

Méthodes mathématiques et numériques
pour les plasmas

Notes de cours pour le M2-ANEDP

B. Després

12 juillet 2021

Chapitre 1

Introduction

A partir d'une température de 10^4 Kelvin, les électrons quittent facilement l'orbite du noyau des atomes. On obtient alors un mélange globalement neutre de particules chargées qui interagissent avec le champ électromagnétique ambiant. En suivant Langmuir (1927), cet état de la matière est appelé un plasma.

Les plasmas sont présents dans les accélérateurs de particules, dans les réacteurs pour la fusion (on pense aux Tokamaks et au projet ITER [6]), en astrophysique, dans les écrans à plasmas, dans les torches à plasmas pour le recyclage des déchets, entre autres. En résumé, les plasmas apparaissent dans des phénomènes physiques fondamentaux et dans des procédés industriels.

Pour donner un ordre de grandeur pour un Tokamak, on pourra retenir que $1 \text{ eV} \approx 10^4 \text{ K}$ et que le plasma central dans un Tokamak se doit d'atteindre 10 KeV pour que les réactions de fusion puissent démarrer de façon satisfaisante.

A partir de quelques problèmes et équations motivées par la physique des particules chargées, l'objectif de ce cours est de présenter des éléments suffisants de théorie mathématique pour être en mesure de construire et justifier des schémas pour la discrétisation numérique.

Quelques références sont proposées. On peut recommander pour sa clarté l'ouvrage de physique de physique des plasmas [4].

Table des matières

1	Introduction	3
2	Modèles	7
2.1	Equation de Vlasov	8
2.2	Prise de moments et fermeture fluide	11
2.2.1	Principe de la prise de moments	11
2.2.2	Application à l'équation de Vlasov	12
2.3	Fermeture fluide	15
2.4	Equation du champ	16
3	Equation de transport et de Vlasov	17
3.1	Equation du transport	17
3.2	Système de Vlasov-Poisson	20
3.3	Existence d'une solution	24
3.3.1	Unicité de la solution	27
4	Discrétisation numérique	29
4.1	Discrétisation du transport	29
4.2	Extention à l'équation de Vlasov-Poisson	32
4.2.1	Extension à l'ordre deux en temps	40
5	Système magnétohydrodynamique	41
5.1	Dérivation du modèle de la MHD idéale	41
5.2	Cas monodimensionnel	44
6	Équilibres magnétiques	47
6.1	Etude dans \mathbb{R}^3	47
6.2	Confinement	49
6.2.1	Cas cylindrique	49
6.2.2	Cas axisymétrique	54

Chapitre 2

Modèles

Soit une particule chargée non relativiste de masse m , de position $x(t)$ et de vitesse $v(t)$. Cette particule est placée dans un champ électromagnétique donné (E, B) . La loi de Newton s'écrit

$$mv'(t) = q(E + v \wedge B)$$

ou encore

$$mv'(t) = F \text{ avec } F = q(E + v \wedge B).$$

On a aussi $x'(t) = v$.

Pour un champ (E, B) donné, la résolution directe de ces équations fournit déjà des informations intéressantes. Par exemple considérons que (E, B) est constant, indépendant du temps et de l'espace. On doit résoudre le système d'équations différentielles ordinaires

$$\begin{cases} x'(t) = v, \\ v'(t) = \frac{q}{m}(E + v \wedge B). \end{cases}$$

On suppose que B est non nul orienté dans la direction horizontale $B = (b, 0, 0)$ avec $b > 0$. Posons

$$w(t) = v(t) - \frac{E \wedge B}{b^2}.$$

Alors en éliminant v

$$\begin{aligned} w'(t) &= \frac{q}{m} \left(E + w \wedge B + \frac{(E \wedge B) \wedge B}{b^2} \right) \\ &= \frac{q}{m} (E_{\parallel} + w \wedge B) \text{ avec } E_{\parallel} = E + \frac{(E \wedge B) \wedge B}{b^2}. \end{aligned}$$

Vérifions que E_{\parallel} est parallèle à B . Soit C tel que $C \cdot B = 0$. Alors on a

$$E_{\parallel} \cdot C = E \cdot C + \frac{1}{b^2} ((E \wedge B) \wedge B) \cdot C = E \cdot C - \frac{1}{b^2} (E \cdot C) (B \cdot B) = 0$$

ce qui montre que $E_{\parallel} = (\alpha, 0, 0)$ est bien un champ parallèle. On définit la fréquence cyclotron par

$$\omega_c = \frac{qb}{m}.$$

En séparant les composantes de w on obtient

$$\begin{cases} w'_1(t) = \frac{q}{m}\alpha, \\ w'_2(t) = \omega_c w_3(t), \\ w'_3(t) = -\omega_c w_2(t), \end{cases}$$

dont la solution est $w_1(t) = w_1(0) + \frac{q}{m}\alpha t$ et (à une phase près)

$$w_2(t) = \gamma \cos \omega_c t \text{ et } w_3(t) = -\gamma \sin \omega_c t.$$

D'où

$$\begin{cases} v_1(t) = v_1(0) + \frac{q}{m}\alpha t, \\ v_2(t) = \left. \frac{E \wedge B}{b^2} \right|_2 + \gamma \cos \omega_c t, \\ v_3(t) = \left. \frac{E \wedge B}{b^2} \right|_3 - \gamma \sin \omega_c t, \end{cases}$$

puis

$$\begin{cases} x_1(t) = x_1(0) + t v_1(0) + \frac{q}{m}\alpha \frac{t^2}{2}, \\ x_2(t) = x_2(0) + \left. \frac{E \wedge B}{b^2} \right|_2 t + \frac{\gamma}{\omega_c} \sin \omega_c t, \\ x_3(t) = x_3(0) + \left. \frac{E \wedge B}{b^2} \right|_3 t + \frac{\gamma}{\omega_c} \cos \omega_c t. \end{cases}$$

Ceci est l'équation des trajectoires d'une particule chargée dans un champ électromagnétique constant.

- Le terme d'accélération parallèle est $\frac{q}{m}\alpha = \frac{q}{m}E_{\parallel}$. On observe que l'accélération dépend de la charge q . En particulier des particules de charges opposées sont accélérées dans des directions opposées, ce qui tend à les écarter les unes des autres même avec des vitesses initiales $v_1(0)$ identiques.
- La vitesse de dérive orthogonale (de drift) est $\frac{E \wedge B}{b^2}$. Cette vitesse orthogonale ne dépend pas de la charge.
- Le terme de rotation en $\omega_c = \frac{qb}{m}$ dépend de la charge : cependant on ne considère pas que cela amène véritablement à une séparation des particules de charges différentes ; en effet au terme d'une rotation la position est identique à sa valeur initiale.
- Le rayon de giration $\frac{\gamma}{\omega_c}$ est arbitraire car γ est arbitraire.

Refaire le calcul avec le scaling de Kurzkal, suivant la présentation de Josh Burby.

2.1 Equation de Vlasov

A présent nous considérons une collection de particules de masse m et de charge q constantes. Les particules sont indexées par $i = 1, \dots, N$, et sont placées dans un champ électromagnétique $E(t, x)$ et $B(t, x)$. En négligeant les possibles termes

d'interactions entre les particules, les équations de la dynamique des particules sont

$$\begin{cases} x'_i(t) = v_i(t), \\ mv'_i(t) = q(E(t, x_i(t)) + v_i(t) \wedge B(t, x_i(t))). \end{cases}$$

Il s'agit d'une description lagrangienne dans laquelle les trajectoires jouent le rôle central.

Nous allons à présent développer une approche eulérienne dans laquelle position et vitesse deviennent des variables de l'espace : en dimension trois, $(x, v) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$. On définit la distribution

$$f(t, x, v) = \sum_i \delta(x - x_i(t)) \delta(v - v_i(t)).$$

C'est la méthode de Klimontovich qui donne lieu à l'équation de Klimontovitch, laquelle est ici une équation de Vlasov.

Proposition 1. *La distribution de densité vérifie l'équation de Vlasov*

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f + F \cdot \nabla_v f = 0$$

au sens des distributions en temps-espace-vitesse, la fonction $F(t, x, v)$ étant définie par

$$F(t, x, v) = \frac{q}{m} (E(t, x) + v \wedge B(t, x)).$$

La preuve s'appuie sur une propriété remarquable de F .

Proposition 2. *Pour un champ (E, B) suffisamment régulier, la fonction F est à divergence nulle en vitesse*

$$\nabla_v \cdot F = 0.$$

Démonstration. En effet

$$\nabla_v \cdot F = \frac{q}{m} \nabla_v \cdot (v \wedge B(t, x)) = \frac{q}{m} v \cdot \nabla_v \wedge B(t, x) + \frac{q}{m} \nabla_v \wedge v \cdot B(t, x) = 0 + 0 = 0.$$

□

Preuve de la proposition 1. Nous montrons que f vérifie l'équation de Vlasov au sens des distributions en (t, x, v) . Comme F est à divergence nulle en vitesse et que de même $\nabla_x \cdot v = 0$, il s'ensuit que l'équation de Vlasov se réécrit formellement

$$\partial_t f + \nabla_x \cdot (vf) + \nabla_v \cdot (Ff) = 0.$$

Cette forme divergente admet aisément une formulation au sens des distributions dans laquelle toutes les dérivées portent sur les fonctions tests $\varphi \in \mathcal{D}_{t,x,v}$ de classe C^∞ à support compact. Cette formulation est

$$\int_t \int_x \int_v f (\partial_t \varphi + v \cdot \nabla_x f + F \cdot \nabla_v f) dt dx dv = 0, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}_{t,x,v}.$$

Ou encore en insérant la définition de f

$$\int_t m \sum_i (\partial_t \varphi + v \cdot \nabla_x f + F \cdot \nabla_v f)(x_i(t), v_i(t)) dt = 0,$$

ce que l'on peut développer en

$$\begin{aligned} \sum_i \int_t & [\partial_t \varphi(t, x_i(t), v_i(t)) + v_i(t) \cdot \partial_x \varphi(t, x_i(t), v_i(t)) \\ & + F(x_i(t), v_i(t)) \cdot \nabla_x \varphi(t, x_i(t), v_i(t))] dt. \end{aligned}$$

On reconnait sous l'intégrale la dérivée totale

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \varphi(t, x_i(t), v_i(t)) &= \partial_t \varphi(t, x_i(t), v_i(t)) + v_i(t) \cdot \partial_x \varphi(t, x_i(t), v_i(t)) \\ &+ F(x_i(t), v_i(t)) \cdot \nabla_x \varphi(t, x_i(t), v_i(t)). \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \int_t m \sum_i (\partial_t \varphi + v \cdot \nabla_x f + F \cdot \nabla_v f)(x_i(t), v_i(t)) dt \\ = \sum_i \int_t \frac{d}{dt} \varphi(t, x_i(t), v_i(t)) dt = 0 \end{aligned}$$

qui s'annule bien car la fonction φ est à support compact en temps. \square

Exercice 3. *Montrer que la distribution de vitesse f vérifie l'équation de Vlasov au sens des distributions, mais en espace-vitesse uniquement. On supposera que tout est de classe C^1 en temps.*

Quelques remarques suivent.

- En présence de plusieurs collections de particules, chacune d'entre elles de même masse et de même charge, on écrira une équation de Vlasov pour chaque type (ou espèce, indexée par $s = 1, \dots, S$) de particules

$$f^s(t, x, v) = \sum_i \delta(x - x_i^s(t)) \delta(v - v_i^s(t)).$$

L'équation est

$$\partial_t f^s + v \cdot \nabla_x f^s + F^s \cdot \nabla_v f^s = 0$$

avec la force de Lorentz

$$F^s(t, x, v) = \frac{q_s}{m_s} (E(t, x) + v \wedge B(t, x)).$$

- Par la suite nous envisagerons des solutions régulières (par exemple de classe $C^1_{t,x,v}$) de l'équation de Vlasov.

2.2 Prise de moments et fermeture fluide

La résolution numérique des équations en (x_i, v_i) est impossible pour un nombre de particules réalistes. La résolution numérique de l'équation de Vlasov en dimension $(x, v) \in \mathbb{R}^6$ est elle aussi impossible avec une précision suffisante. Aussi il est essentiel de mettre en place une procédure de réduction de la taille ou de la dimension du modèle. Par chance la physique nous guide : elle nous indique que la densité de masse

$$mn(t, x) = m \int f(t, x, v) dv,$$

le moment (inertiel) des particules

$$mn(t, x)u(t, x) = m \int f(t, x, v) v dv$$

et l'énergie (cinétique) des particules

$$mn(t, x)e(t, x) = m \int f(t, x, v) \frac{|v|^2}{2} dv$$

doivent jouer un rôle dans l'établissement d'un tel modèle réduit. La procédure utilisée pour construire le modèle réduit, dit fluide, s'appuie sur la méthode de prise de moments.

Nous considérons à présent des fonctions f régulières et bornées à l'infini en vitesse. Des justifications sur l'utilisation de fonctions régulières seront effectuées au chapitre suivant.

2.2.1 Principe de la prise de moments

Considérons une équation de transport modèle dans $x \in \mathbb{R}^n$

$$\partial_t c + a \cdot \nabla c = 0,$$

avec $\nabla \cdot a(t, x) = 0$. Soit $x \mapsto \varphi(x) \in \mathbb{R}$ une fonction donnée de la variable x . Un calcul direct montre que

$$\partial_t(\varphi c) + \nabla \cdot (a\varphi c) = (a \cdot \nabla \varphi) c.$$

On choisit aussi certaines variables (x_{p+1}, \dots, x_n) qui jouent un rôle particulier. Le moment partiel par rapport aux variables (x_{p+1}, \dots, x_n) concerne la quantité

$$\int \varphi c dx_{p+1} \dots dx_n$$

qui vérifie l'équation obtenue en intégrant par rapport à ces mêmes variables

$$\partial_t \int \varphi c dx_{p+1} \dots dx_n + \int \nabla_{x_1, \dots, x_n} \cdot (\varphi a c) dx_{p+1} \dots dx_n$$

$$= \int (a \cdot \nabla \varphi) c \, dx_{p+1} \dots dx_n.$$

Or on a formellement

$$\int \partial_{x_{p+1}} g \, dx_{p+1} = 0$$

en considérant implicitement qu'il n'y a pas de terme à l'infini dans l'intégration en x_{p+1} . De même pour les autres termes. Donc

$$\int \nabla_{x_1, \dots, x_n} \cdot (\varphi a c) \, dx_{p+1} \dots dx_n = \nabla_{x_1, \dots, x_p} \cdot \int \varphi a c \, dx_{p+1} \dots dx_n.$$

Les intégrales

$$\begin{aligned} \partial_t \int \varphi c \, dx_{p+1} \dots dx_n + \nabla_{x_1, \dots, x_p} \cdot \int \varphi a c \, dx_{p+1} \dots dx_n \\ = \int (a \cdot \nabla \varphi) c \, dx_{p+1} \dots dx_n \end{aligned}$$

sont des fonctions de (t, x_1, \dots, x_p) . Il y a donc bien eu réduction de la dimension du problème dans ce cas.

2.2.2 Application à l'équation de Vlasov

L'équation de Vlasov est écrite pour les variables $(x, v) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$. Instruits par la structure de n , nu et ne , nous allons prendre les moments par rapport à la variable $v \in \mathbb{R}^3$.

Premier moment : $\varphi = 1$.

On pose donc $n(t, x) = \int f(t, x, v) dv$, avec $dv = dv_1 dv_2 dv_3$.

Proposition 4. *Soit f une solution de classe $C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$ et à décroissance suffisamment rapide à l'infini en vitesse. Par exemple*

$$|f(t, x, v)| + |\partial_t f(t, x, v)| + |\nabla_x f(t, x, v)| + |\nabla_v f(t, x, v)| \leq \frac{C}{1 + |v|^p}, \quad \forall t, x,$$

pour un $p \in \mathbb{N}$ suffisamment grand qui sera précisé dans la preuve.

Alors on a la première équation fluide

$$\partial_t n + \nabla_x \cdot (nu) = 0.$$

Démonstration. Par exemple $p \geq 6$ assure la convergence de $n(t, x) = \int f(t, x, v) dv$ et de $n(t, x) = \int v f(t, x, v) dv$. Il suffit de passer en coordonnées polaires (en vitesse) pour le montrer.

• Ensuite on applique la méthode des moments avec $\varphi = 1$ et on intègre en vitesse. Pour bien comprendre ce qu'il se passe, on intègre sur une boule de rayon R , puis on fait tendre R vers l'infini. On obtient

$$\underbrace{\int_{|v| \leq R} \partial_t f \, dv}_{=A_R} + \underbrace{\int_{|v| \leq R} v \cdot \nabla_x f \, dv}_{=B_R} + \underbrace{\int_{|v| \leq R} F \cdot \nabla_v f \, dv}_{C_R} = 0.$$

• On a $A_R = \partial_t \int_{|v| \leq R} f \, dv$ avec $\int_{|v| \leq R} f \, dv \rightarrow \int_{\mathbb{R}^3} f \, dv$. On a aussi

$$\partial_t \int_{|v| \leq R} f \, dv \rightarrow \partial_t \int_{\mathbb{R}^3} f \, dv$$

grâce aux conditions de décroissance à l'infini en vitesse. Notons immédiatement qu'il en sera de même pour les autres opérateurs de dérivation.

• On a aussi $B_R = \nabla_x \cdot \int_{|v| \leq R} v f \, dv$ avec $\int_{|v| \leq R} v f \, dv \rightarrow \int_{\mathbb{R}^3} v f \, dv$.

• Et enfin

$$C_R = \int_{|v| \leq R} \nabla_v \cdot (F f) \, dv = \int_{|v|=R} (F, n) f \, d\sigma$$

où la normale sortante est $n = \frac{v}{|v|}$ et $d\sigma$ est la mesure de surface. Avec la simplification $\int_{|v|=R} (F, n) f \, d\sigma = q \int_{|v|=R} (E, n) f \, d\sigma$, on obtient

$$|C_R| \leq |q| \|E\|_{L^\infty} 4\pi R^2 \frac{C}{1 + |R|^6} \rightarrow 0 \text{ quand } R \rightarrow \infty.$$

• Au final

$$\partial_t \int f \, dv + \nabla_x \cdot \int v f \, dv = 0$$

ce qui termine la preuve. \square

Deuxième moment : $\varphi = v$.

Proposition 5. *Sous les mêmes conditions qu'à la proposition précédente, on a la deuxième équation fluide*

$$\partial_t(nu) + \nabla_x \cdot (nu \otimes u + P) = \frac{q}{m} (nE + nu \wedge B)$$

avec un tenseur dit de pression

$$P = \int f(v - u) \otimes (v - u) \, dv.$$

Démonstration. Nous appliquons la méthode des moments avec $\varphi = v$ et intégrons en vitesse dans une boule de taille R . D'où

$$\underbrace{\int_{|v| \leq R} \partial_t f v \, dv}_{=A_R} + \underbrace{\int_{|v| \leq R} v v \cdot \nabla_x f \, dv}_{=B_R} + \underbrace{\int_{|v| \leq R} v F \cdot \nabla_v f \, dv}_{C_R} = 0.$$

- Le terme A_R ne pose pas de difficulté.
- Concernant B_R on a

$$B_R = \nabla_x \cdot \int_{|v| \leq R} v \otimes v f \, dv = \nabla_x \cdot \int_{|v| \leq R} u \otimes u f \, dv$$

$$+ \nabla_x \cdot \int_{|v| \leq R} ((v-u) \otimes u + u \otimes (v-u)) f \, dv + \nabla_x \cdot \int_{|v| \leq R} (v-u) \otimes (v-u) f \, dv.$$

Le premier terme passe à la limite pour $R \rightarrow \infty$

$$\lim_{\infty} \int_{|v| \leq R} u \otimes u f \, dv = nu \otimes u.$$

Le terme central disparaît à la limite car $\int (v-u) f \, dv = 0$. Il reste la divergence de P .

- Enfin C_R nécessite une intégration par partie en vitesse

$$C_R = \int_{|v| \leq R} v \nabla_v \cdot (F f) \, dv = \int_{|v|=R} v f(F, n) \, d\sigma - \int_{|v| \leq R} F f \, dv.$$

L'intégrale de bord tend vers 0 sous les hypothèses considérées. Il reste

$$\int_{|v| \leq R} F f \, dv = \frac{q}{m} E \int_{|v| \leq R} f \, dv + \frac{q}{m} \int_{|v| \leq R} v f \, dv \wedge B \longrightarrow \frac{q}{m} (nE + nu \wedge B).$$

□

Troisième moment : $\varphi = \frac{|v|^2}{2}$.

Proposition 6. *Sous les mêmes conditions qu'aux deux propositions précédentes, on a la troisième équation fluide*

$$\partial_t(ne) + \nabla_x \cdot Q = \frac{q}{m} nu \cdot E.$$

avec Q un flux d'énergie à préciser.

Démonstration. Il s'agit à présent de prendre $\varphi = \frac{|v|^2}{2}$ et d'intégrer en vitesse. On obtient

$$\underbrace{\int_{|v| \leq R} \partial_t f \frac{|v|^2}{2} \, dv}_{=A_R} + \underbrace{\int_{|v| \leq R} \frac{|v|^2}{2} v \cdot \nabla_x f \, dv}_{=B_R} + \underbrace{\int_{|v| \leq R} \frac{|v|^2}{2} F \cdot \nabla_v f \, dv}_{C_R} = 0.$$

- Une nouvelle fois A_R ne pose pas de problème.
- Le deuxième terme donne le flux Q

$$B_R \longrightarrow \nabla_x \cdot \int \frac{|v|^2}{2} v f \, dv \equiv Q.$$

• Le dernier terme est

$$C_R = \int_{|v| \leq R} \frac{|v|^2}{2} \nabla_v \cdot (Ff) \, dv = \int_{|v|=R} \frac{|v|^2}{2} f(F, n) \, d\sigma - \int_{|v| \leq R} (F, v) f \, dv.$$

L'intégrale de bord tend vers 0. Il reste

$$\int_{|v| \leq R} (F, v) f \, dv = \frac{q}{m} E \cdot \int_{|v| \leq R} v f \, dv + 0 \longrightarrow \frac{q}{m} n(E, u).$$

□

Il faut bien avoir à l'esprit que cette méthode de moment ne fournit pas de système fermé pour l'instant. Par exemple le terme Q ne peut pas s'exprimer en fonction des inconnues n , nu et ne .

Aussi il est nécessaire d'effectuer une fermeture du système, à l'aide d'une hypothèse de fermeture.

Nous admettons que la distribution f peut se représenter sous forme Maxwellienne

$$f = n \left(\frac{m}{2\pi T} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{m|v-u|^2}{2T}}$$

où les paramètres sont $n \geq 0$, $T > 0$ et $u \in \mathbb{R}^3$. Nous remarquons que la température T a ici la dimension d'une énergie cinétique.

Cette hypothèse est, telle quelle, incompatible a priori avec l'équation de Vlasov. Aussi conviendrait-il pour être plus rigoureux d'enrichir l'équation de Vlasov avec un terme de collision R au second membre sous la forme d'une équation de Boltzmann

$$\partial_t f + \nabla_x \cdot (vf) + \nabla_v \cdot (Ff) = R.$$

Nous n'utilisons pas cette démarche et nous contentons d'une approche simplifiée.

2.3 Fermeture fluide

On rappelle l'intégrale de Gauss

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha z^2} dz = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}, \quad \alpha > 0.$$

Exercice 7. En déduire que

$$\int f \, dv = n, \quad \int f v \, dv.$$

On posera

$$p = nT$$

qui est la pression et possède la dimension d'une énergie cinétique.

Exercice 8. (*plus dur*) En déduire que $P = \frac{p}{m} I_d$ et

$$\int f \frac{|v|^2}{2} dv = \frac{3p}{2m} + \frac{n|u|^2}{2}, \quad \int f v \frac{|v|^2}{2} dv = \frac{5p}{2m} + \frac{n|u|^2}{2} u.$$

Posons $\varepsilon = \frac{3p}{2mn}$ que l'on pourra appeler la densité d'énergie interne.

Exercice 9. Vérifier que le modèle s'écrit

$$\begin{cases} \partial_t n + \nabla_x \cdot (nu) = 0, \\ \partial_t(nu) + \nabla \cdot (nu \otimes u) + \frac{\nabla p}{m} = \frac{q}{m} (nE + nu \wedge B), \\ \partial_t(ne) + \nabla \cdot (nue + \frac{p}{m}u) = \frac{q}{m} nuE, \end{cases} \quad (2.1)$$

avec $e = \varepsilon + \frac{1}{2}|u|^2$. On notera que la pression peut se déterminer directement en fonction de l'énergie interne ε et de n par

$$p = (\gamma - 1)nm\varepsilon$$

avec $\gamma = \frac{5}{3}$.

2.4 Equation du champ

Le modèle précédent décrit la dynamique au sein d'un champ électromagnétique (E, B) donné. Les équation de Maxwell décrivent de leur côté la dynamique du champ avec des termes sources

$$\begin{cases} -\frac{1}{c^2} \partial_t E + \nabla \wedge B = -\mu_0 J, & J = q \int f v dv = qnu, \\ \partial_t B + \nabla \wedge E = 0, \\ \nabla \cdot B = 0, \\ \nabla \cdot E = \frac{q \int f dv}{\varepsilon_0} = \frac{qn}{\varepsilon_0}. \end{cases} \quad (2.2)$$

Exercice 10. En appliquant l'opérateur divergence à la première équation de ce système, retrouver

$$\partial_t n + \nabla \cdot (nu) = 0.$$

On utilisera la relation $c^2 \varepsilon_0 \mu_0 = 1$.

En pratique il faut coupler les systèmes : par exemple (2.1) et (2.2). On consultera [2] pour des développements complémentaires.

Chapitre 3

Equation de transport et de Vlasov

Au cours de ce chapitre, nous considérons des sous-modèles du système de Vlasov-Maxwell et détaillons certaines propriétés de ces modèles. Choies parmi les plus élémentaires, les propriétés en question nous permettront de mieux comprendre et détailler en partie la structure du système de Vlasov-Poisson. On consultera [1, 3] pour des développements complémentaires.

3.1 Equation du transport

L'équation de Vlasov se récrit

$$\partial_t f + A \cdot \nabla f = 0, \quad (t, x, v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3,$$

avec $A = (v, \frac{q}{m}(E(x, t) + v \wedge B(x, t))) \in \mathbb{R}^6$ et $\nabla = (\nabla_x, \nabla_v)$. Comme $\nabla \cdot A = 0$ alors on a aussi

$$\partial_t f + \nabla \cdot (Af) = 0.$$

Le champ électromagnétique $(E(x, t), B(x, t))$ est une donnée. Il sera pris comme une fonction régulière et bornée de x et t .

L'équation de Vlasov est une équation de transport dont la solution se détermine sans trop de peine à l'aide de la méthode des caractéristiques dans le cadre du théorème de Cauchy-Lipshitz.

Soit $(X, s, t) \mapsto y(X, s, t)$ la courbe caractéristique qui dépend d'un point de départ et d'un temps de départ

$$y(X, s, s) = X \in \mathbb{R}^3, \quad s \in \mathbb{R}, \quad (3.1)$$

et que l'on intègre en suivant le champ A

$$\partial_t y(t, X) = A(t, y(X, s, t)) \quad (3.2)$$

pour atteindre le temps $t \in \mathbb{R}$.

L'intégration est dans le sens positif pour $s < t$ et dans le sens rétrograde pour $t < s$.

La variable y s'interprète comme un point matériel mobile sous l'influence d'un champ de vitesse A . Ce point est cependant défini dans l'espace des phases $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$.

Théorème 11. (*Cauchy-Lipshitz pour un champ de vitesse régulier*). *Supposons que $A \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R})$ et est à croissance au plus linéaire*

$$|A(t, y)| \leq C(1 + |y|), \quad \forall (t, y) \in [0, T] \times \mathbb{R}^d$$

pour un $T > 0$ donné.

Alors il existe une unique y de classe \mathcal{C}^k solution de (3.2-3.1) pour tout $0 \leq s, t \leq T$ et tout $X \in \mathbb{R}^d$.

La condition de croissance au plus linéaire est standard.

Elle est nécessaire comme le montre le contre-exemple qualitatif

$$z'(t) = z^2$$

qui s'intègre en $\frac{z'}{z^2} = 1$ d'où

$$-\frac{1}{z(t)} + \frac{1}{z(0)} = t$$

et

$$z(t) = \frac{z(0)}{1 + z(0)t}.$$

On voit ici que si $z(0) < 0$ alors la solution est définie sur un temps maximal d'existence $[0, -\frac{1}{z(0)}[$.

La condition de croissance est aussi suffisante. Sans revenir sur la preuve complète du théorème, il suffit d'utiliser le lemme de Gronwall pour s'apercevoir que le comportement de y ne peut pas exploser en temps fini. En effet toute solution de (3.2-3.1) pour un temps initial nul ($s = 0$) vérifie

$$\partial_t \frac{|y|^2}{2} = (A, y), \quad |y| = \sqrt{(y, y)},$$

d'où

$$\partial_t \frac{|y|^2}{2} \leq |A| |y| \leq C(1 + |y|)|y| \leq K(1 + |y|^2)$$

pour un K suffisamment grand. Alors

$$\partial_t |y(t)|^2 - 2K|y(t)|^2 \leq 2K$$

puis

$$\partial_t (e^{-2Kt} |y(t)|^2) \leq 2Ke^{-2Kt}.$$

Enfin

$$e^{-2Kt}|y(t)|^2 \leq |y(0)|^2 + 1 - e^{-2Kt}.$$

Il s'ensuit que

$$|y(t)|^2 \leq e^{2Kt}|y(0)|^2 + e^{2Kt} - 1 = e^{2Kt}|X|^2 + e^{2Kt} - 1$$

ce qui montre bien que le phénomène d'explosion en temps fini ne peut pas se produire pour un champ A à croissance au plus linéaire.

Proposition 12. *Sous les conditions précédentes, la solution de l'équation de Vlasov est*

$$f(t, X) = f_0(y(X, t, 0))$$

ou encore

$$f(t, y(X, 0, t)) = f_0(X).$$

Attention au fait que $y, X \in \mathbb{R}^6$. Le fait que f est solution se vérifie par

$$\partial_t f(t, y(X, 0, t)) = \partial_t f_0(X) = 0.$$

Puis par la formule des dérivées composées

$$\partial_t f(t, y(X, 0, t)) + \partial_t y(X, 0, t) \cdot \nabla_X f(t, y(X, 0, t)) = 0$$

ou encore

$$\partial_t f(t, X) + A \cdot \nabla_X f(t, X) = 0, \quad \forall t, X \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^6.$$

Cela établit l'existence d'une solution.

Nous vérifions l'unicité. On restreint aux solutions à support compact. Soient f_1 et f_2 telles que

$$\partial_t f_1 + A \cdot \nabla f_1 = \partial_t f_2 + A \cdot \nabla f_2 = 0 \text{ et } f_1(0, X) = f_2(0, X) = X.$$

La différence est $e = f_1 - f_2$ qui est solution de

$$\partial_t e + A \cdot \nabla e = 0 \text{ et } e(0, X) = 0.$$

D'où

$$\partial_t e^2 + \nabla \cdot (Ae^2) = \partial_t e^2 + A \cdot \nabla(e^2) = e(\partial_t e + A \cdot \nabla e) = 0.$$

Après intégration en X et utilisation de la condition de support compact, il s'ensuit que

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^6} e^2(t, X) dX = 0.$$

Donc e est partout nulle.

3.2 Système de Vlasov-Poisson

A présent nous considérons l'équation de Vlasov-Poisson qui se déduit des équations de Vlasov-Maxwell avec invariance par rapport à y et z , et en négligeant le champ magnétique B . On fera de plus l'hypothèse que les particules sont des électrons de masse normalisée $m = 1$ et de charge normalisée $e = -1$. Les électrons sont dans un bain d'ions immobiles de densité constante en espace $n_i = 1$. Enfin les constantes physiques sont elles-aussi normalisées $c = \varepsilon_0 = \mu_0 = 1$. Les électrons sont décrits par $f(t, x, v)$ avec $t \geq 0$, $v \in \mathbb{R}$ et $x \in I$ où I est l'intervalle unité $I =]0, 1[$ que l'on munit de conditions périodiques en espace ; par exemple

$$f(t, 1, v) = f(t, 0, v), \forall t, v.$$

On obtient

$$\begin{cases} \partial_t f + v \partial_x f - E \partial_v f = 0, & (t, x, v) \in \mathbb{R}^{+,*} \times I \times \mathbb{R}, \\ \partial_x E = 1 - \int_{\mathbb{R}} f dv, & (t, x) \in \mathbb{R}^{+,*} \times I, \\ f(0, x, v) = f_0(x, v), & (x, v) \in I \times \mathbb{R}. \end{cases}$$

La deuxième équation vient de la condition de divergence sur le champ électrique.

On note que ce système est non linéaire car E dépend de f . Cela fait qu'il n'est pas possible d'appliquer directement la méthode des caractéristiques pour analyser ce système.

Proposition 13. *Les solutions sont telles que*

$$\int_I \int_{\mathbb{R}} f(t, x, v) dx dv = 1 \quad \forall t.$$

Cela vient de

$$0 = \int_I \partial_x E = \int_I \left(1 - \int_{\mathbb{R}} f dv \right) dx.$$

Cette relation de compatibilité est en fait une relation de neutralité globale du plasma : il y a (globalement) autant d'ions que d'électrons.

Exercice 14. *Montrer que c'est compatible avec l'équation de continuité*

$$\partial_t \int_{\mathbb{R}} f dv + \partial_x \int_{\mathbb{R}} f v dv = 0.$$

Cela amène à se poser la question de déterminer une procédure de calcul de E en fonction de f . De façon très classique, nous considérerons

$$\begin{cases} \partial_x E = 1 - \int_{\mathbb{R}} f dv, \\ \int_I E dx = 0, \end{cases} \quad (3.3)$$

qui détermine bien E par sa dérivée et sa valeur moyenne. C'est à dire que nous demandons au champ d'être à moyenne nulle à tout temps.

Proposition 15. *Considérons la solution de (3.3) avec f solution de l'équation de Vlasov. Supposons que le courant total soit nul au temps initial*

$$\int_I \int_{\mathbb{R}} f(0, x, v) v \, dv dx = 0.$$

Alors le courant total est nul à tout temps, et le champ électrique peut se déterminer aussi par

$$\partial_t E = \int_{\mathbb{R}} f v \, dv.$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_I \int_{\mathbb{R}} f(t, x, v) v \, dv dx &= - \int_I \int_{\mathbb{R}} (v \partial_x f(t, x, v) - E \partial_v f) v \, dv dx \\ &= \int_I E \int_{\mathbb{R}} \partial_v f(t, x, v) v \, dv dx = - \int_I E \int_{\mathbb{R}} f(t, x, v) dv dx \\ &= \int_I E \left(1 - \int_{\mathbb{R}} f(t, x, v) dv \right) dx \end{aligned}$$

car E est à moyenne nulle par hypothèse. On reconnaît de plus la dérivée de E dans la parenthèse. Donc

$$\frac{d}{dt} \int_I \int_{\mathbb{R}} f(t, x, v) v \, dv dx = \int_I E \partial_x E dx = 0$$

ce qui montre la première partie de la proposition. Il faut remarquer que cette relation n'est qu'une version simplifiée de la conservation de l'impulsion du système de Vlasov-Maxwell.

On a ensuite en dérivant par rapport au temps

$$\partial_t \partial_x E = - \partial_t \int_{\mathbb{R}} f dv,$$

c'est à dire

$$\partial_x \partial_t E = \partial_x \int_{\mathbb{R}} f v \, dv \iff \partial_x \left(\partial_t E - \int_{\mathbb{R}} f v \, dv \right).$$

L'expression sous le ∂_x étant à moyenne nulle en espace, on en déduit la loi d'Ampère (première équation du système de Maxwell)

$$\partial_t E = \int_{\mathbb{R}} f v \, dv.$$

□

Par la suite le champ E sera toujours pris à moyenne nulle. Le système correspondant est alors

$$\begin{cases} \partial_t f + v\partial_x - E\partial_v f = 0, & (t, x, v) \in \mathbb{R}^{+,*} \times I \times \mathbb{R}, \\ \partial_x E = 1 - \int_{\mathbb{R}} f dv, & (t, x) \in \mathbb{R}^{+,*} \times I, \\ \int_I E(t, x) dx = 0, & t \geq 0, \\ f(0, x, v) = f_0(x, v) \geq 0, & (x, v) \in I \times \mathbb{R}. \end{cases} \quad (3.4)$$

La démarche qui suit consiste à "récupérer" le plus possible d'estimations a priori sur les solutions de ce système, puis à démontrer l'existence d'une solution. Pour toutes ces estimations a priori, nous supposons, a priori donc, que f est suffisamment régulière.

Proposition 16. *Les solutions (régulières) de (3.4) vérifient la conservation de l'énergie totale*

$$\frac{d}{dt} \int_I \left(\frac{E^2}{2} + \int_{\mathbb{R}} f \frac{v^2}{2} dv \right) dx = 0.$$

Démonstration. On a

$$\frac{d}{dt} \int_I \frac{E^2}{2} dx = \int_I E \partial_t E dx = \int_I E \int_{\mathbb{R}} f v dv dx.$$

Par ailleurs

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_I \int_{\mathbb{R}} f \frac{v^2}{2} dv dx &= \int_I \int_{\mathbb{R}} (-v\partial_x f + E\partial_v f) \frac{v^2}{2} dv dx \\ &= \int_I E \int_{\mathbb{R}} \partial_v f \frac{v^2}{2} dv dx = - \int_I E \int_{\mathbb{R}} \partial_v f v dv dx. \end{aligned}$$

Donc la somme est nulle. \square

Proposition 17. *Les solutions (régulières) de (3.4) vérifient*

- $f \geq 0$,
- $\|f(t)\|_{L^\infty(I \times \mathbb{R})} = \|f_0\|_{L^\infty(I \times \mathbb{R})}$,
- la préservation de la norme L^p sous la forme

$$\frac{d}{dt} \int_I \int_{\mathbb{R}} f^p dv dx = 0.$$

Démonstration. Les deux premiers points viennent de la formule des caractéristiques. La troisième relation est immédiate grâce à l'équation de Vlasov. \square

Proposition 18. *Supposons f_0 à support compact (en vitesse) et bornée. Alors pour tout temps $t > 0$, $f(t)$ est à support compact en vitesse.*

Démonstration. Notons

$$w(t) = \sup_{\exists(x,v) \text{ with } f(t,x,v) \neq 0} |v| \geq 0.$$

Par hypothèse $w(0) < \infty$.

Soit à présent (x, v) tel quel $v = w(t) < \infty$. On a par la méthode des caractéristiques que le support de f évolue en suivant

$$x'(t) = v, \quad v'(t) = -E.$$

Or E est à moyenne nulle. Donc

$$\|E(t)\|_{L^\infty(I)} \leq \|\partial_x E(t)\|_{L^\infty(I)} \leq 1 + \left\| \int f v \right\|_{L^\infty(I)}.$$

Or

$$\left| \int f v \right| \leq 2 \|f(t)\|_{L^\infty(I \times \mathbb{R})} w(t) = 2 \|f_0\|_{L^\infty(I \times \mathbb{R})} w(t).$$

Donc $|v'(t)| \leq 1 + 2 \|f_0\|_{L^\infty(I \times \mathbb{R})} w(t)$. On en déduit que

$$w'(t) \leq 1 + 2 \|f_0\|_{L^\infty(I \times \mathbb{R})} w(t).$$

Un lemme de Gronwall montre que $w(t)$ est à croissance au plus exponentielle en temps. Donc $w(t) < \infty$ pour tout t ce qui termine la preuve. \square

Proposition 19. *Soit une donnée initiale à support compact et bornée.*

La régularité de la donnée initiale est propagée : pour tout $T > 0$ il existe une constante $C(T)$ telle que

$$\|f(t)\|_{H^1(I \times \mathbb{R})} \leq C(T) \|f_0\|_{H^1(I \times \mathbb{R})}.$$

Démonstration. On a tout d'abord en dérivant l'équation de Vlasov par rapport à x

$$\partial_t (\partial_x f) + v \partial_x (\partial_x f) - E \partial_v (\partial_x f) = \partial_x E \partial_v f.$$

Donc en multipliant par $\partial_x f$ et en intégrant

$$\frac{d}{dt} \int_I \int_{\mathbb{R}} (\partial_x f)^2 dv dx = 2 \int_I \int_{\mathbb{R}} \partial_x E \partial_v f \partial_x f.$$

Or $\partial_x E$ est borné (voir plus haut) pour $t \leq T$. Donc il existe $C > 0$ tel que

$$\frac{d}{dt} \|\partial_x f\|_{L^2(I \times \mathbb{R})}^2 \leq 2C \|\partial_x f\|_{L^2(I \times \mathbb{R})} \|\partial_v f\|_{L^2(I \times \mathbb{R})}$$

ce qui entraîne

$$\frac{d}{dt} \|\partial_x f\|_{L^2(I \times \mathbb{R})} \leq C \|\partial_v f\|_{L^2(I \times \mathbb{R})}, \quad t < T. \quad (3.5)$$

Par ailleurs en dérivant l'équation de Vlasov par rapport à v

$$\partial_t (\partial_v f) + v \partial_x (\partial_v f) - E \partial_v (\partial_x f) = -\partial_v f.$$

En multipliant par $\partial_x f$, en intégrant et en simplifiant on obtient

$$\frac{d}{dt} \|\partial_v f\|_{L^2(I \times \mathbb{R})} \leq \|\partial_x f\|_{L^2(I \times \mathbb{R})}, \quad t < T. \quad (3.6)$$

Sommant (3.5) et (3.6), on trouve

$$\frac{d}{dt} |f|_{H^1(I \times \mathbb{R})} \leq c |f|_{H^1(I \times \mathbb{R})}$$

où $|f|_{H^1} = \|\partial_x f\|_{L^2} + \|\partial_v f\|_{L^2}$ est la semi-norme H^1 . Une utilisation du lemme de Gronwall (une de plus) termine la preuve (pour la partie $\|f(t)\|_{L^2}$ c'est réglé grâce à la proposition précédente). \square

Exercice 20. *Détailler les calculs qui mènent à (3.6).*

Exercice 21. *Montrer, sous les mêmes hypothèses et en utilisant une méthode similaire, qu'il existe une constante $C(T)$ telle que*

$$\|f(t)\|_{H^2(I \times \mathbb{R})} \leq C(T) \|f_0\|_{H^2(I \times \mathbb{R})}.$$

3.3 Existence d'une solution

La construction d'une solution s'appuie sur un procédé explicite. Soit $\varepsilon > 0$ un coefficient qui s'interprètera in fine comme un décalage en temps : une autre notation plus explicite pourrait alors être $\varepsilon = \Delta t$. Nous considérons le système

$$\begin{cases} \partial_t f_\varepsilon + v \partial_x f_\varepsilon - E_\varepsilon \partial_v f_\varepsilon = 0, & (t, x, v) \in \mathbb{R}^{+,*} \times I \times \mathbb{R}, \\ \partial_x E_\varepsilon(t, x) = 1 - \int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon((\max(t - \varepsilon, 0), x, v) dv, & (t, x) \in \mathbb{R}^{+,*} \times I, \\ \int_I E_\varepsilon(t, x) dx = 0, & t \geq 0, \\ f_\varepsilon(0, x, v) = f_0(x, v) \geq 0, & (x, v) \in I \times \mathbb{R}. \end{cases} \quad (3.7)$$

L'idée est ici que le champ électrique qui est utilisé dans la première équation est calculé avec un retard en temps de ε . De ce fait le système peut se résoudre itérativement.

Initialisation pour $0 \leq t < \varepsilon$.

— Calcul de $E_\varepsilon(t) = E_\varepsilon(0)$ par

$$\begin{cases} \partial_x E_\varepsilon(t) = 1 - \int_{\mathbb{R}} f_0 dv, \\ \int_I E_\varepsilon(t) dx = 0. \end{cases}$$

On note que le champ est constant en temps.

— Résolution de l'équation de Vlasov

$$\partial_t f_\varepsilon + v \partial_x f_\varepsilon - E_\varepsilon(t=0) \partial_v f_\varepsilon = 0$$

explicitement par la méthode des caractéristiques.

Itération sur $k = 1, 2, \dots$

— Calcul de $E_\varepsilon(t)$ pour $k\varepsilon \leq t < (k+1)\varepsilon$ par

$$\begin{cases} \partial_x E_\varepsilon(t) = 1 - \int_{\mathbb{R}} f(t - \varepsilon) dv, \\ \int_I E_\varepsilon(t) dx = 0. \end{cases}$$

— Résolution de l'équation de Vlasov pour $k\varepsilon \leq t < (k+1)\varepsilon$

$$\partial_t f_\varepsilon + v \partial_x f_\varepsilon - E_\varepsilon \partial_v f_\varepsilon = 0$$

une nouvelle fois explicitement par la méthode des caractéristiques. Le point important est que l'on utilise le champ électrique qui vient d'être déterminé juste auparavant.

Cette procédure définit de fait un algorithme.

Proposition 22. *Supposons que $f_0 \geq 0$, f_0 bornée et f_0 à support compact en vitesse. Alors on a pour tout temps $t > 0$: $f(t) \geq 0$, $f(t)$ bornée et $f(t)$ à support compact en vitesse.*

Par ailleurs les estimations a priori sont toutes encore vérifiées avec des bornes indépendantes de ε . Par exemple

$$\|f_\varepsilon(t)\|_{H^1(I \times \mathbb{R})} \leq C(T) \|f_0\|_{H^1(I \times \mathbb{R})}, \quad \forall t \leq T, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Démonstration. Reprendre point par point les preuves des estimations précédentes. \square

Exercice 23. *Vérifier que l'énergie totale n'est cependant plus conservée.*

Théorème 24. *La suite $(f_\varepsilon, E_\varepsilon)$ converge vers une limite qui vérifie le système de Vlasov-Poisson (au moins au sens des distributions).*

Démonstration. Sous ces hypothèses sur la donnée initiale, il s'ensuit que

$$E_\varepsilon \in W^{1,\infty}(\mathbb{R} \times I)$$

et que

$$f_\varepsilon \in H^1(]0, T[\times I \times] - A, A[)$$

avec des bornes indépendantes de ε . Ici A est une borne maximale du support en vitesse pour $0 \leq t \leq T$. Cette borne peut être prise indépendante de ε .

Nous sommes alors en mesure d'utiliser tout **résultat de compacité** utile : c'est le point fondamental qui se retrouve pour l'analyse mathématique de la plupart des équations de ce type.

Par exemple nous pouvons remarquer que

$$E_\varepsilon \in W^{1,\infty}(\mathbb{R} \times I \times] - A, A[)$$

car sa dérivée en vitesse est nulle. Comme le domaine $]0, T[\times I \times] - A, A[$ est bornée, les théorèmes de compacité les plus simples sont utilisables. Nous utiliserons le fait que pour Ω ouvert borné régulier de \mathbb{R}^3 , la boule unité de $H^1(\Omega)$

est compacte dans $L^2(\Omega)$. De toute suite bornée dans $H^1(\Omega)$, on peut extraire une sous-suite convergente.

Donc il existe une sous-suite $\varepsilon_n \rightarrow 0$, $f \in H^1([0, T[\times I \times] - A, A])$ et $E \in H^1([0, T[\times I \times] - A, A])$ tels que

$$f_{\varepsilon_n} \rightarrow f \text{ dans } L^2([0, T[\times I \times] - A, A])$$

et

$$E_{\varepsilon_n} \rightarrow E \text{ dans } L^2([0, T[\times I \times] - A, A]).$$

C'est largement assez pour passer à la limite au sens des distributions dans l'équation de Vlasov car le produit converge

$$f_{\varepsilon_n} E_{\varepsilon_n} \rightarrow f E \text{ dans } L^1([0, T[\times I \times] - A, A]).$$

Donc la limite est solution du système de Vlasov Poisson au sens des distributions.

On a bien sûr beaucoup mieux. Par exemple on sait aussi que la sous-suite peut être choisie telle que f_{ε_n} tende faiblement vers f dans $H^1([0, T[\times I \times] - A, A])$. Donc

$$E_{\varepsilon_n} \partial_v f_{\varepsilon_n} \rightarrow E \partial_v f \text{ dans } L^1([0, T[\times I \times] - A, A])$$

en tant que produit d'un terme qui converge fortement par un terme qui converge faiblement. En passant à la limite, celle-ci est solution forte du système de Vlasov-Poisson.

Concernant l'équation du champ (la deuxième équation), on a des ces conditions que

$$\partial_x E_{\varepsilon_n} \text{ tend faiblement vers } \partial_x E \text{ dans } L^2([0, T[\times I \times] - A, A]).$$

De son côté

$$\int_{\mathbb{R}} f_{\varepsilon_n} dv$$

converge vers $\int_{\mathbb{R}} f dv$ au moins au sens des distributions. Donc

$$\partial_x E = 1 - \int_{\mathbb{R}} f dv \text{ au sens des distributions.}$$

□

Remarquons que le champ électrique peut se déterminer directement par la formule

$$E(x) = E(0) + \int_0^x \left(1 - \int_{\mathbb{R}} f dv \right) dx$$

avec une détermination de $E(0)$ qui permet d'assurer une moyenne nulle

$$E(0) = - \int_I \int_0^x \left(1 - \int_{\mathbb{R}} f dv \right) dx.$$

Sous cette forme la fonction f apparaît sous des intégrales doubles, par exemple

$$Q(x) = \int_0^x \int_{\mathbb{R}} f dv dx.$$

On peut alors reprendre la preuve précédente et se poser la question de la convergence de

$$Q_n(x) = \int_0^x \int_{\mathbb{R}} f_{\varepsilon_n} dv dx.$$

Comme f_{ε_n} est bornée uniformément dans $H^1([0, T[\times I \times] - A, A])$, sa trace à chaque "tranche" de temps est définie au moins en tant que fonction $f_{\varepsilon_n}(t) \in L^2(I \times] - A, A])$. Par continuité de l'application trace, cela assurera la convergence de $f_{\varepsilon_n}(t)$ vers $f(t)$ faiblement dans $L^2(I \times] - A, A])$. Au final on peut passer directement à la limite dans la représentation explicite de E en fonction de f .

3.3.1 Unicité de la solution

Proposition 25. *Soient deux solutions f_1 et f_2 issues de la même donnée initiale positive ou nulle, bornée et à support compact en vitesse. Supposons de plus que $\|\partial_v f_2(t)\|_{L^2(I \times \mathbb{R})} \leq C$ pour tout $0 \leq t < T$. Alors $f_1 = f_2$.*

Démonstration. Les champs autoconsistants associés à f_1 et f_2 sont notés E_1 et E_2 .

Posons $g = f_1 - f_2$. Par soustraction on a

$$\partial_t g + v \partial_x g - E_1 \partial_v g = (E_1 - E_2) \partial_v f_2.$$

Donc en multipliant par g et en intégrant,

$$\frac{d}{dt} \int_I \mathbb{R} g^2 dx dv = 2 \int_I \mathbb{R} (E_1 - E_2) \partial_v f_2 g.$$

Il s'ensuit par inégalité de Cauchy-Schwarz et simplification que

$$\frac{d}{dt} \|g\|_{L^2(I \times \mathbb{R})} \leq \|E_1 - E_2\|_{L^\infty(I)} \|\partial_v f_2\|_{L^2(I \times \mathbb{R})}.$$

Or il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $t < T$

$$\|E_1 - E_2\|_{L^\infty(I)} \leq C \|g\|_{L^2(I \times \mathbb{R})}. \quad (3.8)$$

Donc en reprenant l'hypothèse concernant $\partial_v f_2$

$$\frac{d}{dt} \|g\|_{L^2(I \times \mathbb{R})} \leq k \|g\|_{L^2(I \times \mathbb{R})}.$$

Comme $g(0) = 0$, un lemme de Gronwall évident assure que $g = 0$. \square

Remarquons que $\|\partial_v f_2(t)\|_{L^2(I \times \mathbb{R})} \leq C$ est assuré par la propagation de la régularité H^1 .

Exercice 26. *Vérifier (3.8).*

Chapitre 4

Discrétisation numérique

Nous considérons la solution de l'équation de Vlasov-Poisson posée dans $I \times \mathbb{R}$ avec une condition au bord périodique en espace, et construisons un schéma numérique pour la discrétisation. Nous montrerons que ce schéma est convergent ce qui constituera le résultat principal de ce chapitre. Cependant le schéma présenté présente en intérêt en lui-même car il est représentatif des schémas sur grille.

Comme dans le chapitre précédent, on commence par l'équation du transport. Dans un deuxième temps on considèrera le système de Vlasov-Poisson.

4.1 Discrétisation du transport

Soit l'équation $\partial_t f + v \partial_x f = 0$, $v > 0$, que l'on discrétise ainsi : f_j^n l'approximation numérique de $f(x_j, t_n)$, où $x_j = j \Delta x$, $j \in \mathbb{Z}$, est un point de grille et $t_n = n \Delta t$, $n \in \mathbb{N}$, est un temps de discrétisation.

La procédure de calcul de $(f_j^{n+1})_{j \in \mathbb{Z}}$ est :

$$f_j^{n+1} = \tilde{f}(x_j - v \Delta t, t_n)$$

où \tilde{f} est l'interpolé linéaire à partir des valeurs $(f_j^n)_{j \in \mathbb{Z}}$. Cette procédure correspond à une intégration exacte de l'équation des caractéristiques pendant un intervalle de temps $\Delta t > 0$ entre le point $x_j - v \Delta t$ et le point x_j . C'est pour cela que cette méthode est dite en partie **lagrangienne**, ou encore **semi-lagrangienne**.

On considère l'initialisation naturelle

$$f_j^0 = f_0(x_j), \quad \forall j \in \mathbb{Z}. \quad (4.1)$$

On peut aussi prendre la valeur moyenne $f_j^0 = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} f_0(x) dx$.

Exercice 27. Vérifier que la différence entre l'initialisation ponctuelle et l'initialisation en moyenne est au plus en $0(\Delta x^2)$ pour $f_0 \in W^{2,\infty}(I)$.

— Notons $p \in \mathbb{N}$ l'entier tel que

$$x_{j-p-1} < x_j - v\Delta t \leq x_{j-p}, \quad \forall j.$$

D'où

$$(j-p-1)\Delta x < j\Delta x - v\Delta t \leq (j-p)\Delta x$$

ou encore

$$p \leq \frac{v\Delta t}{\Delta t} < p+1.$$

Donc

$$p = \left[\frac{v\Delta t}{\Delta t} \right]$$

est la partie entière de $\frac{v\Delta t}{\Delta t}$.

— Puis on détermine un coefficient de combinaison linéaire $0 \leq \alpha < 1$ par

$$x_j - v\Delta t = (1-\alpha)x_{j-p} + \alpha x_{j-p-1}$$

ou encore après simplifications

$$v\Delta t = p\Delta x + \alpha\Delta x$$

ce qui montre que

$$\alpha = \frac{v\Delta t}{\Delta t} - p = \frac{v\Delta t}{\Delta t} - \left[\frac{v\Delta t}{\Delta t} \right] \in [0, 1[.$$

Ce coefficient de combinaison linéaire définit l'interpolé linéaire par

$$\tilde{f}(x_j - v\Delta t, t_n) = (1-\alpha)f_{j-p}^n + \alpha f_{j-p-1}^n, \quad j \in \mathbb{Z}.$$

— Puis on actualise à chaque pas de temps $n+1$ la valeur en x_j par

$$f_j^{n+1} = (1-\alpha)f_{j-p}^n + \alpha f_{j-p-1}^n, \quad j \in \mathbb{Z}. \quad (4.2)$$

Théorème 28. Soit $T > 0$ un temps un temps donné. L'erreur numérique associée au schéma (4.1-4.2) est

$$\|f^n - f_{\text{exact}}(t_n)\|_{l^\infty} \leq C \min\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}, |v|\right) \Delta x$$

pour une solution exacte f à support compact en vitesse (et en espace pour simplifier) et de classe $W^{2,\infty}(I \times \mathbb{R})$, et pour une constante C (qui dépend de T entre autres).

Démonstration. Il est entendu que $\|v\|_{l^\infty} = \sup_j |v_j|$ et que $f_{\text{exact}}(t_n) = (f(x_j, t_n))_j$ où f est la solution exacte.

• Soit l'erreur d'interpolation

$$\mu_j^k = f(x_j, t_k) - (1-\alpha)f(x_{j-p}, t_k) - \alpha f(x_{j-p-1}, t_k).$$

Posons aussi

$$h(\alpha) = f(x_{j-p} - \alpha \Delta x) - (1 - \alpha)f(x_{j-p}) - \alpha f(x_{j-p-1})$$

de sorte que

$$\begin{cases} h(0) = h(1) = 0, \\ h''(\alpha) = \Delta x^2 f''(x_{j-p} - \alpha \Delta x). \end{cases}$$

Il s'ensuit que

$$\|h''\|_{L^\infty[0,1]} \leq \Delta x^2 \|f''\|_{L^\infty(\mathbb{R})},$$

puis

$$|h(\alpha)| \leq \frac{\alpha(1-\alpha)}{2} \|h''\|_{L^\infty[0,1]} \leq \frac{\alpha(1-\alpha)}{2} \Delta x^2 \|f''\|_{L^\infty(\mathbb{R})}.$$

Comme $\alpha \leq \min\left(\frac{v\Delta x}{\Delta x}, 1\right)$, on a sous une forme qui sera utile

$$\|\mu^k\|_{l^\infty} \leq \frac{1}{2} \min(v\Delta t, \Delta x) \Delta x \|f''\|_{L^\infty(\mathbb{R})}. \quad (4.3)$$

• L'erreur numérique $e^n = (e_j^n)_j$ est par définition

$$e_j^k = f(x_j, t_k) - f_j^k$$

de sorte que

$$e_j^{k+1} = (1 - \alpha)e_{j-p}^k + \alpha e_{j-p-1}^k + \mu_j^k.$$

Comme $0 \leq \alpha \leq 1$, on trouve

$$\|e^{k+1}\|_{l^\infty} \leq (1 - \alpha)\|e^k\|_{l^\infty} + \alpha\|e^k\|_{l^\infty} + \|\mu^k\|_{l^\infty} = \|e^k\|_{l^\infty} + \|\mu^k\|_{l^\infty}.$$

Comme $e^0 = 0$, on obtient en par élimination télescopique

$$\|e^k\|_{l^\infty} \leq \sum_{p=0}^{k-1} \|\mu^p\|_{l^\infty} \leq k \frac{1}{2} \min(v\Delta t, \Delta x) \Delta x \|f''\|_{L^\infty(\mathbb{R})}.$$

Or $k\Delta t \leq T$, donc

$$\|e^k\|_{l^\infty} \leq C(T, f''_0) \min\left(v, \frac{\Delta x}{\Delta t}\right) \Delta x$$

ce qui clôt la preuve. \square

Exercice 29. *Bien comprendre pourquoi $p = 1$ à la figure 4.1.*

Parmi les propriétés intéressantes des schémas semi-lagrangiens, on distingue les suivantes

- Ces schémas sont stables indépendamment de tout critère CFL sur le pas de temps.
- L'ordre de convergence est toujours au moins du premier ordre.

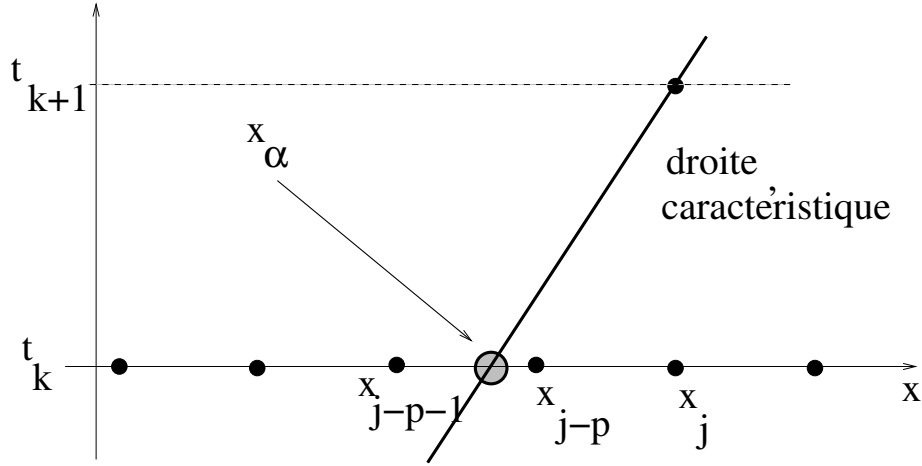


FIGURE 4.1 – Principe du schéma semi-lagrangien : $x_\alpha = (1 - \alpha)x_{j-p} + \alpha x_{j-p-1} = x_j - v\Delta t$.

— Pour des pas de temps grands par rapport au pas d'espace tels que,

$$\Delta t \approx c\Delta x^\beta, \quad 0 < \beta < 1$$

l'ordre de convergence est en $2 - \beta$ avec

$$1 < 2 - \beta < 2.$$

Enoncé autrement on peut rendre l'ordre de convergence aussi grand que désiré en augmentant le pas de temps.

Cela est dû au fait que la partie d'interpolation à une erreur d'ordre 2 indépendamment du pas de temps, et que l'on a intérêt de ce point de vue à minimiser le nombre d'interpolation, donc à maximiser le pas de temps.

4.2 Extention à l'équation de Vlasov-Poisson

Soit $f(t, x, v)$ la solution de l'équation de Vlasov-Poisson pour $(t, x, v) \in \mathbb{R}^+ \times I \times \mathbb{R}$

$$\begin{cases} \partial_t f + v\partial_x f - E\partial_v f = 0, & t > 0, x \in I, v \in \mathbb{R}, \\ f(0, x, v) = f_0(x, v), & x \in I, v \in \mathbb{R}, \\ \partial_x E(t, x) = -\int_{\mathbb{R}} f(t, x, v)dv, \\ \int_I E(t, x)dx = 0, \end{cases}$$

qui n'est autre que (3.4) dans lequel on a simplifié l'équation de la charge pour se focaliser sur la partie principale.

Le segment d'espace I est décomposé en cellules $\Omega_j =]x_i, x_{i+1}$ avec $x_i = (i)\Delta x$ pour tout $i = 1, 1, \dots, P, P + 1$ avec $P = \frac{1}{\Delta x}$. Les centres des cellules sont les

$x_{i+\frac{1}{2}} = (i + \frac{1}{2})\Delta x$. Le nombre de cellules ainsi que de centre de cellules parcourt $i = 1, \dots, P$. Par compatibilité avec la condition au bord périodique il est utile d'identifier i et $i + P$ systématiquement.

En vitesse, la décomposition est du même type : $v_j = j\Delta v$ avec $j \in \mathbb{Z}$, et $v_{j+\frac{1}{2}} = (j + \frac{1}{2})\Delta v$.

La solution numérique au point $(x_{i+\frac{1}{2}}, v_{j+\frac{1}{2}})$ et au pas de temps n est notée $f_{i,j}^n$.

Partant d'une solution initiale à support compact en vitesse, il est naturel de s'intéresser à des algorithmes qui préservent cette propriété. Il est alors naturel de restreindre le domaine en vitesse et d'adjoindre des conditions au bord périodiques en vitesse si besoin est. Les indices en vitesse maximaux qu'il est nécessaire de considérer sont v_j avec $|j| \leq Q$. Le domaine d'étude est alors

$$1 \leq i \leq P \text{ et } -Q \leq j \leq Q$$

pour Q choisi suffisamment grand.

Notations

Pour aider à la description de l'algorithme, on introduit quelques notations. Pour obtenir des notations plus visuelles, **on décide d'adjoindre l'indice h à toute quantité discrète**. Donc f_h désignera un vecteur, et f une fonction. L'opérateur de restriction est

$$\begin{aligned} R_h : \mathcal{C}^0(I) &\rightarrow \mathbb{R}^P, \\ g &\mapsto f_h = R_h g = (g(x_j))_{1 \leq j \leq P}. \end{aligned}$$

L'opérateur de prolongement est

$$\begin{aligned} P : \mathbb{R}^P &\rightarrow L^\infty(I), \\ f_h = (f_j)_{1 \leq j \leq P} &\mapsto g = P f_h : g(x) = f_j \text{ pour } x_{j-\frac{1}{2}} < x < x_{j+\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Nous aurons aussi besoin de définir un champ électrique discret à partir d'une solution discrète. In fine cela revient à définir

$$\begin{aligned} A_h : \mathbb{R}^P \times \mathbb{R}^{2Q+1} &\rightarrow \mathbb{R}^P, \\ f_h = (f_{ij})_{ij} &\mapsto E_h = A_h f_h. \end{aligned}$$

Attention : $A_h \in \mathbb{R}^{[P \times (2Q+1)] \times P}$ est une matrice rectangulaire. Nous admettons que cet opérateur est stable

$$\|A_h f_h\|_{l^\infty} \leq q \|f_h\|_{l^\infty}$$

pour une constante universelle R . Nous admettons que cet opérateur est d'ordre 1 au sens

$$\|R_h E - A_h R_h f\|_{l^\infty} \leq C \Delta x$$

pour tout fonction f suffisamment régulière, le champ E étant défini exactement

$$\partial_x E = 1 - \int f dv, \quad \int_I E = 0. \quad (4.4)$$

Proposition 30. *On a l'inégalité*

$$\|R_h E - A_h f_h\|_{l^\infty} \leq C\Delta x + q\|R_h f - f_h\|_{l^\infty} \quad (4.5)$$

pour toute fonction f assez régulière.

Démonstration. Cela vient directement de l'inégalité triangulaire

$$\begin{aligned} \|R_h E - A_h f_h\|_{l^\infty} &\leq \|R_h E - A_h R_h f\|_{l^\infty} + \|A_h R_h f - A_h f_h\|_{l^\infty} \\ &\leq C\Delta x + q\|R_h f - f_h\|_{l^\infty}. \end{aligned}$$

□

Soit par exemple l'opérateur A_h suivant

$$A_h = R_h \varphi P$$

où φ est l'opérateur $f \mapsto E$ exact qui correspond à la résolution de (4.4).

Exercice 31. *Montrer que cet opérateur est stable et d'ordre 1. Il vérifie donc (4.5).*

On définit aussi pour les besoins de la preuve de convergence les opérateurs d'advection exacte dans chaque direction. Ainsi $\tilde{S}_{\Delta t} : L^\infty(I \times \mathbb{R}) \rightarrow L^\infty(I \times \mathbb{R})$ est tel que $\tilde{S}_{\Delta t} g = h$ avec

$$\begin{cases} \partial_t f + v \partial_x f = 0, \\ f(t=0) = g, \\ h = f(t = \Delta t). \end{cases}$$

De même $\tilde{T}_{E, \Delta t} : L^\infty(I \times \mathbb{R}) \rightarrow L^\infty(I \times \mathbb{R})$ est tel que $\tilde{T}_{E, \Delta t} g = h$ avec

$$\begin{cases} \partial_t f - E \partial_v f = 0, \\ f(t=0) = g, \\ h = f(t = \Delta t). \end{cases}$$

Cet opérateur dépend d'un champ E que l'on se donne.

Les analogues discrets de ces opérateurs sont

$$S_h(\Delta t) : \mathbb{R}^P \times \mathbb{R}^{2Q+1} \rightarrow \mathbb{R}^P \times \mathbb{R}^{2Q+1}$$

qui correspond au schéma numérique semi-lagrangien dans les directions horizontales de type espace (avec une vitesse différente sur chaque ligne), et

$$T_{E^n, h}(\Delta t) : \mathbb{R}^P \times \mathbb{R}^{2Q+1} \rightarrow \mathbb{R}^P \times \mathbb{R}^{2Q+1}$$

qui correspond au schéma numérique semi-lagrangien dans les directions verticales de type vitesse (avec une "vitesse" d'advection $-E_i^n$ différente sur chaque colonne).

A noter qu'en norme surbordonnée à la norme discrète l^∞

$$\|S_h(\Delta t)\|_\infty \leq 1 \text{ et } \|T_{E^n, h}(\Delta t)\|_\infty \leq 1, \quad \forall \Delta t > 0. \quad (4.6)$$

C'est une propriété fondamentale des schémas semi-lagrangiens.

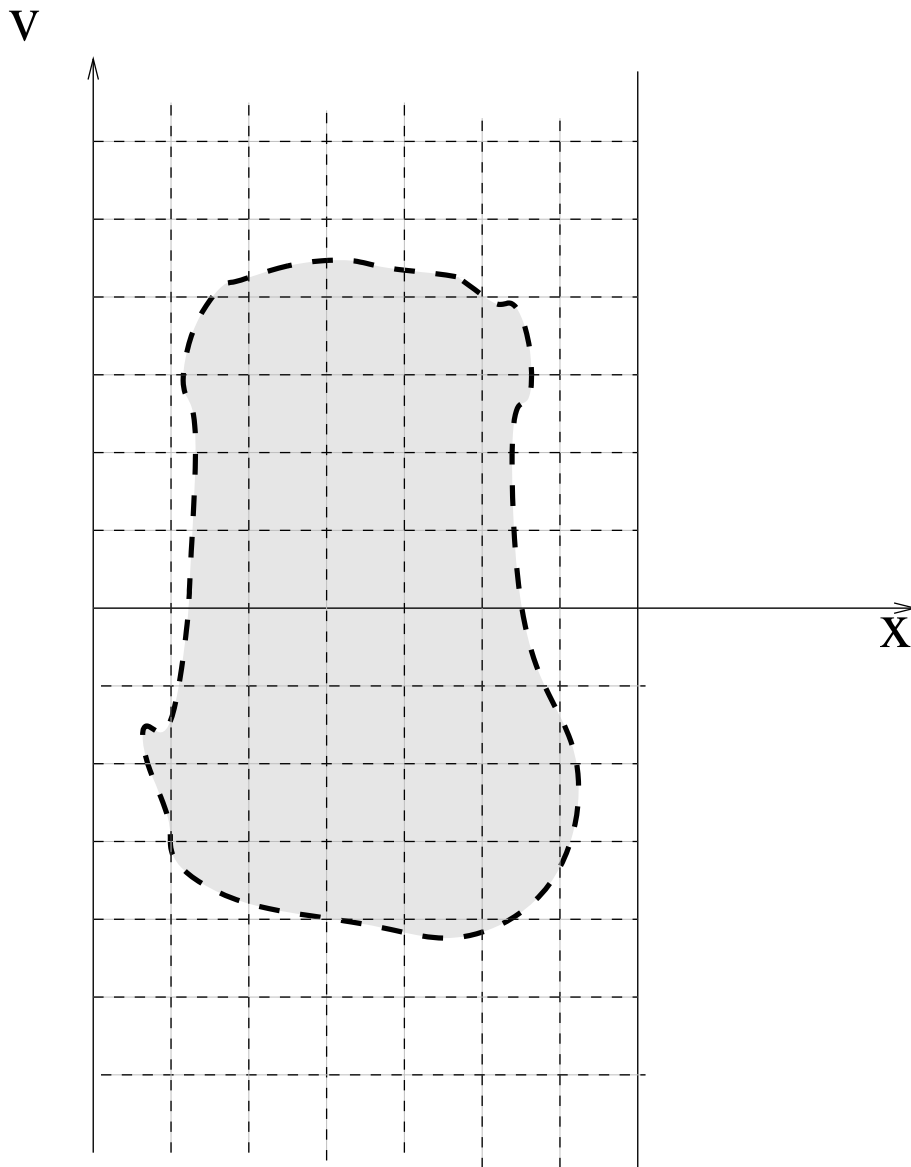


FIGURE 4.2 – Maillage Différences Finies en espace-vitesse et support de la donnée initiale. On notera le support compact en vitesse. En espace, on a des conditions de périodicité au bord de $I =]0, 1[$.

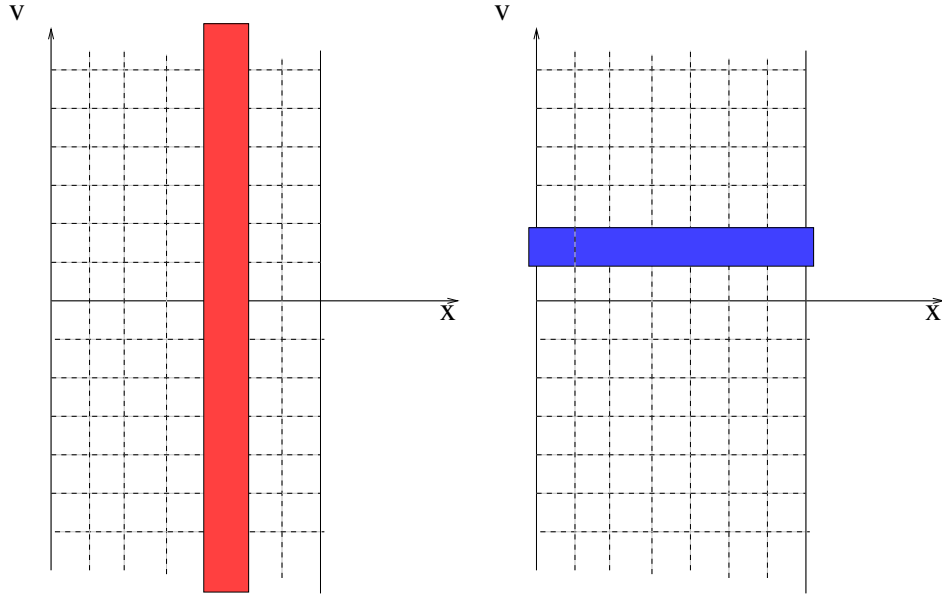


FIGURE 4.3 – Résolution par schéma semi-lagrangien, d’abord dans la direction v en bleu, puis dans la direction x en rouge.

Définition de l’algorithme semi-lagrangien

On considère l’algorithme suivant

- Initialisation : on prend

$$f_{i,j}^0 = f_0(x_j, v_j). \quad (4.7)$$

- Itération sur l’indice de temps k : celle-ci correspond à une utilisation de la formule des caractéristiques une fois dans la direction v puis une fois dans la direction x . Cela est détaillée à la figure 4.3. La formule qui résume cet algorithme est

$$f^{n+1} = S_h(\Delta t) T_{E^n, h}(\Delta t) f^n \quad (4.8)$$

où

- le champ est $E^n = A_h f^n$,
- l’opérateur d’advection semi-lagrangien dans la direction v et pour le champ E^n est $T_{E^n, h}(\Delta t)$,
- l’opérateur d’advection semi-lagrangien dans la direction x est $S_h(\Delta t)$.

Exercice 32. *Que se passe-t-il si on prend l’initialisation en valeur moyenne*

$$f_{i,j}^0 = \frac{1}{\Delta x \Delta v} \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} \int_{v_{j-\frac{1}{2}}}^{v_{j+\frac{1}{2}}} f_0(x, v) dx dv$$

à la place de (4.7) ?

Étude de convergence

Théorème 33. *Pour une solution exacte bornée, régulière et à support compact en vitesse, on a l'estimation d'erreur à l'ordre 1*

$$\|R_h f(n\Delta t) - f^n\|_{l^\infty} \leq C \left(\Delta t + h + \min \left(w, \frac{\Delta x}{\Delta t} \right) \Delta x \right), \quad n\Delta t \leq T,$$

où $w > 0$ est un majorant du support en vitesse, et $\Delta x = \Delta v$ pour simplifier.

Démonstration. La preuve s'appuie sur la décomposition télescopique

$$\begin{aligned} & R_h f((n+1)\Delta t) - f^{n+1} \\ = & R_h f((n+1)\Delta t) - S_h(\Delta t) T_{E^n, h}(\Delta t) f^n \\ = & R_h \left[f((n+1)\Delta t) - \tilde{S}_h(\Delta t) \tilde{T}_{E(n\Delta t), h}(\Delta t) f(n\Delta t) \right] \\ + & \left(R_h \tilde{S}_h(\Delta t) - S_h(\Delta t) R_h \right) \tilde{T}_{E(n\Delta t), h}(\Delta t) f(n\Delta t) \\ + & S_h(\Delta t) \left(R_h \tilde{T}_{E(n\Delta t), h}(\Delta t) - T_{R_h E(n\Delta t), h}(\Delta t) R_h \right) f(n\Delta t) \\ + & S_h(\Delta t) \left(T_{R_h E(n\Delta t), h}(\Delta t) - T_{E^n, h}(\Delta t) \right) R_h f(n\Delta t) \\ + & S_h(\Delta t) T_{E^n, h}(\Delta t) (R_h f(n\Delta t) - f^n) \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \\ \\ = \alpha \\ = \beta \\ = \gamma \\ = \delta \\ = \epsilon. \end{array}$$

On a directement grâce à (4.6)

$$|\epsilon|_{l^\infty} \leq \|R_h f(n\Delta t) - f^n\|_{l^\infty}.$$

Par ailleurs

$$|\beta|_{l^\infty} \leq C \min(w\Delta t, \Delta x) \Delta x$$

par application immédiate de l'estimation d'interpolation (4.3) ligne par ligne. Ici w est un majorant des vitesses (car f est à support compact en vitesse). Le terme γ se traite de la même manière, car le champ E^n est borné grâce aux diverses estimations discrètes (par la même constante w , quitte à la redéfinir).
Donc

$$|\gamma|_{l^\infty} \leq C \min(w\Delta t, \Delta x) \Delta x.$$

Les termes résiduels nécessitent plus de travail.

Commençons par α . Ce terme correspond en fait à la comparaison de deux calculs exacts par la méthode des caractéristiques. Le premier $f((n+1)\Delta t)$ se détermine à partir de $f(n\Delta t)$ en suivant les caractéristiques exactes (courbe rouge sur la figure 4.4). Le deuxième terme $\tilde{S}_h(\Delta t) \tilde{T}_{E(n\Delta t), h}(\Delta t) f(n\Delta t)$ se détermine par deux applications de la méthode des caractéristiques : la première correspond à l'application de l'opérateur $\tilde{T}_{E(n\Delta t), h}(\Delta t)$ sur un pas de temps Δt , ce qui revient à déplacer les points dans la direction verticale sur la graphique ; la deuxième correspond à l'application de l'opérateur $\tilde{S}_h(\Delta t)$ sur le pas de temps, ce qui revient à déplacer les points dans la direction horizontale sur la graphique. Aussi nous devons comparer les positions de $(x(0), v(0))$ défini par

$$\begin{cases} x'(t) = v(t), \\ v'(t) = -E(t, x(s)), \\ x(\Delta t) = X, \\ v(\Delta t) = V, \end{cases}$$

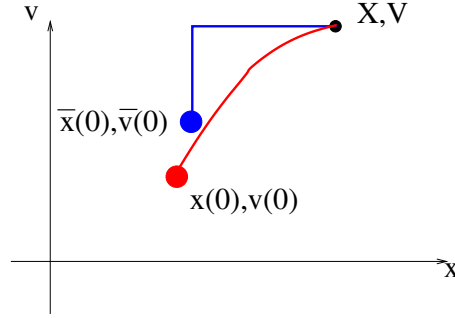


FIGURE 4.4 – Résolution sur un intervalle de temps $[0, \Delta t]$: en suivant les caractéristiques exactes en rouge ; en bleu par la méthode de splitting.

avec $y(0), w(0)$ défini par

$$\begin{cases} \bar{y}'(t) = \bar{w}(t), \\ \bar{w}'(t) = 0, \\ \bar{y}(\Delta t) = X, \\ \bar{w}(\Delta t) = V, \end{cases} \quad \text{puis} \quad \begin{cases} y'(t) =, \\ w'(t) = -E(t, y(t)), \\ y(\Delta t) = \bar{y}(0), \\ w(\Delta t) = \bar{w}(0). \end{cases}$$

Il s'agit d'une intégration en temps rétrograde. La solution du deuxième système est

$$y(0) = X - \Delta t W, \quad w(0) = W + \Delta t E(n\Delta t, X - \Delta t W).$$

Pour un champ électrique suffisamment régulier (ce qui est le cas), on a

$$|x(0) - y(0)| + |v(0) - w(0)| \leq C\Delta t^2. \quad (4.9)$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} & \left[f((n+1)\Delta t) - \tilde{S}_h(\Delta t) \tilde{T}_{E(n\Delta t), h}(\Delta t) f(n\Delta t) \right] (X, V) \\ &= f(n\Delta t)(x(0), v(0)) - f(n\Delta t)(y(0), v(0)). \end{aligned}$$

Pour une fonction f suffisamment régulière (ce qui est le cas) alors

$$\left\| f((n+1)\Delta t) - \tilde{S}_h(\Delta t) \tilde{T}_{E(n\Delta t), h}(\Delta t) f(n\Delta t) \right\|_{L^\infty} \leq C\Delta t^2.$$

Donc $|\alpha|_{l^\infty} \leq C\Delta t^2$.

Il reste δ qui correspond à la différence entre le résultat d'un schéma semi-lagrangien avec une "vitesse" $R_h E(n\Delta t)$ et un schéma semi-lagrangien avec une "vitesse" E^n . Pour un point donné en espace vitesse, il s'agit donc de comparer

$$\begin{aligned} \bar{f}_{ij} &= (1 - \beta_i^n) g_{i, j - p_i^n} + \beta_i^n g_{i, j - p_i^n - 1}, \\ p_i^n &= \left\lceil \frac{E(n\Delta t, i\Delta x)\Delta t}{\Delta v} \right\rceil \quad \text{et} \quad \beta_i^n = \frac{E(n\Delta t, i\Delta x)\Delta t}{\Delta v} - p_i^n \end{aligned}$$

et

$$\widehat{f}_{ij} = (1 - \gamma_i^n)g_{i,j-q_i^n} + \gamma_i^n g_{i,j-q_i^n-1}, \quad q_i^n = \left\lceil \frac{E_i^n \Delta t}{\Delta v} \right\rceil \text{ et } \gamma_i^n = \frac{E_i^n \Delta t}{\Delta v} - q_i^n.$$

Il faut faire attention au fait que $(n\Delta t, i\Delta x)$ est la valeur aux points de grille du champ exact, alors que E_i^n est la valeur discrète calculée par le schéma numérique. De même g_i^n désigne pour tout i, n l'interpolé sur la grille de la solution exacte : $g = R_h f(n\Delta t)$. On a alors

$$\begin{aligned} \bar{f}_{ij} - \widehat{f}_{ij} &= [(1 - \beta_i^n)g_{i,j-p_i^n} + \beta_i^n g_{i,j-p_i^n-1} - f(n\Delta t, x_i, v_i - \Delta t E(n\Delta t, i\Delta x))] \\ &\quad - [(1 - \gamma_i^n)g_{i,j-q_i^n} + \gamma_i^n g_{i,j-q_i^n-1} - f(n\Delta t, x_i, v_i - \Delta t E_i^n)] \\ &\quad + [f(n\Delta t, x_i, v_i - \Delta t E(n\Delta t, i\Delta x)) - f(n\Delta t, x_i, v_i - \Delta t E_i^n)]. \end{aligned}$$

Le premier terme entre crochets est une erreur d'interpolation pour laquelle (4.3) s'applique avec une constante \tilde{E} qui est un majorant du champ électrique : comme précédemment on peut montrer que $\tilde{E} \leq Cw$ où w est un majorant du support en vitesse. Au final ce terme est majoré en $C \min(w\Delta t, \Delta x)\Delta x$.

Pour les mêmes raisons le deuxième terme entre crochets est majoré en $C \min(w\Delta t, \Delta x)\Delta x$. Et finalement le dernier terme entre crochets se majore par

$$|f(n\Delta t, x_i, v_i - \Delta t E(n\Delta t, i\Delta x)) - f(n\Delta t, x_i, v_i - \Delta t E_i^n)| \leq C\Delta t |E(n\Delta t, i\Delta x) - E_i^n|$$

pour lequel (4.5) s'applique. Donc

$$\left| \bar{f}_{ij} - \widehat{f}_{ij} \right| \leq C \min(w\Delta t, \Delta x)\Delta x + C\Delta t (\Delta x + |R_h f(n\Delta t) - f^n|_{l^\infty}).$$

On retiendra que

$$|\delta|_{l^\infty} \leq C \min(w\Delta t, \Delta x)\Delta x + C\Delta t (\Delta x + |R_h f(n\Delta t) - f^n|_{l^\infty}).$$

En sommant les majorations de ces cinq termes, on obtient

$$\begin{aligned} &|R_h f((n+1)\Delta t) - f^{n+1}|_{l^\infty} \\ &\leq C\Delta t^2 + C \min(w\Delta t, \Delta x)\Delta x + C\Delta t\Delta x + (1 + C\Delta t) |R_h f(n\Delta t) - f^n|_{l^\infty} \\ &\leq C [\Delta t^2 + \min(w\Delta t, \Delta x)\Delta x + \Delta t\Delta x] + e^{C\Delta t} |R_h f(n\Delta t) - f^n|_{l^\infty}. \end{aligned}$$

pour une constante $C > 0$ suffisamment grande, mais bornée. C'est de la forme

$$a_n \leq b + e^{c\Delta t} a_{n-1}$$

avec

$$b = C [\Delta t^2 + \min(w\Delta t, \Delta x)\Delta x + \Delta t\Delta x].$$

En itérant cette formule ($a_0 = 0$), on obtient

$$a_n \leq b \sum_{p=0}^{n-1} e^{n-1-pc\Delta t} + e^{cn\Delta t} a_0 = b \frac{e^{cn\Delta t} - 1}{e^{c\Delta t} - 1} \leq \frac{b}{e^{c\Delta t} - 1} e^{cT} \leq \frac{b}{c\Delta t} e^{cT}.$$

La simplification par Δt autorisée par l'expression fournit le résultat final. \square

Remarque 34. *Indépendamment de la technicité de la preuve, on retiendra que l'erreur se décompose en contributions de 3 types : α est une erreur de splitting d'opérateur ; β et γ sont des erreurs d'interpolation dans chaque direction ; enfin δ est l'erreur d'approximation du champ électrique.*

Exercice 35. *Détailler la preuve de (4.9) à partir du théorème de Cauchy-Lipshitz.*

4.2.1 Extension à l'ordre deux en temps

En pratique les algorithmes sont plus élaborés que celui présenté. En particulier on utilise systématiquement le splitting de Strang, ce qui revient à remplacer (4.8) par

$$f^{n+1} = S_h(\frac{1}{2}\Delta t)T_{E^{n+\frac{1}{2},h}}(\Delta t)S_h(\frac{1}{2}\Delta t)f^n$$

et

$$E^{n+\frac{1}{2}} = A_h f^{n+\frac{1}{2}}, \quad f^{n+\frac{1}{2}} = S_h(\frac{1}{2}\Delta t)f^n.$$

Chapitre 5

Systeme magnétohydrodynamique

Un modèle de type fluide existe pour le couplage d'un fluide ionisé électriquement neutre avec un champ magnétique. Ce système est central car plus simple à résoudre numériquement que les systèmes de type Vlasov-Poisson ou Vlasov-Maxwell. Nous allons dériver le modèle à partir de considérations physiques habituelles pour ce genre de questions. Présentées telles quelles, ces considérations ne sont pas complètement exemptes de contradictions logiques, comme souvent en modélisation.

5.1 Dérivation du modèle de la MHD idéale

Par dérivation, on entend également modélisation car des approximations seront faites.

Nous partons d'un plasma constitué d'électrons et d'une seule espèce d'ions positifs pour simplifier. Les équations fluides (2.1) sont, pour les ions

$$\begin{cases} \partial_t m_i n_i + \nabla \cdot (m_i n_i u_i) = 0, \\ \partial_t (m_i n_i u_i) + \nabla \cdot (m_i n_i u_i \otimes u_i) + \nabla p_i = q (n_i E + n_i u_i \wedge B), \\ \partial_t (m_i n_i e_i) + \nabla \cdot (m_i n_i u_i e_i + p_i u_i) = q n_i u_i E. \end{cases}$$

et pour les électrons

$$\begin{cases} \partial_t m_e n_e + \nabla \cdot (m_e n_e u_e) = 0, \\ \partial_t (m_e n_e u_e) + \nabla \cdot (m_e n_e u_e \otimes u_e) + \nabla p_e = -q (n_e E + n_e u_e \wedge B), \\ \partial_t (m_e n_e e_e) + \nabla \cdot (m_e n_e u_e e_e + p_e u_e) = -q n_e u_e E. \end{cases}$$

Ici $q > 0$ est la charge de l'ion, la charge de l'électron.

Un point essentiel est que $m_e \ll m_i$, car le rapport entre la masse du proton et celle de l'électron est de l'ordre de 2000. On posera

$$\alpha = \frac{m_e n_e}{m_i n_i + m_e n_e} \ll 1.$$

Il s'ensuit que la vitesse du centre de masse est au premier ordre égale à celle des ions. On posera

$$u = \frac{m_i n_i u_i + m_e n_e u_e}{m_i n_i + m_e n_e} \approx u_i.$$

De même la densité de masse est au premier ordre égale à celle des ions. On posera

$$\rho = m_i n_i + m_e n_e \approx m_i n_i.$$

Exercice 36. *Montrer la relation*

$$\begin{aligned} m_i n_i u_i \otimes u_i + m_e n_e u_e \otimes u_e &= \rho u \otimes u \\ + \alpha \frac{(m_i n_i)^2}{m_i n_i + m_e n_e} (u_i - u_e) \otimes (u_i - u_e) &+ \alpha^2 m_i n_i (u_i - u_e) \otimes (u_i - u_e). \end{aligned}$$

Utiliser cette relation pour justifier certaines simplifications faites dans (5.4).

En sommant les premières équations de chacun des systèmes, on obtient

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho u) = 0. \quad (5.1)$$

Les deux équations de moment inertiel apparaissent de nature différentes car $m_e \ll m_i$. En considérant que les autres termes sont du même ordre entre ion et électron, on simplifie l'équation de moment des électrons qui apparait comme une équation d'équilibre

$$\nabla p_e \approx -q n_e (E + u_e \wedge B) \iff E = -u_e \wedge B - \frac{\nabla p_e}{q n_e}.$$

En supposant que le terme en gradient est négligeable devant la partie magnétique, et en utilisant que $u_e \approx u$, on obtient

$$E = -u \wedge B. \quad (5.2)$$

Cette équation est absolument fondamentale, car elle permet d'éliminer le champ électrique en fonction du produit vectoriel de la vitesse moyenne et champ magnétique. A partir de l'énergie associée à un champ électromagnétique et de la relation $\varepsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$, on trouve

$$\mathcal{E} = \frac{\varepsilon_0 |E|^2}{2} + \frac{\mu_0 |B|^2}{2} = \frac{\mu_0 |u \wedge B|^2}{2c^2} + \frac{\mu_0 |B|^2}{2} = \frac{\mu_0}{2} \left(\left| \frac{u}{c} \wedge B \right|^2 + |B|^2 \right).$$

Pour un fluide non relativiste

$$\beta = \frac{|u|}{c} \ll 1.$$

Il s'ensuit que l'énergie électrique est négligeable par rapport à l'énergie magnétique. C'est pour cela que toutes les quantités électriques disparaissent in fine dans un modèle de magnétohydrodynamique usuel.

Par exemple l'équation de Gauss

$$\nabla \cdot E = q \frac{n_i - n_e}{\varepsilon_0}$$

assortie de (5.2) implique

$$-\frac{1}{c^2} \nabla \cdot (u \wedge B) = q \frac{n_i - n_e}{\mu_0}.$$

Le membre de gauche étant (très) petit, il s'ensuit que

$$n_i = n_e \text{ au premier ordre.} \quad (5.3)$$

En sommant à présent les deux équations de moment inertielle on trouve après approximation et simplification à gauche du signe d'égalité

$$\partial_t(\rho u) + \nabla \cdot (\rho u \otimes u) + \nabla p = q(n_i u_i - n_e u_e) \wedge B, \quad p = p_i + p_e. \quad (5.4)$$

En sommant les deux équations d'énergie on trouve après approximation et simplification à gauche du signe d'égalité

$$\partial_t(\rho e) + \nabla \cdot (\rho u e + p u) = -q(n_i u_i - n_e u_e) \cdot u \wedge B, \quad e = \varepsilon + \frac{1}{2}|u|^2, \quad \varepsilon = \varepsilon_i + \varepsilon_e. \quad (5.5)$$

Il apparait que si on trouve une formule pour représenter $n_i u_i - n_e u_e$ en fonction des variables globales (ρ, u, e, B) , alors cela clôt le système. Or l'équation d'Ampère se réécrit

$$0 = -\frac{1}{c^2} \partial_t E + \nabla \wedge B - \mu_0 J \approx \frac{1}{c^2} \partial_t (u \wedge B) + \nabla \wedge B - \mu_0 q(n_i u_i - n_e u_e).$$

Il est légitime de négliger le premier terme car $|u| \ll c$. On obtient

$$q(n_i u_i - n_e u_e) = \frac{1}{\mu_0} \nabla \wedge B. \quad (5.6)$$

Reportant dans (5.4), on obtient

$$\partial_t(\rho u) + \nabla \cdot (\rho u \otimes u) + \nabla p = \frac{1}{\mu_0} (\nabla \wedge B) \wedge B. \quad (5.7)$$

Puis dans (5.5) on obtient

$$\partial_t(\rho e) + \nabla \cdot (\rho u e + p u) = -\frac{1}{\mu_0} \nabla \wedge B \cdot (u \wedge B). \quad (5.8)$$

L'équation d'évolution du champ magnétique se déduit aisément de (5.2)

$$\partial_t B = \nabla \wedge (u \wedge B). \quad (5.9)$$

A la suite des ces approximations, nous avons construit le système de la magnétohydrodynamique idéale, constitué de (5.1)-(5.7)-(5.9)- (5.8). Il faut adjoindre la condition de divergence nulle du champ magnétique

$$\nabla \cdot B = 0. \quad (5.10)$$

Proposition 37. *Le système de la magnétohydrodynamique idéale (5.1)-(5.7)-(5.9)-(5.8)-(5.10) peut se mettre sous la forme du système de lois de conservation*

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho u) = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \nabla \cdot (\rho u \otimes u) + \nabla p + \nabla \cdot \left(\frac{|B|^2}{2\mu_0} I_d - \frac{B \otimes B}{\mu_0} \right) = 0, \\ \partial_t B - \nabla \wedge (u \wedge B) = 0, \\ \partial_t(\rho e) + \nabla \cdot \left(\rho u e + p u + \frac{(u \wedge B) \wedge B}{\mu_0} \right) = 0. \end{cases} \quad (5.11)$$

Démonstration. Tout d'abord la condition de divergence nulle (5.10) est préservée par (5.9). On dit que la condition de divergence nulle est une **contrainte involutive**. Les autres formules se déduisent en tenant des formules de calcul différentiel pour les tenseurs, comme signalé en appendice. \square

Ce système est fermé pour une pression de gaz parfait de la forme

$$p = (\gamma - 1) \left(\rho e - \rho \frac{|u|^2}{2} \right).$$

Une telle forme pour la loi de pression se justifie sans trop de peine en considérant que les températures ionique T_i et électronique T_e sont égales : $T_i = T_e$. pour un gaz composé de particules monoatomiques, la loi de pression précédente est justifiée avec $\gamma = \frac{5}{3}$.

Des modèles avec des températures différentes $T_i \neq T_e$ existent.

5.2 Cas monodimensionnel

On étudie la situation plus simple invariante dans les directions y et z

$$\partial_y = \partial_z = 0.$$

Cependant le champ de vitesse est toujours tri-dimensionnel, noté à présent $\vec{u} = (u, v, w)$. Notons $B = (B_x, B_y, B_z)$ le champ magnétique. La condition de divergence nulle implique $\partial_x B_x = 0$. Par ailleurs $\partial_t B_x = \partial_y(\dots) - \partial_z(\dots) = 0$. Donc B_x est une constante en temps et en espace. C'est à présent un coefficient.

Proposition 38. *Sous ces hypothèses, le système (5.11) se simplifie sous la forme*

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho u) = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \partial_x \left(\rho u^2 + p + \frac{-B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}{2\mu_0} \right) = 0, \\ \partial_t(\rho v) + \partial_x \left(\rho u v + \frac{B_x B_y}{\mu_0} \right) = 0, \\ \partial_t(\rho w) + \partial_x \left(\rho u w + \frac{B_x B_z}{\mu_0} \right) = 0, \\ \partial_t B_y + \partial_x(u B_y - v B_x) = 0, \\ \partial_t B_z + \partial_x(u B_z - w B_x) = 0, \\ \partial_t(\rho e) + \partial_x \left(\rho u e + p u + \frac{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}{2\mu_0} u - \frac{B_x(B_y v + B_z w)}{\mu_0} \right) = 0. \end{cases} \quad (5.12)$$

Un résultat classique est le suivant [7].

Théorème 39. *Le système de lois de conservation (5.12) est hyperbolique. Les vitesses d'ondes de la matrice Jacobienne du flux sont*

$$-c_f + u \leq -c_a + u \leq -c_s + u \leq u \leq c_s + u \leq c_a + u \leq c_f + u$$

où les vitesses lentes (*slow*), d'Alfven et rapides (*fast*) sont

$$c_s^2 = \frac{1}{2} \left(a_*^2 - \sqrt{a_*^4 - 4a^2 \frac{B_x^2}{\mu_0 \rho}} \right) \leq c_a^2 = \frac{B_x^2}{\mu_0 \rho} \leq c_f^2 = \frac{1}{2} \left(a_*^2 + \sqrt{a_*^4 - 4a^2 \frac{B_x^2}{\mu_0 \rho}} \right)$$

sachant que

$$a^2 = \frac{\gamma p}{\rho} \text{ et } a_*^2 = a^2 + \frac{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}{\mu_0 \rho}.$$

Chapitre 6

Équilibres magnétiques

Nous étudions dans ce chapitre les équations d'équilibres magnétiques, en allant jusqu'à l'équation de Grad-Shafranov.

Ces équations sont obtenues en égalant les forces dans l'équation d'impulsion de (5.11). On trouve l'équation stationnaire

$$\begin{cases} \nabla p = \frac{1}{\mu_0} (\nabla \wedge B) \wedge B, \\ \nabla \cdot B = 0. \end{cases} \quad (6.1)$$

Les solutions non triviales ($\nabla p \neq 0$) de ces équations fournissent des conditions qui permettent un confinement d'un plasma donné. Le courant électrique est $J = \mu_0 \nabla \wedge B$.

6.1 Etude dans \mathbb{R}^3

On s'intéresse aux solutions telles que $p \geq 0$ et

$$p \rightarrow 0 \text{ à l'infini } |x| \rightarrow \infty.$$

Pour simplifier on pourra supposer que p est à support compact, noté Ω . L'équation (6.1) est également valable à l'extérieur du support de p : il suffit de considérer que $\nabla \wedge B = \frac{1}{\mu_0} J = 0$. Notons que (6.1) admet au moins la solution triviale $p \equiv 0$ et $B \equiv 0$.

D'autres solutions, si elles existaient, pourraient se traduire comme prouvant l'existence de configurations d'équilibres dans lesquelles le champ magnétique d'une étoile par exemple serait susceptible de confiner la matière de l'étoile en question. On pourrait alors imaginer des dispositifs de confinement en laboratoire qui s'appuieraient sur ce principe. Cependant

Proposition 40 (Inspiré de [4]). *Il n'y a pas d'équilibre magnétique non trivial dans \mathbb{R}^3 .*

Démonstration. La preuve se déroule en deux temps.

Connaissance de B à l'infini. Nous allons déterminer une représentation intégrale de B en fonction du courant électrique J que nous considérons comme donné (et à divergence nulle). Comme $\nabla \cdot B = 0$, il est possible de chercher B sous la forme : $B = \nabla \wedge A$, où $A \in \mathbb{R}^3$ est le potentiel vecteur qui est défini à un gradient près. Ce potentiel devra satisfaire des conditions minimales de décroissance à l'infini.

Comme $\nabla \wedge B = \mu_0 J$, on a

$$\nabla \wedge (\nabla \wedge A) = \mu_0 J.$$

Or $\nabla \wedge \nabla A = -\Delta A + \nabla(\nabla \cdot A)$. Nous décidons d'une condition, dite **de jauge** : $\nabla \cdot A = 0$. D'où l'équation

$$-\Delta A = \mu_0 J.$$

On note que $-\Delta(\nabla \cdot A) = 0$, ce qui implique que $\nabla \cdot A = 0$. La solution du problème de Poisson est

$$A(x) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{J(y)}{|x-y|} dy.$$

En calculant le rotationnel, on obtient

$$B(x) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{J(y) \wedge (x-y)}{|x-y|^3} dy.$$

Supposons pour simplifier que J est de carré intégrable. Alors

$$|B(x)| \leq \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\int_{\Omega} J(y)^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} \frac{dy}{|x-y|^4} \right)^{\frac{1}{2}}$$

par inégalité de Cauchy-Schwarz. Donc $\exists C > 0$ tel que

$$|B(x)| \leq \frac{C}{|x|^2}. \quad (6.2)$$

Formule du Viriel On commence par récrire l'équation d'équilibre sous la forme

$$\nabla \cdot M = 0 \text{ avec } M = pI + \frac{|B|^2}{2\mu_0} I - \frac{B \otimes B}{\mu_0} = M^t.$$

On a

$$\nabla \cdot (Mx) = M : \nabla x = M : I = \text{tr}(M).$$

Donc

$$\int_{B(0,R)} \nabla \cdot (Mx) dx = \int_{B(0,R)} \text{tr}(M) dx = \int_{B(0,R)} \left(3p + \frac{|B|^2}{2\mu_0} \right) dx,$$

mais aussi par la formule de Stokes

$$\int_{B(0,R)} \nabla \cdot (Mx) dx = \int_{|x|=R} (Mx, n) d\sigma.$$

Pour R assez grand on a $\Omega \subset B(0, R)$. Donc

$$\int_{|x|=R} (Mx, n) d\sigma = \int_{|x|=R} \left(\left(\frac{|B|^2}{2\mu_0} I - \frac{B \otimes B}{\mu_0} \right) x, n \right) d\sigma.$$

Comme l'aire de la surface de $\{|x| = R\}$ est égale à $4\pi R^2$, on trouve que

$$\left| \int_{|x|=R} (Mx, n) d\sigma \right| \leq \frac{CR^3}{R^4} \rightarrow_{R \rightarrow \infty} 0.$$

En faisant tendre R vers l'infini on obtient donc

$$\int_{\mathbb{R}^3} \left(3p + \frac{|B|^2}{2\mu_0} \right) dx = 0$$

ce qui montre que $p \equiv 0$ et $B \equiv 0$ car $p \geq 0$. C'est l'équilibre trivial.

La preuve est terminée. \square

Exercice 41. Montrer que si $\int J(y) dy = 0$ alors (6.2) peut être amélioré en

$$|B(x)| \leq \frac{C}{|x|^3}.$$

6.2 Confinement

Comme il n'est pas possible de trouver d'équilibre magnétique en configuration ouverte avec des conditions de décroissance standard à l'infini, il est nécessaire de considérer des configurations fermées (ou bornées) pour réussir à confiner un plasma à l'aide d'un champ magnétique. Le confinement doit avoir lieu au moins dans une direction, les autres directions pouvant être non bornées.

Nous considérons le cas cylindrique (une direction non bornée) qui permet de simplifier les notations tout en préservant les propriétés les plus importantes, puis le cas du tore qui revient d'une certaine manière à refermer le cylindre sur lui-même.

6.2.1 Cas cylindrique

Soit le cylindre infini dans la direction verticale

$$\mathcal{C} = \Omega \times \mathbb{R}$$

avec $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert borné. Soit un champ magnétique de la forme

$$B(x, y) = F(x, y)\mathbf{e}_z + \nabla\psi(x, y) \wedge \mathbf{e}_z, \quad \mathbf{e}_z = (0, 0, 1),$$

ou sous forme développée

$$B = (\partial_y\psi, -\partial_x\psi, F).$$

Nous cherchons la pression sous la forme

$$p = p(x, y).$$

Proposition 42. *Supposons qu'il existe deux fonctions suffisamment régulières $\bar{p} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $\bar{F} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que*

$$p = \bar{p}(\psi) \text{ et } F = \bar{F}(\psi).$$

Supposons de plus que ψ vérifie l'équation

$$\Delta\psi = -\mu_0\bar{p}'(\psi) - \bar{F}(\psi)\bar{F}'(\psi), \quad x \in \Omega. \quad (6.3)$$

Alors l'équilibre magnétique (6.1) est vérifié.

Démonstration. L'équation (6.1) devient

$$\frac{1}{\mu_0} \begin{vmatrix} \partial_y F \\ -\partial_x F \\ -\Delta\psi \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} \partial_y \psi \\ -\partial_x \psi \\ F \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -F\partial_x F - \partial_x \psi \Delta\psi \\ -F\partial_x F - \partial_x \psi \Delta\psi \\ -\partial_y F \partial_x \psi + \partial_x F \partial_y \psi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \partial_x p \\ \partial_y p \\ 0 \end{vmatrix}.$$

Comme $F = \bar{F}(\psi)$ la dernière équation est trivialement vérifiée. Les deux premières équations prennent la forme

$$\mu_0\bar{p}'(\psi)\nabla\psi = -\bar{F}\bar{F}'(\psi)\nabla\psi - \Delta\psi\nabla\psi$$

ou encore

$$\left(\bar{p}'(\psi) + \bar{F}\bar{F}'(\psi) + \Delta\psi\right)\nabla\psi = 0$$

qui est également vérifiée grâce à l'équation (6.3). \square

Cas particulier

À présent nous étudions une solution dans un cas particulier. Cette solution présente l'avantage qu'elle est représentative de la structure hélicoïdale de champs magnétiques caractéristiques dans les Tokamaks.

Nous considérons un champ magnétique principal ou "porteur" $(0, 0, F)$ avec $F \neq 0$ constant. Nous considérons que le champ $(\partial_y\psi, -\partial_x\psi, 0)$ est une perturbation. Par ailleurs nous décidons d'une fonction \bar{p} simple et linéaire sous la forme

$$\bar{p}(\psi) = p_b + \frac{\alpha}{\mu_0}\psi.$$

Ici α est un coefficient arbitraire. Nous considérons une condition au bord de Dirichlet homogène. La pression au bord est égale à p_b .

Aussi (6.3) devient

$$\begin{cases} -\Delta\psi = \frac{\alpha}{\mu_0}, & x \in \Omega, \\ \psi = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (6.4)$$

Théorème 43. *Il existe une unique solution variationnelle $\psi \in H_0^1(\Omega)$ de (6.4).*

Démonstration. C'est une application bien connue du théorème de Lax-Milgram. \square

Théorème 44. *Le signe de ψ est celui de α .*

Démonstration. C'est une conséquence du principe du maximum faible. Voir cours NM409, *Equations elliptiques* de F. Bethuel dans le cadre du M2 ANEDP. \square

En conséquence

$$p > p_b \text{ pour } x \in \Omega.$$

Énoncé autrement, **le plasma est confiné** à l'intérieur de Ω .

Considérons une section Ω circulaire

$$\Omega = \{x^2 + y^2 < 1\}. \quad (6.5)$$

Proposition 45. *Pour le domaine circulaire (6.5) la solution analytique de (6.4) est*

$$\psi = \frac{\alpha}{4\mu_0}(x^2 + y^2). \quad (6.6)$$

Démonstration. Évident. \square

Il s'ensuit que

$$p = p_b + \frac{\alpha^2}{4\mu_0}(x^2 + y^2)$$

et aussi que

$$B = \frac{\alpha}{2\mu_0}(y, -x, 0) + (0, 0, F).$$

Pour $F \neq 0$, le champ magnétique présente une structure **hélicoidale**.

Cas général

Le cas général se traite en remarquant que (6.3) se réécrit sous la forme (on prendra systématiquement une condition de Dirichlet homogène)

$$\begin{cases} -\Delta\psi = q'(\psi), & x \in \Omega, \\ \psi = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (6.7)$$

où la fonction q est définie par

$$q(\psi) = \mu_0 p(\psi) + \frac{F(\psi)^2}{2}. \quad (6.8)$$

Soit la fonctionnelle

$$J(\psi) = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} |\nabla\psi|^2 - q(\psi) \right) dx. \quad (6.9)$$

Nous allons montrer que si cette fonctionnelle possède un minimum global, alors ce minimum est solution de (6.7). Cela fournira par ailleurs un moyen pour

montrer l'existence et l'unicité du minimum. Supposons en effet qu'une certaine fonction $\psi \in H_0^1(\Omega)$ est telle que

$$J(\psi) \leq J(\psi + t\phi), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall \phi \in H_0^1(\Omega).$$

Donc la fonction

$$t \mapsto f_\phi(t) = J(\psi + t\phi)$$

atteint son minimum en $t = 0$. Sous des conditions usuelles de dérivabilité, on écrira que $f'_\phi(0) = 0$, soit

$$\int_{\Omega} (\nabla\psi \cdot \nabla\phi - q'(\psi)\phi) dx = 0.$$

Pour peu que $\psi \in H^2(\Omega)$ on pourra écrire après intégration par parties

$$\int_{\Omega} (-\Delta\psi - q'(\psi)) \phi dx = 0.$$

Ceci étant réalisé pour tout $\phi \in H_0^1(\Omega)$ on obtient $-\Delta\psi - q'(\psi) = 0$, ce qui montre que le minimum de J est alors la solution de (6.7).

Soit $\lambda_0 > 0$ la première valeur propre du Laplacien avec condition de Dirichlet. Supposons à présent qu'il existe deux constantes $0 < c_1$ et $c_2 < \lambda_0$ telles que pour tout $u \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} |q'(u)| \leq c_1|u|, \\ q''(u) < \frac{c_2}{2}. \end{cases} \quad (6.10)$$

Proposition 46. *Sous les conditions (6.10) la fonctionnelle J est définie continuellement de $H_0^1(\Omega)$ dans \mathbb{R} .*

Démonstration. En effet

$$\begin{aligned} |q(\psi_1) - q(\psi_2)| &= |q'(c)(\psi_1 - \psi_2)| \quad (c = \alpha\psi_1 + (1 - \alpha)\psi_2) \\ &\leq c_1|\psi_1 + \psi_2| \times |\psi_1 - \psi_2|. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} q(\psi_1) - q(\psi_2) \right| &\leq c_1 \int_{\Omega} |\psi_1 + \psi_2| \times |\psi_1 - \psi_2| \\ &\leq c_1 \|\psi_1 + \psi_2\|_{L^2(\Omega)} \times \|\psi_1 - \psi_2\|_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

ce qui montre la continuité de $L^2(\Omega)$ dans \mathbb{R} de l'application $\psi \mapsto \int_{\Omega} q(\psi)$. \square

Exercice 47. *Montrer la continuité de l'application $\psi \mapsto \int_{\Omega} |\nabla\psi|^2$ et finir la preuve de la proposition.*

Proposition 48. *Sous les conditions (6.10) la fonctionnelle J est α -convexe.*

Démonstration. Le critère d' α -convexité s'écrit

$$\frac{1}{2}J(\psi_1) + \frac{1}{2}J(\psi_2) - J\left(\frac{\psi_1 + \psi_2}{2}\right) \geq \frac{\alpha}{4}\|\psi_1 - \psi_2\|_{H_0^1(\Omega)}^2$$

pour une constante $\alpha > 0$ à déterminer. On prendra la norme du gradient.

On a

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla \psi_1|^2 + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla \psi_2|^2 - \int_{\Omega} \left| \frac{\nabla \psi_1 + \nabla \psi_2}{2} \right|^2 \\ &= \frac{1}{4} \int_{\Omega} |\nabla(\psi_1 - \psi_2)|^2 = \frac{1}{4} \|\psi_1 - \psi_2\|_{H_0^1(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Par ailleurs

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\Omega} q(\psi_1) + \frac{1}{2} \int_{\Omega} q(\psi_2) - \int_{\Omega} q\left(\frac{\psi_1 + \psi_2}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[q(\psi_1) - q\left(\frac{\psi_1 + \psi_2}{2}\right) \right] + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[q(\psi_2) - q\left(\frac{\psi_1 + \psi_2}{2}\right) \right]. \end{aligned}$$

Un développement de Taylor montre que

$$q(\psi_1) - q\left(\frac{\psi_1 + \psi_2}{2}\right) = \frac{1}{2}q'\left(\frac{\psi_1 + \psi_2}{2}\right)(\psi_1 - \psi_2) + \frac{1}{8}q''(c)(\psi_1 - \psi_2)^2$$

et que

$$q(\psi_2) - q\left(\frac{\psi_1 + \psi_2}{2}\right) = \frac{1}{2}q'\left(\frac{\psi_1 + \psi_2}{2}\right)(\psi_2 - \psi_1) + \frac{1}{8}q''(d)(\psi_1 - \psi_2)^2.$$

Cela implique en utilisant la majoration (6.10) de la dérivée second de q

$$\left| \frac{1}{2} \int_{\Omega} q(\psi_1) + \frac{1}{2} \int_{\Omega} q(\psi_2) - \int_{\Omega} q\left(\frac{\psi_1 + \psi_2}{2}\right) \right| \leq \frac{c_2}{8} \|\psi_1 - \psi_2\|_{L^2(\Omega)}^2$$

Or $c_2 < \lambda_0$ et λ_0 est par hypothèse la première valeur propre (non nulle) du Laplacien

$$\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{1}{\lambda_0} \|\nabla u\|_{H^1(\Omega)}^2 = \|u\|^2, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

Donc

$$\left| \frac{1}{2} \int_{\Omega} q(\psi_1) + \frac{1}{2} \int_{\Omega} q(\psi_2) - \int_{\Omega} q\left(\frac{\psi_1 + \psi_2}{2}\right) \right| \leq \frac{c_2}{\lambda_0} \|u\|^2.$$

Donc au final

$$\frac{1}{2}J(\psi_1) + \frac{1}{2}J(\psi_2) - J\left(\frac{\psi_1 + \psi_2}{2}\right) \geq \frac{1}{8} \left(1 - \frac{c_2}{\lambda_0}\right) \|\psi_1 - \psi_2\|^2$$

ce qui montre l' α -convexité. \square

Théorème 49. *Sous les mêmes hypothèses, la fonctionnelle J admet un unique minimum $\psi \in H_0^1(\Omega)$ qui vérifie par ailleurs la formulation variationnelle*

$$\int_{\Omega} \nabla \psi \cdot \nabla \phi - q'(\psi)\phi = 0, \quad \forall \phi \in H_0^1(\Omega).$$

Démonstration. Standard pour une fonctionnelle α -convexe. \square

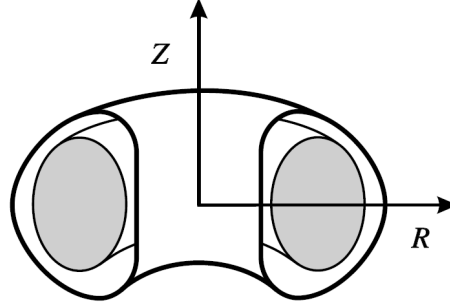


FIGURE 6.1 – Géométrie du tore

6.2.2 Cas axisymétrique

Nous généralisons le matériel précédent à la géométrie du tore qui sert à étudier les Tokamaks.

Il s'agit d'écrire les équations dans un référentiel adapté : cette difficulté essentiellement technique est résolue à l'aide d'une représentation potentielle habituelle en physique des plasmas [4].

Les coordonnées axisymétriques (R, θ, Z) sont telles que

$$x = R \cos \theta, \quad y = R \sin \theta, \quad z = Z.$$

Le tore est $\mathcal{T} = \{(R, Z) \in \Omega\} \times [0, 2\pi]_{\text{per}}$ avec Ω ouvert borné régulier de \mathbb{R}^2 éloigné de l'axe $R = 0$: il existe $0 < R_- < R_+$ tels que

$$R_1 \leq R \leq R_+ \quad \forall (R, Z) \in \Omega.$$

La courbure du tore est par définition

$$a = \frac{R_+ - R_-}{R_+ + R_-} < 1.$$

Les solutions confinées de (6.1) sont recherchées de la forme

$$B = F \nabla \theta + \nabla \psi \wedge \nabla \theta, \quad F = F(R, Z), \quad \psi = \psi(R, Z),$$

et

$$p = p(R, Z).$$

Cette représentation simplifie les calculs. Des vérifications usuelles montrent que

$$\nabla R = \mathbf{e}_R, \quad \nabla \theta = \frac{1}{R} \mathbf{e}_\theta, \quad \nabla Z = \mathbf{e}_z. \quad (6.11)$$

On notera que le trièdre $(\mathbf{e}_R, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z)$ est direct.

Exercice 50. *Montrer (6.11).*

On pourra considérer que F est une fonction donnée qui donne l'intensité du champ magnétique principal, et que ψ et p sont alors les variables d'ajustement qui vise à créer un confinement. Attention à ne pas confondre $\nabla\psi$ où ψ est une inconnue et $\nabla\theta$ où θ est une variable.

Il est utile de remarquer que B est bien à divergence nulle car : a)

$$\nabla \cdot (F\nabla\theta) = \nabla F \cdot \nabla\theta + F\Delta\theta = 0$$

parce que les deux gradients sont orthogonaux et que θ est une fonction harmonique

$$\Delta\theta = 0; \quad (6.12)$$

et b)

$$\nabla\psi \wedge \nabla\theta = \nabla \wedge (\psi\nabla\theta) \quad (6.13)$$

donc la divergence est nulle car c'est un rotationnel.

Exercice 51. *Montrer (6.12) et (6.13).*

On a l'égalité

$$\nabla\varphi = \partial_x\varphi \mathbf{e}_x + \partial_y\varphi \mathbf{e}_y + \partial_z\varphi \mathbf{e}_z = \partial_R\varphi \mathbf{e}_R + \frac{1}{R}\partial_\theta\varphi \mathbf{e}_\theta + \partial_Z\varphi \mathbf{e}_Z \quad (6.14)$$

qui exprime que le calcul du gradient d'un scalaire peut s'effectuer dans les deux référentiels.

Exercice 52. *Montrer (6.14) à l'aide de la formule des dérivées composées.*

Le champ B s'exprime sous la forme

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{R}F\mathbf{e}_\theta + \frac{1}{R} \left(\partial_R\psi \mathbf{e}_R + \frac{1}{R}\partial_\theta\psi \mathbf{e}_\theta + \partial_Z\psi \mathbf{e}_Z \right) \wedge \mathbf{e}_\theta \\ &= \frac{\partial_Z\psi}{R} \mathbf{e}_R + \frac{F}{R} \mathbf{e}_\theta - \frac{\partial_R\psi}{R} \mathbf{e}_Z. \end{aligned}$$

Donc en utilisant (6.11)

$$\nabla \wedge B = \nabla \frac{\partial_Z\psi}{R} \wedge \mathbf{e}_R + \nabla F \wedge \frac{\mathbf{e}_\theta}{R} - \nabla \frac{\partial_R\psi}{R} \wedge \mathbf{e}_Z$$

puis en utilisant le fait que F et ψ sont indépendants de θ

$$\nabla \wedge B = -\frac{\partial_Z F}{R} \mathbf{e}_R + \left(\partial_R \frac{\partial_R\psi}{R} + \partial_Z \frac{\partial_Z\psi}{R} \right) \mathbf{e}_\theta + \frac{\partial_R F}{R} \mathbf{e}_Z.$$

Nous définissons le Laplacien de Grad-Shafranov par

$$\Delta^* \psi = R \left(\partial_R \frac{\partial_R\psi}{R} + \partial_Z \frac{\partial_Z\psi}{R} \right) = \partial_{RR}\psi - \frac{1}{R}\partial_R\psi + \partial_{ZZ}\psi. \quad (6.15)$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned}
& (\nabla \wedge B) \wedge B \\
&= \left[-\frac{\partial_Z F}{R} \mathbf{e}_R + \frac{\Delta^* \psi}{R} \mathbf{e}_\theta + \frac{\partial_R F}{R} \mathbf{e}_Z \right] \wedge \left[\frac{\partial_Z \psi}{R} \mathbf{e}_R + \frac{F}{R} \mathbf{e}_\theta - \frac{\partial_R \psi}{R} \mathbf{e}_Z \right] \\
&= \frac{1}{R^2} (-F \partial_R F - \partial_R \psi \Delta^* \psi) \mathbf{e}_R \\
&\quad + \frac{1}{R^2} (\partial_R F \partial_Z \psi - \partial_Z F \partial_R \psi) \mathbf{e}_\theta \\
&\quad + \frac{1}{R^2} (-F \partial_Z F - \partial_Z \psi \Delta^* \psi) \mathbf{e}_Z.
\end{aligned}$$

Proposition 53. *Supposons qu'il existe deux fonctions suffisamment régulières $\bar{p} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $\bar{F} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que*

$$p = \bar{p}(\psi) \text{ et } F = \bar{F}(\psi). \quad (6.16)$$

Supposons de plus que ψ vérifie l'équation

$$\Delta^* \psi = -\mu_0 R^2 \bar{p}'(\psi) - \bar{F}(\psi) \bar{F}'(\psi), \quad x \in \Omega. \quad (6.17)$$

Alors l'équilibre magnétique (6.1) est vérifié.

Démonstration. Considérons une pression invariante dans la direction θ . Le gradient de pression est

$$\nabla p = \partial_R p \mathbf{e}_R + \partial_Z p \mathbf{e}_Z$$

L'équation (6.1) se réécrit

$$\begin{cases} \partial_R p &= \frac{1}{R^2 \mu_0} (-F \partial_R F - \partial_R \psi \Delta^* \psi), \\ 0 &= \partial_R F \partial_Z \psi - \partial_Z F \partial_R \psi, \\ \partial_Z p &= \frac{1}{R^2 \mu_0} (-F \partial_Z F - \partial_Z \psi \Delta^* \psi) \end{cases}$$

Les fonctions vérifiant (6.16) en sont des solutions. \square

Hormis les termes de courbures, la structure de l'équation de Grad-Shafranov étant très proche de celle de (6.7)-(6.9). On en déduit en généralisant le matériel précédent que le minimum dans $H_0^1(\Omega)$ (si il existe) de

$$J(\psi) = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2R} |\nabla \psi|^2 - q(\psi) \right) dR dZ \quad (6.18)$$

avec

$$q(\psi) = \mu_0 R \bar{p}(\psi) + \frac{\bar{F}(\psi)^2}{2R}.$$

Ce problème n'a de sens physique que si le domaine borné Ω est éloigné de l'axe $R = 0$ au sens

$$0 < \inf_{(R,Z) \in \Omega} R. \quad (6.19)$$

Comme auparavant l'existence et l'unicité de la solution sont garantis sous condition d' α -convexité. In fine ces conditions sont vérifiées si les dérivées secondes \bar{p}'' et $(\bar{F}^2)''$ sont bornées par des constantes suffisamment petites.

Une solution analytique particulière existe, la solution de Soloviev.

Des résultats numériques obtenus à l'aide du logiciel FreeFem++ sont présentés dans [8] pour la géométrie de la figure 6.2.

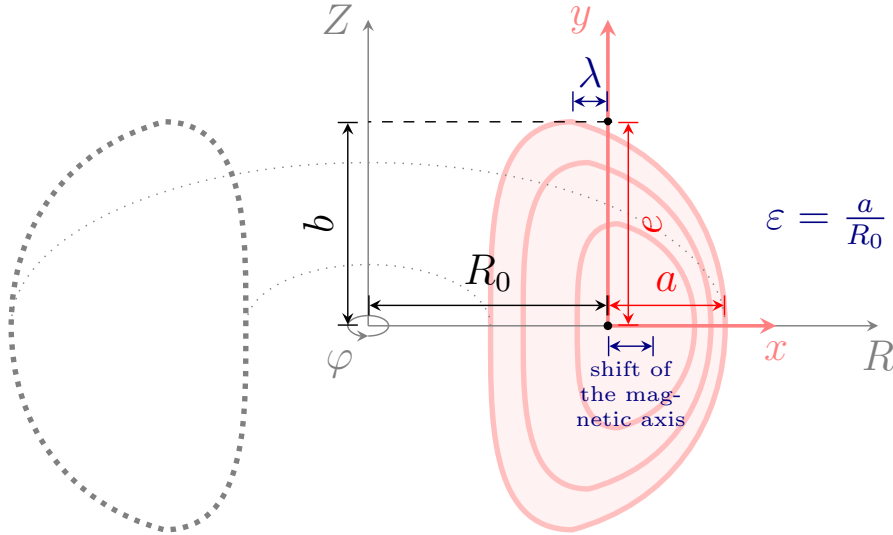


FIGURE 6.2 – Détail de quelques paramètres qui permettent de spécifier les dimensions de la coupe poloidale.

Formulaire

Le gradient d'un champ de vecteur $\mathbf{E} = \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix}$ est

$$\nabla \mathbf{E} = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} E_1 & \partial_{x_2} E_1 & \partial_{x_3} E_1 \\ \partial_{x_1} E_2 & \partial_{x_2} E_2 & \partial_{x_3} E_2 \\ \partial_{x_1} E_3 & \partial_{x_2} E_3 & \partial_{x_3} E_3 \end{pmatrix}.$$

Le rotationnel de \mathbf{E} est $\nabla \wedge \mathbf{E} = \begin{pmatrix} \partial_{x_2} E_3 - \partial_{x_3} E_2 \\ -\partial_{x_3} E_1 + \partial_{x_1} E_3 \\ \partial_{x_1} E_2 - \partial_{x_2} E_1 \end{pmatrix}$. La divergence de \mathbf{E} est

$$\nabla \cdot \mathbf{E}^t = \partial_{x_1} E_1 + \partial_{x_2} E_2 + \partial_{x_3} E_3 = \text{tr}(\nabla \mathbf{E}).$$

La notation $\nabla \cdot \mathbf{E}^t$ est ici utilisée pour être compatible avec la divergence d'une matrice. La condition de divergence nulle d'un champ magnétique \mathbf{B} s'écrit $\nabla \cdot \mathbf{B}^t = 0$. La contraction de deux matrices $\mathbf{M} = (m_{ij})$ et $\mathbf{N} = (n_{ij})$ est

$$\mathbf{M} : \mathbf{N} = \sum_{i,j} m_{ij} n_{ij}.$$

Le produit tensoriel de deux vecteurs \mathbf{D} et \mathbf{E} est $\mathbf{D} \otimes \mathbf{E} = \begin{pmatrix} D_1 E_1 & D_2 E_1 & D_3 E_1 \\ D_1 E_2 & D_2 E_2 & D_3 E_2 \\ D_1 E_3 & D_2 E_3 & D_3 E_3 \end{pmatrix}$.

Le produit vectoriel est pour sa part égal à $\mathbf{D} \wedge \mathbf{E} = \begin{pmatrix} D_2 E_3 - D_3 E_2 \\ D_3 E_1 - D_1 E_3 \\ D_1 E_2 - D_2 E_1 \end{pmatrix}$.

Une première conséquence est

$$\nabla \wedge (\mathbf{D} \wedge \mathbf{E}) = \nabla \cdot (\mathbf{E} \otimes \mathbf{D} - \mathbf{D} \otimes \mathbf{E}).$$

Une deuxième conséquence est

$$\nabla \cdot (\mathbf{D} \otimes \mathbf{E}) = (\nabla \cdot \mathbf{D}^t) \mathbf{E} + (\nabla \mathbf{E}) \mathbf{D}.$$

Exercice 54. Dédurre de tout cela

$$(\nabla \wedge \mathbf{C}) \wedge \mathbf{C} = \nabla \cdot \left(\mathbf{C} \otimes \mathbf{C} - \frac{|\mathbf{C}|^2}{2} \mathbf{I} \right) - (\nabla \cdot \mathbf{C}) \mathbf{C}. \quad (20)$$

Bibliographie

- [1] C. Cercignani, *Mathematical Methods in Kinetic Theory*, New York, Plenum Press, 1990.
- [2] E. Sonnendrucker, cours de M2 : Modèles cinétiques pour la fusion, en ligne <http://www-irma.u-strasbg.fr/sonnen/polyM2Vlasov.pdf>
- [3] G. Rhein, *Collisionless Kinetic Equations from Astrophysics—The Vlasov-Poisson System*, document en ligne sur internet.
- [4] K. Miyamoto, *Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion*, Springer 2005.
- [5] F. Golse, cours de M2 NM468 : Modèles cinétiques, parcours "Énergies pour les futurs" du master ANEDP.
- [6] Projet international ITER, <http://www.iter.org/fr/accueil>
- [7] B. Després, *Lois de conservations eulériennes, lagrangiennes et méthodes numériques*. *Mathématiques & Applications*, 68. Springer-Verlag, Berlin, 2010.
- [8] E. Deriaz, B. Després, G. Faccanoni, K. P. Gostaf, L.-M. Imbeert-Gérard, G. Sadaka et R. Sart, *Magnetic Equations with FreeFem++ : the Grad-Shafranov Equation & the Current Hole*, CEMRACS'10 research achievements : numerical modeling of fusion, 76-94, ESAIM Proc., 32, EDP Sci., Les Ulis, 2011