulation de surface générée selon les principes décrits ci-dessus, la géométrie du domaine est pratiquement capturée. Toutefois, chacune des méthodes de reconstruction décrites souffre généralement d'au moins l'un des inconvénients suivants :

- i) les données sont bruitées (*i.e.*, les points ne sont pas exactement sur la surface),
- ii) le nombre de polygones (triangles) est inutilement trop important,
- iii) les éléments sont souvent de piètre qualité.

Par conséquent, une étape de post-traitement est requise pour construire un maillage géométrique à partir de la triangulation de surface. En particulier, une procédure de lissage sans rétrécissement de la surface est introduite pour éliminer les artefacts de l'algorithme de "Marching-Cubes". Puis, une étape d'optimisation est appliquée pour supprimer les sommets redondants et pour insérer les chaînons d'information manquants. Dans cette section, on montre que ces étapes font en fait partie intégrante d'un schéma global de maillage destiné à produire des maillages géométriques. Avant de discuter d'une méthode générale pour extraire un maillage géométrique, on définit précisément ce concept de maillage géométrique.

3.1 Définition d'un maillage géométrique

Soit un domaine fermé borné Ω de \mathbb{R}^3 décrit par sa frontière Σ . Un *maillage régulier* de Ω est un maillage dont tous les éléments sont réguliers (équilatéraux lorsqu'il s'agit de triangles). Comme l'existence d'un tel maillage n'est pas démontrée, on considère comme régulier le "meilleur" maillage qu'il est possible de construire. En pratique, deux types de maillages de surfaces peuvent se concevoir :

- les *maillages uniformes*, dans lesquels la taille des éléments est constante dans tout le domaine et
- les *maillages géométriques*, dans lesquels la taille des éléments est adaptée localement aux courbures de la surface.

Remarquer qu'avoir un maillage uniforme n'offre aucune garantie quant à la qualité de l'approximation de la surface, sauf à être infiniment fin. En revanche, un maillage géométrique est un maillage adapté à la géométrie de la surface, la taille des éléments étant étroitement liée aux courbures de la surface. Dans le contexte du maillage des surfaces, assurer une continuité d'ordre un est généralement considéré comme une condition suffisante [19].

Définition 3.1 *Un maillage de surface est dit géométrique à l'ordre 0 si chaque triangle est proche de la surface (propriété d'approximation P0).*

Un maillage de surface est dit géométrique à l'ordre 1 si le plan support de chaque triangle est proche du plan tangent en chaque point de Σ proche du triangle (propriété de rugosité P1).

En réalité, la propriété d'approximation P0 lie la mesure de l'écart G_0 entre les points du triangle et les points correspondants sur la portion de surface discrétisée par ce triangle.

D'un autre côté, la propriété de rugosité $P1$ est liée à la mesure de l'écart G_1 entre la normale au triangle et la normale en tout point de la portion de surface discrétisée par le triangle. Généralement, deux requis sont ajoutés à ces propriétés, imposant un nombre minimal de triangles dans la triangulation et relatifs au contrôle de la qualité en forme des éléments, ce dernier requis étant particulièrement important dans le contexte des simulations numériques.

L'analyse des courbures locales de la surface permet de minimiser l'écart entre les plans tangents de l'interpolation linéaire par morceaux et ceux de la vraie surface. Les deux écarts G_0 et G_1 peuvent être bornés par une valeur de tolérance donnée sous réserve que la taille $h(P)$ du triangle en chaque sommet P soit proportionnelle aux deux rayons de courbures principaux. Une métrique discrète géométrique $\mathcal{H}_{ref,g}$ peut être définie dans le plan tangent en chaque sommet P du maillage de référence géométrique $\mathcal{M}_{ref,g}$ de la façon suivante :

$$\mathcal{H}_{ref,g} = (h_1 \quad h_2) \begin{pmatrix} \frac{1}{(\alpha\rho_1(P))^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{(\eta(\alpha, \rho_1(P), \rho_2(P))\rho_2(P))^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = 1,$$

où α est un coefficient de proportionnalité dépendant de la tolérance ε donnée et η est une fonction de α , $\rho_1(P)$ et $\rho_2(P)$ permettant d'obtenir une déviation identique dans les deux directions de courbures principales.

3.2 Procédure de lissage

Comme on l'a indiqué, la plupart des triangulations de surfaces générées par un algorithme de reconstruction d'iso-surfaces sont souvent "facétisées". Il est donc nécessaire de lisser la surface avant de générer un maillage géométrique sinon la procédure de simplification décrite ci-après peut s'avérer inefficace à supprimer les artéfacts. La plupart des procédures de lissage souffrent de plusieurs maux. L'un des plus pénibles est lié à la *contraction* de la surface initiale qui survient après plusieurs étapes de lissage. Comme les techniques de lissage sont appliquées un grand nombre de fois, un triangle peut tout à fait dégénérer en un sommet. Par exemple, un filtre de Gauss continu consiste à convoluer une fonction vectorielle paramétrant la surface avec un noyau de Gauss. Cette technique peut s'étendre au cas des surfaces discrètes [41]. Dans ce cas, la complexité de l'algorithme est linéaire en nombre de sommets. La nouvelle position d'un sommet est calculée comme un barycentre pondéré des positions de ses voisins de premier ordre (*i.e.*, les sommets connectés au sommet par une arête) et la procédure est répétée un grand nombre de fois. Pour prévenir toute contraction, deux passes de filtrage gaussien sont appliquées. Après une première étape effectuée avec un facteur positif λ , une deuxième étape est appliquée sur tous les sommets, mais cette fois avec un facteur μ négatif tel que $0 < \lambda < -\mu$. Dans [41], cette procédure a été démontrée équivalente à un filtre passe-bas pour lequel la courbure de la surface joue le rôle de la fréquence. Il convient toutefois de faire attention à la préservation des lignes caractéristiques (arêtes vives, coins, etc.). La Figure 4 montre le résultat de la procédure de filtrage de Gauss sur un maillage de référence généré par un algorithme de type "Marching-Cubes".

3.3 Simplification géométrique de maillage

Comme indiqué précédemment, le maillage de référence initial $\mathcal{M}_{ref}(\Sigma)$ n'est, en général, pas adapté à une description précise de la géométrie, pour au moins deux raisons. En effet, il contient généralement (i) un nombre d'éléments prohibitif (redondant) ainsi que (ii) des artefacts géométriques (petits détails) qui doivent être éliminés. Pour résoudre ces problèmes, l'approche qu'on suggère dans ce rapport consiste à simplifier la triangulation de surface à l'aide de modifications locales du maillage. À cette fin, on introduit une bande de tolérance globale autour de la surface (à une distance de Hausdorff donnée) pour contrôler les opérations de simplification, de manière similaire à l'approche proposée par [12, 13, 9]. L'objectif est de supprimer les éléments redondants (*i.e.*, qui ne contribuent pas réellement à l'approximation géométrique de la surface) ainsi que les détails insignifiants, tout en préservant la géométrie de la surface sous-jacente.

3.3.1 Distance de Hausdorff discrète.

L'algorithme de simplification décrit ci-dessous est basé sur l'évaluation de la distance de Hausdorff entre la triangulation initiale \mathcal{M}_{ref} et le maillage géométrique de référence $\mathcal{M}_{ref,g}$. On rappelle que la distance d'un point X de \mathbb{R}^3 à un domaine fermé borné F est donnée par :

$$d(X, F) = \inf_{Y \in F} d(X, Y),$$

où $d(., .)$ représente la distance euclidienne usuelle. Soient F_1 et F_2 deux domaines fermés de \mathbb{R}^3 , si $\rho(F_1, F_2)$ mesure la quantité $\sup_{X \in F_1} d(X, F_2)$, alors la distance de Hausdorff $d_H(F_1, F_2)$ entre F_1 et F_2 est définie comme :

$$d_H(F_1, F_2) = \sup(\rho(F_1, F_2), \rho(F_2, F_1)).$$

Cette mesure continue est plutôt chère à calculer (car elle doit être calculée pour tous les points appartenant aux triangles), on propose donc une approximation discrète de cette mesure de Hausdorff, basée sur les idées suggérées par [9].

Pour garantir la propriété de proximité $P0$, une bande de tolérance globale autour de la surface (à une distance de Hausdorff de δ) est introduite des deux côtés du maillage de référence \mathcal{M}_{ref} . Alors, il est suffisant de tester que chaque triangle résultant de la procédure d'optimisation du maillage reste contenu dans cette bande. En outre, pour garantir la propriété de rugosité $P1$, une autre contrainte est ajoutée de manière à satisfaire les deux requis de proximité et de rugosité :

$$d_H(K, \mathcal{M}_{ref}) \leq \delta \quad \text{et} \quad \langle \nu_k(K), \nu(K) \rangle \geq \cos(\theta),$$

où $\nu_k(K)$ est la normale unitaire à la surface au sommet k du triangle K et $\nu(K)$ est la normale unitaire à K , (\langle , \rangle représentant le produit scalaire usuel de \mathbb{R}^3).

3.3.2 Procédure de simplification

D'un point de vue formel, la méthode proposée consiste à supprimer les sommets du maillage de référence de manière itérative. Pour cela, deux opérations de modification sont appliquées : la suppression d'une arête et la bascule d'arête, sous réserve que les deux requis précédents ne soient pas violés.

La bascule d'arête consiste à remplacer les deux triangles partageant une arête par la configuration alternative (les deux autres triangles construits sur le même ensemble de quatre points). Cette opération est appliquée si les deux triangles initiaux sont strictement coplanaires afin de ne pas changer le signe de la courbure de la surface.

L'opération de suppression d'une arête consiste à supprimer un sommet P du maillage, ce qui a pour effet de créer un trou, et de reconstruire le maillage de la *boule* de P (les voisins du premier ordre) en retriangulant cette *cavité*. Comme le calcul de la distance de Hausdorff est coûteux et délicat, il est possible de borner cette mesure en gardant trace des déformations de manière hiérarchique. À chaque triangle K^i du maillage courant \mathcal{M}^i on peut associer une majoration de la distance de Hausdorff par rapport à \mathcal{M}_{ref} :

$$h(K^{i+1}(Q)) = d_H(K^{i+1}(Q), \mathcal{B}^i(P)) + \max_i h(K^i(P)).$$

Ainsi, le triangle $K_i^{i+1}(Q)$ ne dégrade pas l'approximation linéaire par morceaux de la géométrie de la surface si il est tel que $h(K_i^{i+1}(Q)) \leq \delta$ (lorsque le sommet P est collapsé sur le sommet Q). Pour se conformer aux deux propriétés $P0$ and $P1$, l'opération de suppression peut être appliquée si :

$$d_H(K^{i+1}, \mathcal{M}_{ref}) \leq \delta \quad \text{et} \quad \langle \nu_k(K^{i+1}(Q)), \nu(K_i^{i+1}(Q)) \rangle \geq \cos(\theta),$$

où θ est une valeur d'angle limite prescrite (qui définit un cône de tolérance en chaque sommet).

Comme aucune attention particulière n'a été placée sur la qualité des triangles, des éléments dégénérés (plats) peuvent être créés. Pour éviter ce désagrément, un contrôle de la qualité des triangles est introduit en bornant la dégradation de la qualité par une tolérance donnée β . La qualité du maillage sera ainsi préservée, du maillage \mathcal{M}^i au maillage \mathcal{M}^{i+1} si, pour tout nouveau triangle K^{i+1} :

$$q(K^{i+1}(Q)) \geq \beta \min_i q(k^i(P)),$$

$q(\cdot)$ représentant une mesure monotone de la qualité d'un triangle [20].

Enfin, afin d'optimiser la qualité en forme des éléments du maillage géométrique résultant, une procédure de lissage est appliquée sur tous les sommets. Les vecteurs déplacements associés aux sommets sont usuellement calculés au moyen d'un Laplacien discret. Un point est bougé pas à pas vers une position optimale (*i.e.*, une position correspondant à une configuration de triangles de formes optimales). La Figure 5 montre un exemple de maillage de référence géométrique obtenu par une telle procédure de simplification.

4 Génération d'un maillage de calcul

Le maillage de référence géométrique $\mathcal{M}_{ref,g}$ construit selon le schéma décrit à la section précédente n'est, en général, pas directement utilisable à des fins de calcul. En effet, ce maillage représente une approximation linéaire par morceaux précise de la géométrie de la surface (selon une valeur de tolérance donnée). Toutefois, les simulations numériques requièrent un contrôle supplémentaire de la densité de maille (la concentration de sommets dans chaque région du maillage) et de la gradation du maillage (la variation de taille entre éléments voisins). Comme indiqué précédemment, la densité de maille d'un maillage géométrique est liée seulement aux courbures locales de la surface. Mais, en fonction de l'échantillonnage des données, la densité locale du maillage géométrique peut s'avérer insuffisante, en d'autres termes, le maillage manque localement de sommets pour capturer précisément la géométrie de la surface. Il est possible de mesurer l'adéquation du maillage avec la métrique géométrique, en faisant appel à la notion de longueur moyenne d'une arête. Comme la métrique géométrique prescrit les tailles d'éléments, l'objectif est de générer un maillage dans lequel chaque arête a une longueur moyenne proche de la taille voulue. Un tel maillage est appelé un *maillage unité*. On va montrer dans cette section que le maillage de calcul souhaité est en fait un maillage unité.

4.1 Sur les métriques

La métrique \mathcal{H} est définie en un point P sous la forme d'une matrice 3×3 symétrique définie positive. Pour une telle métrique, le produit scalaire de deux vecteurs de l'espace euclidien \mathbb{R}^3 peut être défini comme :

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle_{\mathcal{H}} = {}^t \vec{u} \mathcal{H} \vec{v},$$

ainsi que la norme euclidienne :

$$\|\vec{u}\|_{\mathcal{H}} = \sqrt{\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle_{\mathcal{H}}} = \sqrt{{}^t \vec{u} \mathcal{H} \vec{u}}.$$

Ainsi, la distance entre deux points A et B s'écrit :

$$d_{\mathcal{H}}(A, B) = l_{\mathcal{H}}(\overrightarrow{AB}) = \|\overrightarrow{AB}\|_{\mathcal{H}}.$$

En remarquant que le tenseur métrique \mathcal{H} varie généralement d'un point à l'autre, ceci conduit à introduire la notion de *longueur moyenne* d'une arête du maillage comme :

$$l_{\mathcal{H}}(\overrightarrow{AB}) = \int_0^1 \sqrt{{}^t \overrightarrow{AB} \mathcal{H}(A + t\overrightarrow{AB}) \overrightarrow{AB}} dt.$$

Cette notion de longueur moyenne par rapport à un tenseur métrique est étroitement liée à la notion de longueur d'un arc paramétré lorsqu'une structure riemannienne est induite sur le domaine par la métrique \mathcal{H} . En pratique, on peut définir un tenseur de métrique discret \mathcal{H}

en chaque sommet du maillage de telle sorte que la taille désirée de tout vecteur dans toutes les directions autour du sommet soit égale à un : $\|\vec{u}\|_{\mathcal{H}} = 1$. D'un point de vue géométrique, cette relation signifie que le lieu géométrique des points P_i équidistants (à la distance 1) du point P décrit un ellipsoïde dans \mathbb{R}^3 . Comme construire un tel maillage unité par rapport à une métrique donnée n'est pas toujours possible, on considère qu'un maillage est conforme à une spécification métrique \mathcal{H} si, pour toute arête AB , on a :

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \leq \kappa(AB) \leq \sqrt{2}.$$

La variation de taille dans le maillage peut être définie comme le rapport entre les longueurs d'arêtes pour tout couple d'arêtes adjacentes [8]. Le long d'une arête AB , la variation de taille s'écrit comme :

$$c(AB) = \max \left(\frac{h(A)}{h(B)}, \frac{h(B)}{h(A)} \right)^{l_{\mathcal{H}}(PQ)^{-1}},$$

où $h(A)$ représente la taille désirée en A et h est une fonction strictement monotone telle que $h(0) = h(A)$ et $h(1) = h(B)$. En général, pour obtenir des triangles de bonne qualité et pour contrôler la densité du maillage, la variation de taille doit être bornée par une valeur β sur toutes les arêtes. Le problème revient alors à trouver le coefficient idoine η permettant de réduire la taille la plus grande sur AB de manière à obtenir $c(AB) = \beta$. La solution consiste à poser :

$$\eta < \left(\frac{\beta}{c(AB)} \right)^{l_{\mathcal{H}}(AB)}.$$

Avec cette procédure, la métrique géométrique $\mathcal{H}_{ref,g}$ peut être modifiée pour tenir compte de la gradation spécifiée.

Il est souvent souhaitable de trouver une métrique interpolée le long d'un segment AB , connaissant seulement les métriques \mathcal{H}_1 et \mathcal{H}_2 aux deux extrémités du segment. Pour cela, on peut utiliser un schéma d'interpolation (linéaire), en considérant la paramétrisation $\gamma(t) = A + t\overline{AB}$ du segment AB :

$$\mathcal{H}(t) = \left((1-t)\mathcal{H}_1^{-\frac{1}{2}} + t\mathcal{H}_2^{-\frac{1}{2}} \right)^{-2}, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

qui correspond à une variation linéaire des tailles sur le segment AB [1]. Ce schéma est utile, par exemple, lorsqu'une arête est découpée en deux sous-segments par insertion d'un sommet, pour connaître la métrique en ce nouveau sommet.

4.2 Définition du support géométrique

Comme on l'a déjà indiqué, le maillage de référence géométrique $\mathcal{M}_{ref,g}$ est destiné à demeurer la seule représentation accessible de la géométrie. Pour construire un maillage de calcul \mathcal{M} , adapté à la métrique $\mathcal{H}_{ref,g}$, de nouveaux sommets doivent être créés et insérés dans le maillage géométrique, de manière à respecter les prescriptions de tailles. Étant donné un point P régulier (non singulier), le but du support géométrique est de trouver la position du point P_Σ de la surface le plus proche de P ainsi que la normale unitaire à la surface en ce point [16].

Dans l'approche proposée, la construction du support géométrique nécessite de définir une surface linéaire par morceaux, au minimum de continuité G^1 , sur chaque triangle du maillage $\mathcal{M}_{ref,g}$. Cette approche s'inspire en partie de la méthode suggérée par Walton et Meek [43], qui consiste à définir un réseau de courbes frontières aux carreaux, ainsi que les plans tangents transversaux à ces courbes en utilisant uniquement les normales à la surface aux sommets des triangles. Chaque carreau est alors défini, à partir de sa frontière, indépendamment des triangles adjacents, en garantissant toutefois la continuité des plans tangents en utilisant les polynômes de Gregory's [24]. Une caractéristique intéressante de cette technique est qu'il est possible de définir le réseau de courbes à partir de la seule donnée des normales aux sommets, *i.e.*, avec un minimum d'information fiable. Chaque courbe frontière est représentée par une cubique, les normales principales aux extrémités correspondant aux normales à la surface. Les plans tangents transversaux aux courbes frontières sont générés par les vecteurs tangents aux points de la courbe et en utilisant un schéma d'interpolation quadrique des binormales aux extrémités. Ainsi, la seule spécification des normales aux extrémités d'une arête est suffisante pour définir une courbe frontière ainsi que le plan tangent transversal à cette courbe. Enfin, à partir des plans tangents transversaux de chaque triangle, un carreau de Gregory est construit par une méthode classique. Cette technique a été étendue au cas des discontinuités (arêtes vives, coins, etc.) présentes dans les modèles réalistes.

4.3 Optimisation du maillage de surface

Pour générer le maillage de calcul \mathcal{M} , le maillage de référence géométrique $\mathcal{M}_{ref,g}$ est optimisé itérativement au moyen d'opérateurs de modifications de maillages locales. En interpolant la carte de métriques discrète $\mathcal{H}_{ref,g}$ définie aux sommets de $\mathcal{M}_{ref,g}$, une carte de métriques continue $\mathcal{H}_{ref,g}^c$ peut être définie, ce qui revient à définir une structure riemannienne sur $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Le problème revient alors à construire un maillage unité \mathcal{M} vis à vis de $\mathcal{H}_{ref,g}^c$. Comme indiqué, le maillage \mathcal{M} est un maillage unité si, pour toute arête AB , la longueur $l_{\mathcal{H}_{ref,g}^c}(AB)$ calculée dans la métrique, est égale à un. Pour des raisons pratiques, un maillage \mathcal{M} tel que :

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \leq l_{\mathcal{H}_{ref,g}^c}(AB) \leq \sqrt{2}, \quad \forall AB \in \mathcal{M},$$

peut être considéré comme un maillage unité.

Pour construire le maillage de calcul unité \mathcal{M} par rapport à $\mathcal{H}_{ref,g}$, les arêtes du maillage de référence géométrique sont analysées : les arêtes ayant une longueur moyenne supérieure à un sont subdivisées en sous-segments de longueur unité, tandis que les petites arêtes (de longueur moyenne inférieure à un) sont collapsées par fusion de leurs extrémités. De manière similaire à la construction d'un maillage géométrique, les procédures de modifications locales du maillage sont gouvernées par la qualité en forme et en taille des éléments. Ceci nécessite de mesurer la qualité des triangles dans la métrique $\mathcal{H}_{ref,g}^c$. Dans un espace riemannien, la qualité $q(K)$ d'un triangle K peut être définie (d'après [17]) comme :

$$q_{\mathcal{H}_{ref,g}}(K) = \min_{1 \leq j \leq 3} Q_{\mathcal{H}}^j(K),$$

où $q_{\mathcal{H}}^j(K)$ est la qualité en forme de K dans l'espace euclidien défini par la métrique $\mathcal{H}_{ref,g}$ associée au sommet j de K . Pour mesurer la qualité $q^j(K)$, il suffit simplement de transformer l'espace euclidien associé à la métrique $\mathcal{H}_{ref,g}$ spécifié au sommet j en l'espace euclidien usuel, et de considérer la qualité du triangle transformé résultant $K^j(K)$ of K : $q_{\mathcal{H}_{ref,g}}^j(K) = q_{\mathcal{H}_{ref,g}}(K^j)$. Ainsi, il vient :

$$q_{\mathcal{H}_{ref,g}}^j(K) = 4\sqrt{3} \frac{\sqrt{Det(\mathcal{H}_{ref,g}^j)} S_K}{\sum_{a_j \in K} l_{\mathcal{H}_{ref,g}^j}^2(a_j)},$$

où $l_{\mathcal{H}_{ref,g}^j}(a_j)$ est la longueur euclidienne de l'arête a_j dans la métrique $\mathcal{H}_{ref,g}^j$ et $Det(\cdot)$ représente le déterminant associée à la matrice de $\mathcal{H}_{ref,g}^j$.

À l'issue de l'étape d'optimisation du maillage, une procédure de lissage (bougé de point) est appliquée sur tous les sommets. Dans ce cas, la position optimale d'un sommet P est calculée à partir des longueurs moyennes en utilisant un Laplacien discret.

4.4 Génération du maillage volumique

À ce stade de l'exposé, on a construit un maillage unité de la surface par rapport à la carte de métriques discrète $\mathcal{H}_{ref,g}$, à partir d'une triangulation de surface initiale \mathcal{M}_{ref} . La construction d'un maillage de calcul volumique est basée sur l'approche classique [22] : un maillage vide en tétraèdres est d'abord construit (sans point interne) en utilisant le *noyau de Delaunay*, ce maillage est ensuite itérativement enrichi par ajout de points internes, de manière à saturer le domaine. Cette seconde étape est répétée jusqu'à ce que toutes les arêtes aient une longueur moyenne proche de un dans $\mathcal{H}_{ref,g}^c$. À l'issue de la construction, une étape de lissage est appliquée sur les sommets du maillage pour en améliorer la qualité. À nouveau, ce schéma basé sur le calcul des longueurs moyennes des arêtes, s'applique dans le cas isotrope et dans le cas anisotrope. La Figure 10 montre un exemple de maillage volumique.

5 Adaptation de maillage

Après des décennies de recherche et développement, les simulations numériques basées sur des méthodes d'éléments ou de volumes finis ont atteint un degré de maturité important, ce qui permet de résoudre avec succès une large gamme de problèmes d'ingénierie. Avec ces techniques numériques, l'erreur d'approximation peut être reliée au nombre d'éléments, à la densité du maillage ainsi qu'à la position des nœuds [11]. Dans ce contexte, l'objectif de l'adaptation de maillage est de permettre un meilleur contrôle de l'erreur en créant des maillages plus adaptés au modèle physique (généralement basé sur des EDP) ainsi qu'à sa résolution numérique. Deux points sont, à cet égard, particulièrement importants : la conception d'estimateurs d'erreur précis qui soient capables de transcrire l'erreur d'approximation (ou d'interpolation) en cartes de métriques et le développement de techniques de génération de maillage gouvernées par de telles cartes. Dans cette section, on va brièvement introduire un estimateur d'erreur géométrique basée sur l'erreur d'interpolation et on va expliquer comment les techniques de génération de maillage décrites dans les sections précédentes peuvent être étendues dans le contexte de l'adaptation de maillage.

5.1 Un estimateur d'erreur géométrique

Soit $\mathcal{S}(\Omega)$ la solution exacte d'un problème d'EDP et soit $\mathcal{S}_i(\Omega)$ la solution éléments finis de ce problème. Le problème consiste à calculer l'écart $e_i(\Omega) = \mathcal{S}(\Omega) - \mathcal{S}_i(\Omega)$ entre $\mathcal{S}(\Omega)$ et $\mathcal{S}_i(\Omega)$ représentant l'erreur liée à la solution éléments finis calculée sur le maillage $\mathcal{M}_i(\Omega)$ et à en déduire (généralement en utilisant une majoration de cet écart) un nouveau maillage $\mathcal{M}_{i+1}(\Omega)$ tel que l'écart estimé entre $\mathcal{S}(\Omega)$ et la solution interpolée sur le maillage $\mathcal{M}_{i+1}(\Omega)$ soit bornée par une valeur de tolérance donnée. La solution éléments finis $\mathcal{S}_i(\Omega)$ n'est pas interpolante et, de plus, il n'est pas possible de garantir que la solution $\mathcal{S}_i(\Omega)$ coïncide avec la solution exacte $\mathcal{S}(\Omega)$ en au moins un point de chaque élément. Aussi, il semble difficile de quantifier l'écart $e_i(\Omega)$. Comme introduit dans [19, 1], on propose une approche indirecte pour mesurer cet écart.

Soit $\tilde{\mathcal{S}}_i(\Omega)$ l'interpolation de $\mathcal{S}(\Omega)$ sur le maillage $\mathcal{M}_i(\Omega)$ et soit $\tilde{e}_i(\Omega)$ l'écart $(\mathcal{S}(\Omega) - \tilde{\mathcal{S}}_i(\Omega))$ entre $\mathcal{S}(\Omega)$ et $\tilde{\mathcal{S}}_i(\Omega)$, $\tilde{e}_i(\Omega)$ représente l'erreur d'interpolation sur $\mathcal{S}(\Omega)$ par rapport à $\mathcal{M}_i(\Omega)$. Pour quantifier l'écart $e_i(\Omega)$, on suppose que la relation suivante est satisfaite :

$$\|e_i(\Omega)\| \leq C \|\tilde{e}_i(\Omega)\|$$

où $\|\cdot\|$ est une norme de \mathbb{R}^3 et C est une constante indépendante de $\mathcal{M}_i(\Omega)$. En d'autres termes, on suppose que l'erreur d'approximation par éléments finis est bornée par l'erreur d'interpolation. Ceci permet de considérer le problème suivant : étant donné un maillage $\mathcal{M}_i(\Omega)$ et l'interpolation $\tilde{\mathcal{S}}_i(\Omega)$ de $\mathcal{S}(\Omega)$, construire un maillage $\mathcal{M}_{i+1}(\Omega)$ sur lequel l'erreur d'interpolation est bornée par une valeur de tolérance donnée. Comme $\tilde{\mathcal{S}}_i(\Omega)$ peut être vue comme une représentation discrète de $\mathcal{S}(\Omega)$, le problème revient à caractériser les maillages sur lesquels l'erreur d'interpolation est bornée. On peut montrer que l'analyse

d'une "mesure" de l'erreur d'interpolation conduit à définir une carte de métriques anisotrope qui prescrit les tailles et de les directions des éléments [4]. Pour mesurer l'erreur d'interpolation, on considère la norme discrète L_∞ de l'erreur définie sur un triangle K par :

$$\|\tilde{e}_i(K)\|_{\infty,K} = \max_{x \in K} |\tilde{e}_i(x)|,$$

où x parcourt les points de K . Dans [19], on montre que cet erreur est liée aux valeurs absolues du hessien de la solution $\mathcal{S}_i(\Omega)$ aux sommets du maillage et peut encore s'écrire :

$$\|\mathcal{S}_i - \tilde{\mathcal{S}}_i\|_{\infty,K} \leq \frac{9}{32} \max_{x \in K} \max_{\vec{v} \subset K} |\langle \vec{v}, H_{\mathcal{S}_i}(x) \vec{v} \rangle|.$$

La matrice hessienne étant symétrique, elle peut encore se décomposer de la façon suivante : $H = \mathcal{R}\Lambda\mathcal{R}^{-1}$, où \mathcal{R} (resp. Λ) est la matrice des vecteurs propres (resp. valeurs propres) de la matrice hessienne. Pour obtenir une matrice symétrique définie positive (pour définir un tenseur métrique), on pose :

$$|H| = \mathcal{R}|\Lambda|\mathcal{R}^{-1} \quad \text{avec} \quad \Lambda = \begin{pmatrix} |\lambda_1| & 0 & 0 \\ 0 & |\lambda_2| & 0 \\ 0 & 0 & |\lambda_3| \end{pmatrix}.$$

On peut alors considérer la majoration :

$$\|\mathcal{S}_i - \tilde{\mathcal{S}}_i\|_{\infty,K} \leq c \max_{x \in K} \max_{\vec{v} \subset K} \langle \vec{v}, |H_{\mathcal{S}_i}(x)| \vec{v} \rangle.$$

Dans les simulations numériques, on souhaite équi-répartir l'erreur d'interpolation dans toutes les directions sur les éléments du maillage. Soit ε l'erreur maximale tolérée, on doit donc avoir :

$$\max_{x \in K} \max_{\vec{v} \subset K} \langle \vec{v}, |H_{\mathcal{S}_i}(x)| \vec{v} \rangle \leq \frac{\varepsilon}{c}, \quad \text{ou} \quad \max_{x \in K} \max_{\vec{v} \subset K} \langle \vec{v}, \frac{c}{\varepsilon} |H_{\mathcal{S}_i}(x)| \vec{v} \rangle \leq 1.$$

Pour des raisons pratiques, la taille minimale h_{min} (resp. maximale h_{max}) doit être bornée, aussi on définit le tenseur de métrique suivant :

$$\mathcal{H} = \mathcal{R}\tilde{\Lambda}\mathcal{R}^{-1} \quad \text{avec} \quad \tilde{\Lambda} = \begin{pmatrix} \tilde{\lambda}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{\lambda}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{\lambda}_3 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\lambda}_i = \min \left(\max \left(\frac{c|\lambda_i|}{\varepsilon}, \frac{1}{h_{max}^2} \right), \frac{1}{h_{min}^2} \right).$$

Remarquer que ce tenseur métrique correspond à une métrique anisotrope, les directions principales sont données par les vecteurs propres et les tailles correspondantes par les valeurs propres. En fait, ce tenseur prescrit une longueur unité dans toutes les directions autour des sommets du maillage. De plus, cet estimateur d'erreur peut être légitimement appelé estimateur d'erreur *géométrique*. En effet, la solution peut être vue comme une (hyper)surface et le maillage unité désiré est alors un maillage géométrique de celle-ci (la taille des éléments étant liée aux dérivées de second ordre de la surface, les courbures principales).

5.2 Schéma général

À chaque itération, le schéma d'adaptation consiste principalement à créer le maillage $\mathcal{M}_{i+1}(\Omega)$ à partir du maillage $\mathcal{M}_i(\Omega)$ et une solution physique $\mathcal{S}_i(\Omega)$ associée. En utilisant l'estimateur de l'erreur d'interpolation introduit ci-dessus, une carte de métrique discrète $U\mathcal{H}_i(\Omega)$ est définie sur les sommets du maillage, prescrivant les tailles et directions d'éléments souhaitées dans un maillage optimal pour la solution $\mathcal{S}_i(\Omega)$. Dans le présent contexte, l'approche retenue est basée sur :

- la construction du maillage de surface unité $\mathcal{M}_{i+1}(\Gamma)$ (par rapport à $\mathcal{H}_i(\Gamma)$) en utilisant une procédure d'optimisation de maillage,
- la génération du maillage volumique unité $\mathcal{M}_{i+1}(\Omega)$ en utilisant une approche de type Delaunay.

Le couple (maillage, métrique) forme l'espace de contrôle qui est utilisé pour contrôler la génération de maillages adaptés. Conceptuellement, ce schéma n'est pas très différent du schéma utilisé pour créer un maillage de calcul. La différence principale tient à la définition de la métrique : la métrique \mathcal{H}_i est la combinaison (l'intersection d'un point de vue mathématique) de la métrique géométrique introduite à la Section 3.1 et de la métrique de calcul fournie par l'estimateur d'erreur. La procédure d'adaptation termine lorsqu'une solution stable est obtenue pour le couple (maillage, solution).

6 Exemples d'applications

Dans cette section, on présente plusieurs exemples de maillages géométriques et de maillages de calcul générés par l'approche décrite dans les sections précédentes. On décrit ici trois séries d'exemples : la première série est relative à la génération de maillages géométriques, la seconde série à des maillages de calcul et la troisième série concerne l'adaptation de maillages.

Tous les maillages de surfaces ont été générés en utilisant Yams, un logiciel de remaillage de surfaces discrètes développé à l'INRIA-Rocquencourt par l'auteur [21]. Tous les maillages de volume ont été créés avec le logiciel GHS3D, un mailleur tétraédrique de type Delaunay développé à l'INRIA-Rocquencourt [23].

6.1 Maillages géométriques

En infographie, la visualisation rapide ou le traitement géométrique (CAO) dépend fortement de la génération de maillages géométriques. L'objectif du maillage géométrique est de créer une référence (une instantiation) de la géométrie du model, un maillage *optimal* qui sert au mieux le procédé de visualisation. Pour un nombre fixé de points np , un maillage géométrique optimal $\mathcal{M}_{ref,g}$ approche la géométrie (lisse) de la surface au mieux au moyen d'éléments anisotropes (étirés), *i.e.*, suivant les vecteurs et valeurs propres du tenseur de courbure de la surface [2]. Les maillages géométriques générés par une approche basée sur la distance de Hausdorff présentent de telles caractéristiques anisotropes, comme illustré sur les figures ci-dessous.

On présente plusieurs exemples de maillages géométriques correspondant à des simplifications de Hausdorff à des tolérances différentes. Pour chaque exemple, on reporte (Table 1) : le nombre de sommets np et les nombre d'éléments ne de la triangulation initiale, le nombre de sommets np_g et d'éléments ne_g des maillages géométriques, la valeur de tolérance δ (exprimée en pourcentage de la taille de la boîte englobante du domaine) utilisée pour contrôler la simplification de maillage, et le temps cpu en secondes nécessaire à l'obtention du maillage (incluant les E/S sur une station de travail HP PA-RISC 500Mhz).

Meshes	np	ne	np_g	ne_g	δ	t (sec.)
$trolloc_1$	22 677	45 357	8 606	17 215	0.1	2.9
$trolloc_2$	22 677	45 357	3 492	6 987	0.5	2.3
$head_1$	67 108	134 212	6 742	13 480	0.1	6.8
$head_2$	67 108	134 212	2 254	4 504	0.5	4.9
$hip25_1$	132 538	265 084	9 803	19 615	0.1	16.5
$hip25_2$	132 538	265 084	4 415	8 239	0.5	15.5

TAB. 1 – Statistiques relatives aux maillages de surface géométriques.

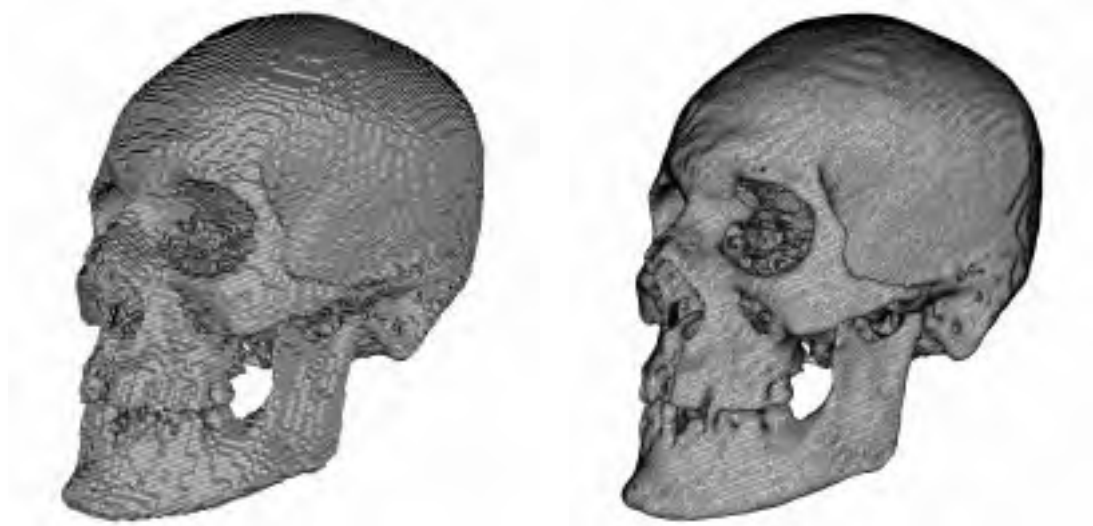


FIG. 4 – Illustration de la procédure de lissage gaussien (donnée : projet Epidaure, INRIA-Sophia).

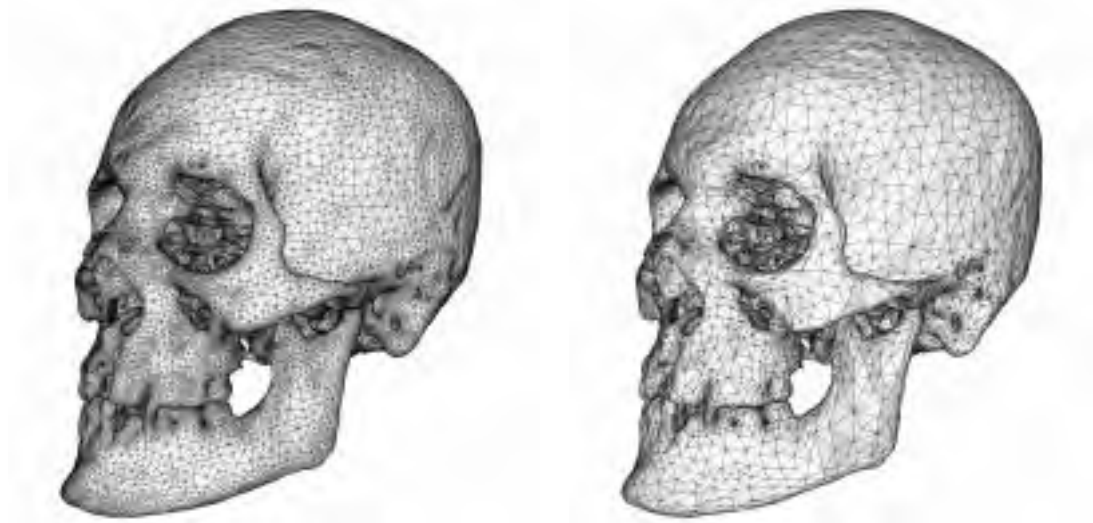


FIG. 5 – Deux exemples de maillages géométriques correspondant à des simplifications de Hausdorff pour des valeurs de tolérance, respectivement $\delta = 0.1\%$ et $\delta = 0.5\%$ de la taille de boîte englobante.

La Figure 4 illustre l'effet de la procédure de lissage pour éliminer les artéfacts de la triangulation au niveau des voxels. Dans ce cas, 150 itérations de l'algorithme de filtrage gaussien ont été appliquées, les facteurs utilisés étant respectivement : $\lambda = 0.33$ et $\mu = 0.34$. Le maillage "lisse" (à droite) contient exactement le même nombre de sommets que la triangulation initiale (à gauche). Sur la Figure 5 sont représentés deux maillages géométriques, $skull_1$ et $skull_2$, correspondant à deux niveaux de simplification (pour des distances de Hausdorff $\delta = 0.1\%$ et $\delta = 0.5\%$ de la taille de la boîte englobante). Dans cet exemple, la variation de taille a été tronquée en spécifiant une taille minimale (resp. maximale) aux sommets, afin de préserver la qualité générale du maillage géométrique et de borner le rapport d'anisotropie maximal.

Les Figures 6 et 7 illustrent deux séries de simplification de maillages basées sur la distance de Hausdorff sans contrôle explicite de la taille maximale d'élément (un contrôle de la qualité en forme a été appliqué pour éviter la création de triangles dégénérés). Les maillages géométriques résultants (pour différentes valeurs de tolérance) présentent des caractéristiques anisotropes correspondant aux propriétés intrinsèques de la surface sous-jacente.

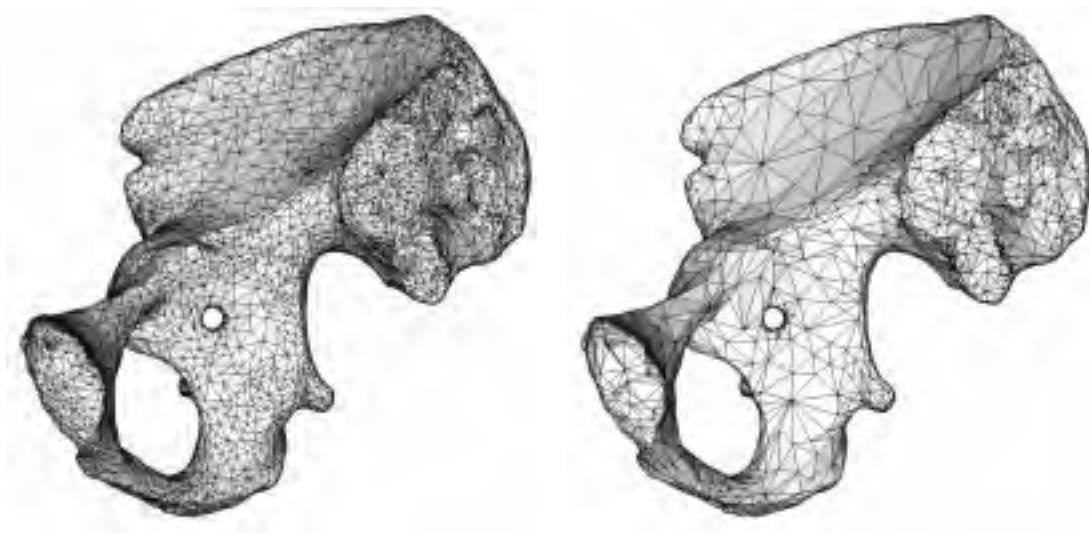


FIG. 6 – Maillages géométriques simplifiés pour des distances de Hausdorff respectives $\delta = 0.1\%$ (à gauche) et $\delta = 0.5\%$ (à droite) de la taille de la boîte englobante.

6.2 Maillages de calcul

Comme indiqué à la Section 4, un maillage de calcul est un maillage unité par rapport au tenseur de métrique géométrique (rectifié, pour tenir compte de la gradation). Ce tenseur de métrique riemannien prescrit en chaque sommet de la surface l'orientation et l'étirement des éléments désirés localement. Pour des raisons de calcul, des requis spécifiques peuvent

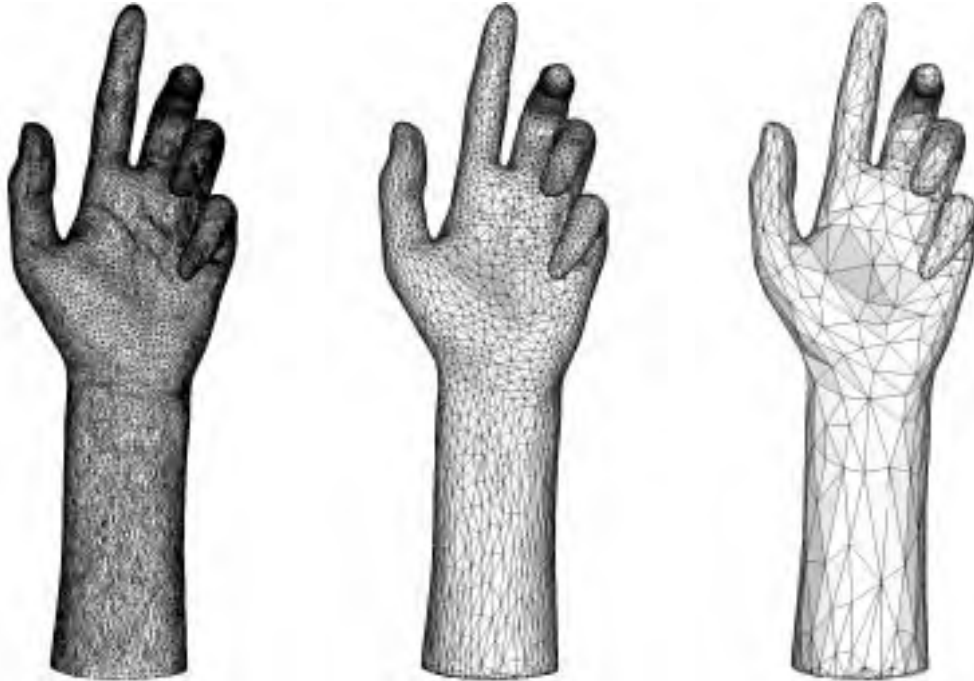


FIG. 7 – Triangulation de surface initiale (à gauche) et maillages géométriques simplifiés pour des distances de Hausdorff respectives $\delta = 0.1\%$ (au milieu) et $\delta = 1.5\%$ (à droite) de la taille de la boîte englobante.

également être spécifiés, liés notamment à la qualité en forme des éléments, à la densité et à la gradation du maillage.

La Table 2 reporte des statistiques sur la série de maillages de calcul, np, ne, np_c, ne_c représentent le nombre de sommets et d'éléments de la triangulation initiale et ceux des maillages de calcul, $Q_{\mathcal{H}}(\mathcal{M})$ correspond à la qualité moyenne (mesurée dans la métrique \mathcal{H}), $l(\mathcal{M})$ représente la longueur moyenne des arêtes (dans la métrique \mathcal{H}), β représente la valeur de gradation spécifiée par l'utilisateur et t est le temps cpu en secondes (incluant les E/S sur une station de travail HP PA-RISC 550Mhz). Comme l'objectif est de créer des maillages unités, on peut aisément remarquer que la longueur moyenne dans la métrique est assez éloignée de un (longueur optimale) dans certains cas. Ce résultat négatif peut toutefois s'expliquer par les contraintes géométriques qui peuvent s'avérer incompatibles avec la taille minimale désirée des triangles.

Les Figures 8 et 9 présentent divers exemples de maillages de calcul isotropes et anisotropes. La Figure 10 illustre un exemple de maillage de calcul volumique composé de tétraèdres. Les plans de coupe montrent clairement que la densité de mailles dans le volume est liée à la densité de surface. Un coefficient de dilution a été introduit de manière à aug-

menter légèrement la taille des éléments dans le volume (donc à diminuer le nombre total d'éléments en contrôlant la gradation).

Meshes	np	ne	np_c	ne_c	β	$Q_{\mathcal{H}}(\mathcal{M})$	$l_{\mathcal{M}}$	t (sec.)
$mandibula_c$	9 730	20 146	120 091	244 203	1.4	1.5	0.95	35.4
$trolloc_c$	22 677	45 357	31 132	62 265	1.4	1.3	0.9	20.1
$head_c$	67 108	134 212	35 812	71 620	1.2	0.95	1.4	27.0
$hip25_c$	132 538	265 084	56 947	113 903	1.3	1.4	0.9	48.0
$joint_c$	137 062	274 120	3 660	7 316	1.3	1.4	0.85	20.0

TAB. 2 – Statistiques sur les maillages de calcul.

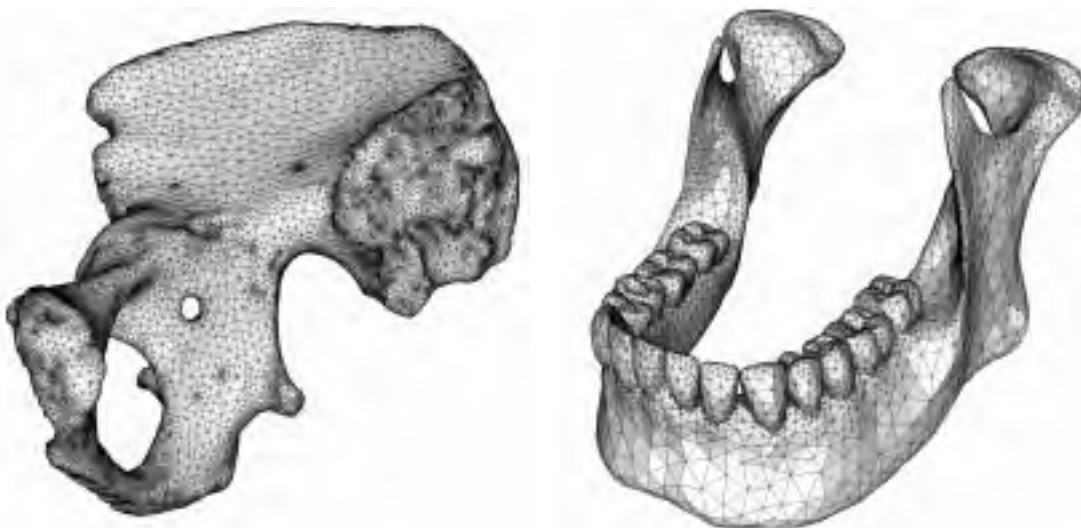


FIG. 8 – Deux exemples de maillages de calcul isotropes avec un contrôle de la qualité en forme et en taille ainsi que de la gradation.

Le dernier exemple concerne une simulation numérique en mécanique des fluides appliquée au domaine biomédical. Les angiographies numériques des vaisseaux malades produisent des reconstructions tri-dimensionnelles des vaisseaux sanguins pour des calculs par des méthodes d'éléments finis. L'objectif est ici d'étudier les malformations sacculaires ou les anévrismes qui peuvent conduire à des problèmes artériels majeurs et sont une cause principale de décès. La paroi des vaisseaux atteints est localement soumise à une déformation plastique and peut rétrécir et devenir plus vulnérable que la paroi d'un vaisseau sain, une rupture peut alors survenir. Dans cette simulation numérique, la paroi du vaisseau est supposée rigide et le sang est assimilé à un fluide incompressible, homogène et newtonien. La Figure 11 illustre le résultat du calcul (lignes de courant du champ de vitesse) sur un maillage de calcul.

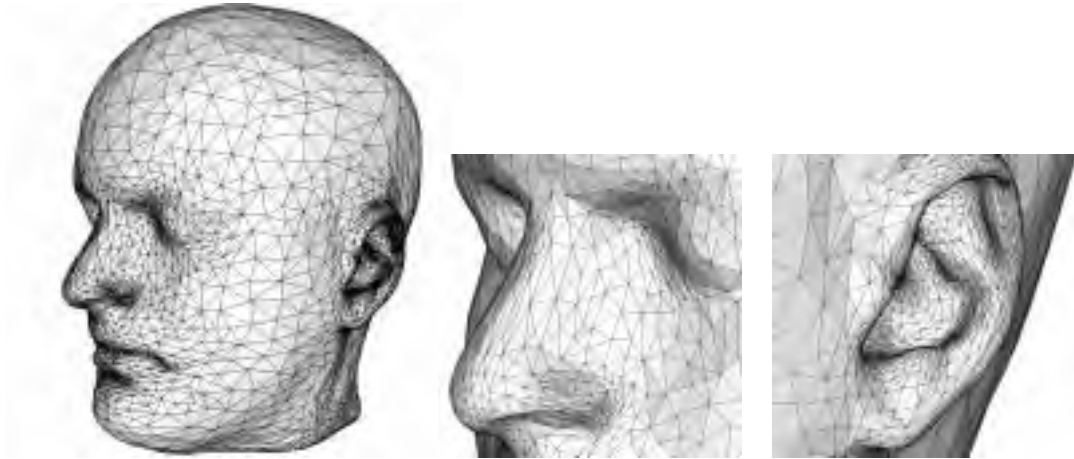


FIG. 9 – Exemple de maillage de calcul anisotrope et agrandissements sur les zones présentant des caractéristiques anisotropes.

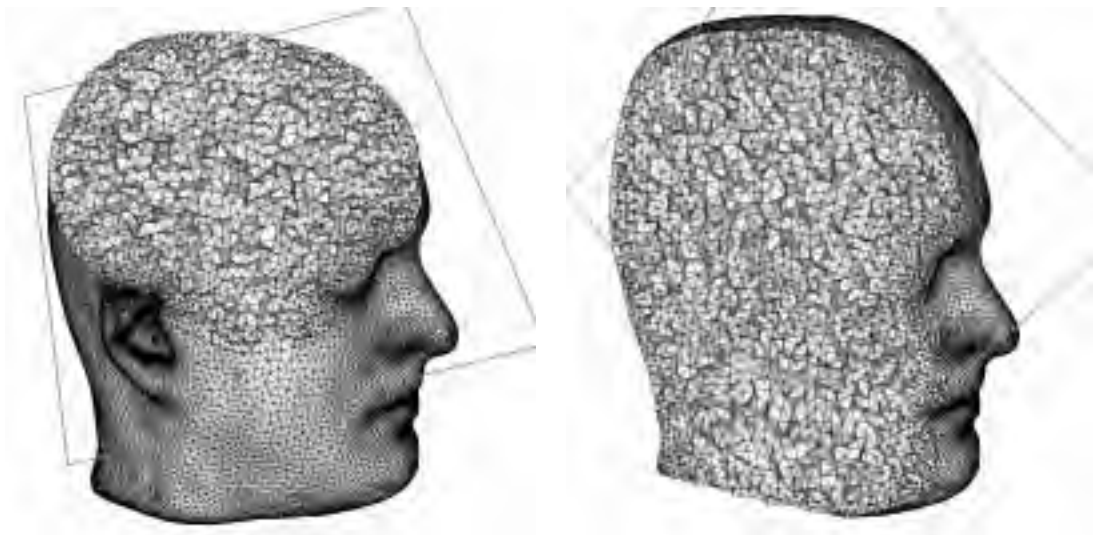


FIG. 10 – Deux plans de coupe sur un maillage de calcul volumique du modèle de tête. Le tenseur de métrique dans le volume est induit par la métrique géométrique de surface $\mathcal{H}_{ref,g}$ défini sur la frontière du domaine.

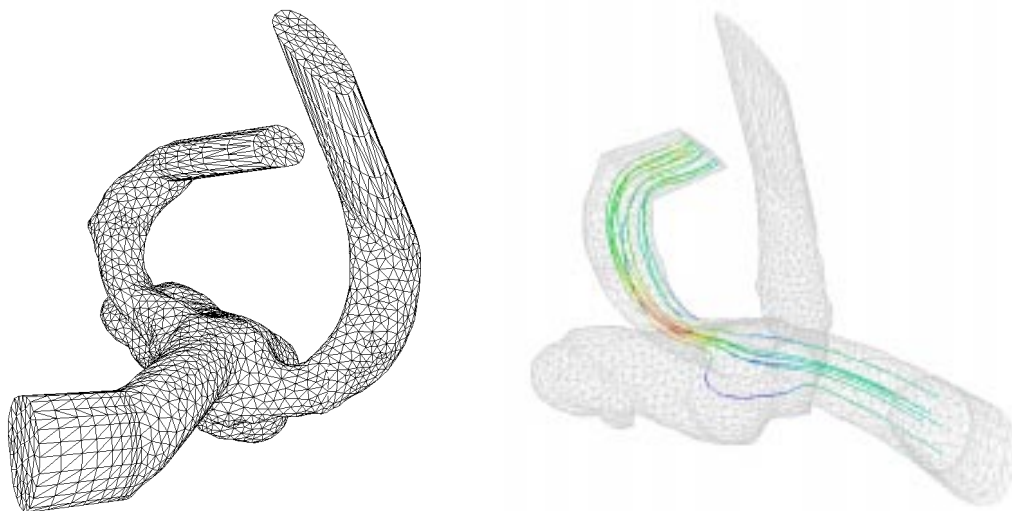


FIG. 11 – maillage de calcul d'un anévrisme et lignes de courant dans la branche terminale d'un vaisseau (donnée : M. Thiriet, INRIA).

6.3 Maillages adaptés

Dans cette section, on présente un exemple d'adaptation de maillage pour démontrer comment capturer un tenseur de métrique défini de manière analytique. Dans cet exemple, cinq itérations d'adaptation de maillages ont été nécessaires pour capturer le champ. La Figure 12 montre le maillage de surface initial et les maillages adaptés aux itérations 1, 3 et 5 (finale). La Table 3 reporte les statistiques sur les maillages adaptés. La gradation de maillage a été choisie à la valeur 1.4, la taille minimale (resp. maximale) a été fixée à 0.4 (resp. 10.). À chaque itération, le champ de métrique discret analytique est calculé en chaque sommet du maillage et un nouveau maillage unitaire est générée pour ce champ de métriques. La fonction analytique n'est pas utilisée de manière explicite lors de l'insertion d'un point. Pendant l'étape de remaillage, un schéma d'interpolation linéaire est utilisé pour déterminer la métrique en tout nouveau point.

Iteration	np	ne	$Q_{\mathcal{H}}(\mathcal{M})$	$l_{\mathcal{M}}$	t (sec.)
0	3 353	6 702	1.3	-	-
1	19 150	38 296	1.3	0.84	9.
3	32 534	65 064	1.2	0.87	11.
4	34 641	69 278	1.2	0.88	11.
5	37 758	71 512	1.2	0.89	10.

TAB. 3 – Statistiques sur les maillages adaptés.

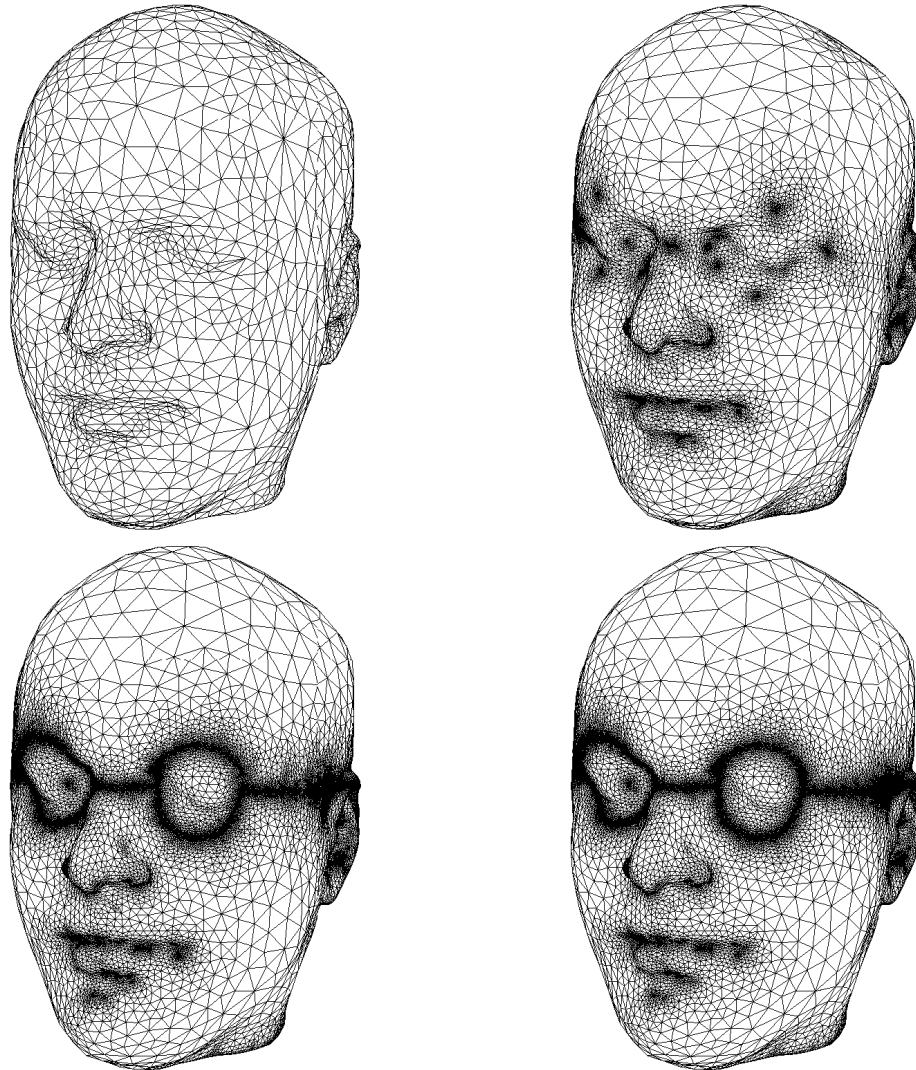


FIG. 12 – Exemple d'adaptation de maillage de surface. Maillages adaptés aux itérations 0 (initial), 1,3 et 5 (final).

7 Conclusions et perspectives

Dans ce rapport, on a présenté une approche globale pour générer des maillages géométriques ainsi que des maillages adaptés à partir de données discrètes (échantillonnées). En premier lieu, les données numérisées sont transformées en une triangulation de surface valide et conforme (au sens des éléments finis au moyen de divers algorithmes dépendant du type de ces données (séries de coupes parallèles, nuages de points, etc.). Ensuite, cette triangulation de surface est simplifiée pour extraire un maillage de référence géométrique qui représente une approximation linéaire par morceaux de la géométrie de la surface relativement précise. Enfin, un maillage unité de calcul est généré par rapport à la carte de métriques géométrique intrinsèque $\mathcal{H}_{ref,g}$ (i.e., basée sur les propriétés intrinsèques de la surface). En outre, on a montré que le même concept peut aisément s'étendre à l'adaptation de maillages dans les cas isotrope et anisotrope.

Comme sujet de recherche futur, on peut mentionner les problèmes liés à la définition de tenseurs de métriques anisotropes adaptés aux simulations numériques, d'après les idées évoquées dans [1].

Remerciements. *Les triangulations initiales des surfaces ou les données échantillonnées présentées dans ce rapport ont été gracieusement fournies par l'Université Saint Jacques de Compostelle, le projet Epidaure (INRIA-Sophia Antipolis), le laboratoire Low Temperature (Helsinki University), www.cyberware.com. L'auteur tient à remercier Paul Louis George et Frédéric Alauzet (INRIA) pour leur relecture et Éric Saltel pour son aide à réunir les exemples. Ce travail a été partiellement supporté financièrement par l'ARC Vitesv (INRIA).*

Références

- [1] F. ALAUZET ET P.J. FREY (2003), Estimateur d'erreur géométrique et métriques anisotropes pour l'adaptation de maillage. Partie I: aspects théoriques, *Rapport de Recherche INRIA*.
- [2] E.F. D'AZEVEDO (2000), Are bilinear quadrilaterals better than linear triangles?, *SIAM Journal on Scientific Computing*, **22**(1), 198-217.
- [3] F. BERNARDINI *et al.* (2002), Building a digital model of Michelangelo's Florentine Pietà, *IEEE Computer Graphics and Application*, 59-67.
- [4] M. BERZINS (1997), Solution-based Mesh Quality for Triangular and Tetrahedral Meshes, in *Proc. 6th International Meshing Roundtable, Sandia Lab.*, 427-436.
- [5] J.D. BOISSONNAT AND B. GEIGER (1992), Three dimensional reconstruction of complex shapes based on the Delaunay triangulation, *RR-INRIA 1967*, avril.
- [6] J.D. BOISSONNAT, R. CHAINE, P.J. FREY, G. MALANDAIN, S. SALMON, E. SALTEL, M. THIRIET (2002), *From medical images to computational meshes*, Proc. MS4CMS, Rocquencourt.
- [7] J-D. BOISSONNAT AND F. CAZALS (2002), Smooth Surface Reconstruction via Natural Neighbour Interpolation of Distance Functions, *Computational Geometry - Theory and Application*, **22**(1).
- [8] H. BOROUCHAKI, F. HECHT AND P.J. FREY (1998), Mesh gradation control, *Int. j. numer. methods eng.*, **43**(6), 1143-1165.
- [9] H. BOROUCHAKI (2000), Simplification de maillage basée sur la distance de Hausdorff, *C.R. Acad. Sci.*, t. 329, Série I, p. 641-646.
- [10] J.R. CEBRAL AND R. LÖHNER (1999), From medical images to CFD meshes, *Proc. Int meshing roundtable*, 321-331.
- [11] P.G. CIARLET (1978), *The Finite Element Method for Elliptic Problems*, North-Holland, Amsterdam.
- [12] J. COHEN, A. VARSHNEY, D. MANOCHA, G. TURK, H. WEBER, P. AGARWAL, F. BROOKS AND W. WRIGHT (1996), Simplification envelopes, *Comput. Graphics*, Proc. Siggraph'96, 119-128.
- [13] J. COHEN, M. OLANO AND D. MANOCHA (1998), Appearance-preserving simplification, *Comput. Graphics*, Proc. Siggraph'98, 115-122.
- [14] P.J. FREY, B. SARTER AND M. GAUTHERIE (1994), Fully automatic mesh generation for 3D domains based upon voxel sets, *Int. j. numer. meth. eng.*, **37**, 2735-2753.
- [15] P.J. FREY AND H. BOROUCHAKI (1996), Finite element meshes by means of voxels, in *Lecture Note in Computer Science*, DGCI, **1176**, 115-125.
- [16] P.J. FREY AND H. BOROUCHAKI (1998), Geometric Surface Mesh Optimization, *Computing and Visualization in Science*, **1**, 113-121.
- [17] P.J. FREY AND H. BOROUCHAKI (1999), Surface mesh quality evaluation, *Int. j. numer. methods eng.*, **45**, 101-118.
- [18] P.J. FREY AND H. BOROUCHAKI (2002), Simplification of terrains by minimization of the local deformation, *Proc. Curves and Surfaces fitting*, St Malo, Nashboro Press, TN.
- [19] P.J. FREY AND H. BOROUCHAKI (2003), Surface meshing using a geometric error estimate, *Int. j. numer. methods engng.*, to appear.
- [20] P.J. FREY AND P.L. GEORGE (2000), *Mesh generation: application to finite elements*, Hermès Science Publ., Paris, 816 p.

-
- [21] P.J. FREY (2001), Yams : A fully Automatic Adaptive Isotropic Surface Remeshing Procedure, *RT-0252*, INRIA Rocquencourt, nov.
- [22] P.L. GEORGE ET H. BOROUCAKI (1997), *Delaunay triangulation and meshing. Application to finite elements*, Hermès Science, Paris, 432 p.
- [23] P.L. GEORGE (2002), Premières expériences de maillage automatique par une méthode de Delaunay anisotrope en trois dimensions, *RT-0272*, INRIA-Rocquencourt, nov.
- [24] J.A. GREGORY (1974), Smooth interpolation without twist constraints, in R.E. Barnhill and R.F. Riesenfeld (Eds.), *Computer Aided Geometric Design*, Academic Press, 71-87.
- [25] A. GUÉZIEC (1996), Surface simplification inside a tolerance volume, *IBM Research Report*, RC-20440.
- [26] B. HAMANN (1993), Curvature approximation for triangulated surfaces, in *Geometric Modeling*, Computing Suppl. 8, Farin, Hagen, Noltmeier and Knodel eds., Springer, NY.
- [27] E. HARTMANN (1998), A marching method for the triangulation of surfaces, *The Visual Computer*, **14**, 95-108.
- [28] P.S. HECKBERT AND M. GARLAND (1997), Survey of polygonal surface simplification algorithms, *Comput. Graphics, Proc. Siggraph'97*.
- [29] H. HOPPE (2000), New quadric metric for simplifying meshes with appearance attributes, *Comput. Graphics, Proc. Siggraph'00*.
- [30] A.E. JOHNSON AND M. HEBERT (1998), Control of polygonal mesh resolution for 3D computer vision, *Graphical Models and Image Processing*, **60**, 261-285.
- [31] A.D. KALVIN AND R.H. TAYLOR (1996), Superfaces : polygonal mesh simplification with bounded error, *IEEE Computer Graphics and Applications*, 64-77.
- [32] L. KOBBELT, S. CAMPAGNA AND H.P. SEIDEL (1998), A general framework for mesh decimation, *Proc. Graphics Interface'98*, 43-50.
- [33] M. KRUS (1997), Maillages Polygonaux et Niveaux de Détails : étude bibliographique, *RR 97-10*, LIMSI/CNRS, Orsay.
- [34] M. LEVOY *et al.* (2000), The Digital Michelangelo Project: 3D scanning of large statues, *Proc. ACM Siggraph*.
- [35] R. LÖHNER (1996), Regridding Surface Triangulations, *Jour. of Comput. Phys.*, **126**, 1-10.
- [36] W.E. LORENSEN AND H.E. CLINE (1987), Marching cubes: a high resolution 3D surface construction algorithm, *Comput. Graphics*, **21**(4), 163-169.
- [37] D.P. LUEBKE (2001), A developer's survey of polygonal simplification algorithms, *IEEE Computer Graphics and Applications*, 24-35.
- [38] J. MONTAGNAT AND H. DELINGETTE (2001), A review of deformable surfaces: topology, geometry and deformation, *Image and Vision Computing*, **19**(14), 1023-1040.
- [39] N. NIKOLAIDIS AND I. PITAS (2000), *3D image processing algorithms*, J. Wiley & Sons.
- [40] W.J. SCHROEDER, J.A. ZARGE AND W.E. LORENSEN (1992), Decimation of triangle meshes, *Computer Graphics, Proc. Siggraph'92*, 65-70.
- [41] G. TAUBIN (1995), Curve and surface smoothing without shrinkage, *Proc. 5th Int. Conf. on Computer Vision*, 852-857.
- [42] G. TURK (1992), Re-tiling polygonal surfaces, *Computer Graphics, Proc. Siggraph'92*, 55-64.
- [43] D.J. WALTON AND D.S. MEEK (1996), A triangular G^1 patch from boundary curves, *Comput. Aided Design*, **28**(2), 113-123.



Unité de recherche INRIA Rocquencourt
Domaine de Voluceau - Rocquencourt - BP 105 - 78153 Le Chesnay Cedex (France)
Unité de recherche INRIA Lorraine : LORIA, Technopôle de Nancy-Brabois - Campus scientifique
615, rue du Jardin Botanique - BP 101 - 54602 Villers-lès-Nancy Cedex (France)
Unité de recherche INRIA Rennes : IRISA, Campus universitaire de Beaulieu - 35042 Rennes Cedex (France)
Unité de recherche INRIA Rhône-Alpes : 655, avenue de l'Europe - 38330 Montbonnot-St-Martin (France)
Unité de recherche INRIA Sophia Antipolis : 2004, route des Lucioles - BP 93 - 06902 Sophia Antipolis Cedex (France)

Éditeur
INRIA - Domaine de Voluceau - Rocquencourt, BP 105 - 78153 Le Chesnay Cedex (France)
<http://www.inria.fr>
ISSN 0249-6399