

Formulations multi-traces (quasi-) locales pour la diffraction d'ondes par des objets composites

Séminaire EDP
LMV, UVSQ

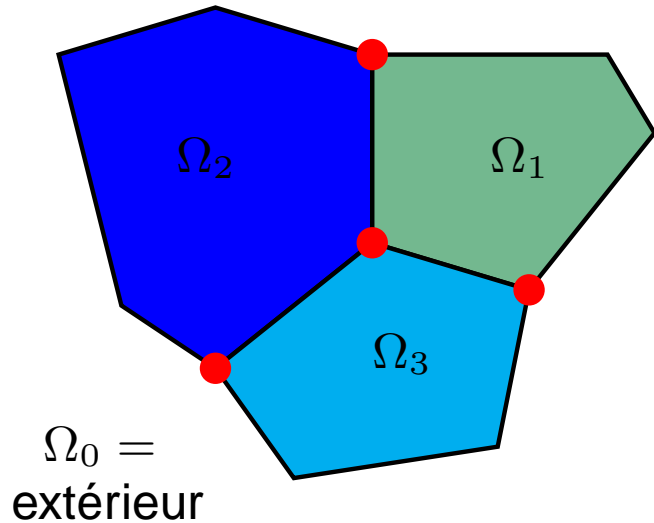
X.Claeys, LJLL, Paris 6,

avec V.Dolean, Strathclyde University,
M.Gander, Université de Genève.



Alpines

Diffraction multi sous-domaines



Géométrie

$\Omega_j =$ ouvert Lipschitz

avec $\Omega_j \cap \Omega_k = \emptyset$ si $j \neq k$

et Ω_j borné si $j \neq 0$,

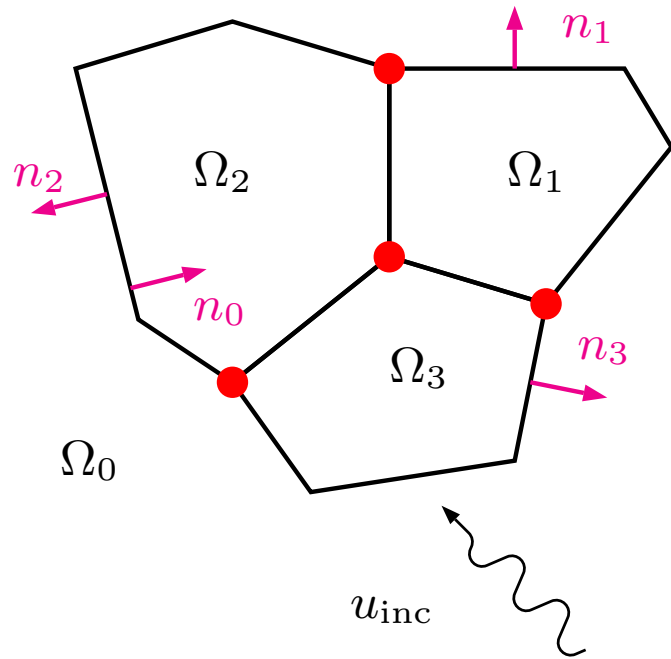
$$\mathbb{R}^d = \cup_{j=0}^n \bar{\Omega}_j, \quad \Gamma_j = \partial\Omega_j$$

$$\Gamma = \cup_{j=0}^n \Gamma_j \quad (\text{squelette}).$$

Important: différent du cas d'objets homogènes isolés

- 3 sous-domaines (ou plus) peuvent être adjacents,
- le squelette Γ n'est pas à priori une surface orientable.

Diffraction multi sous-domaines



Notations

$\kappa_j, \mu_j \in \mathbb{R}_+^*$ carac. dans Ω_j ,

$n_j =$ normale à $\Gamma_j = \partial\Omega_j$,

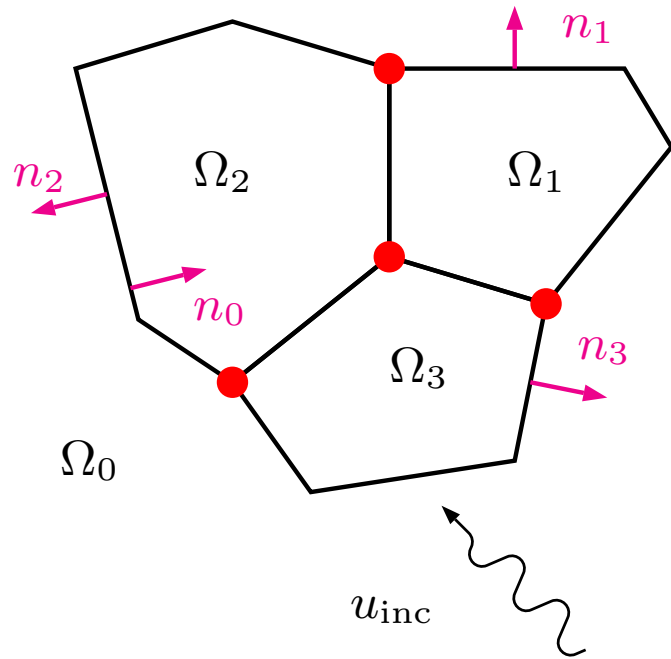
dirigée vers l'extérieur de Ω_j .

Problème de transmission (bien posé):

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in H_{\text{loc}}^1(\Delta, \overline{\Omega}_j) \text{ tel que} \\ \Delta u + \kappa_j^2 u = 0 \quad \text{dans } \Omega_j, \quad j = 0, \dots, n \\ u - u_{\text{inc}} \quad \text{sortant dans } \Omega_0, \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u|_{\Gamma_j} - u|_{\Gamma_k} = 0, \\ \mu_j^{-1} \partial_{n_j} u|_{\Gamma_j} + \mu_k^{-1} \partial_{n_k} u|_{\Gamma_k} = 0, \\ \text{sur } \Gamma_j \cap \Gamma_k, \forall j, k. \end{array} \right.$$

Diffraction multi sous-domaines



Notations

$\kappa_j, \mu_j \in \mathbb{R}_+^*$ carac. dans Ω_j ,

$n_j =$ normale à $\Gamma_j = \partial\Omega_j$,

dirigée vers l'extérieur de Ω_j .

Problème de transmission (bien posé):

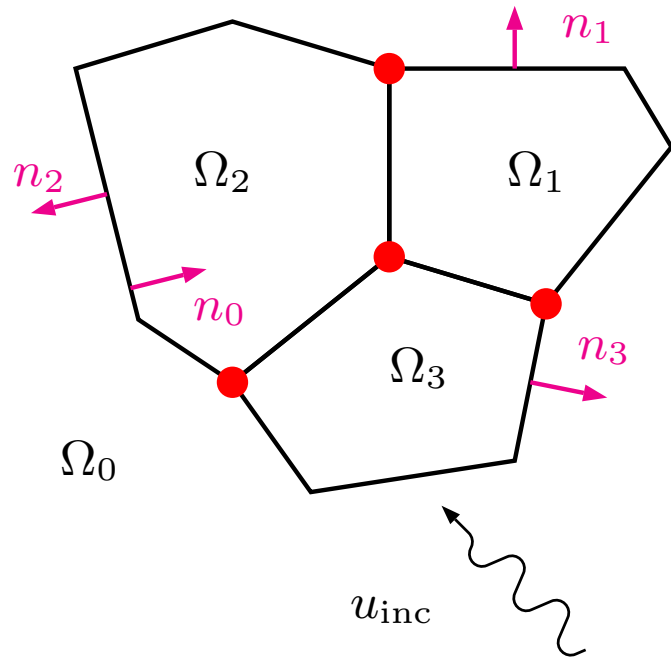
$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in H_{\text{loc}}^1(\Delta, \bar{\Omega}_j) \text{ tel que} \\ \Delta u + \kappa_j^2 u = 0 \quad \text{dans } \Omega_j, \quad j = 0, \dots, n \\ u - u_{\text{inc}} \quad \text{sortant dans } \Omega_0, \end{array} \right.$$

Dans cet exposé
on suppose

$$\mu_0 = \dots = \mu_n = 1$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u|_{\Gamma_j} - u|_{\Gamma_k} = 0, \\ \mu_j^{-1} \partial_{n_j} u|_{\Gamma_j} - \mu_k^{-1} \partial_{n_k} u|_{\Gamma_k} = 0, \\ \text{sur } \Gamma_j \cap \Gamma_k, \forall j, k. \end{array} \right.$$

Diffraction multi sous-domaines



Notations

$\kappa_j, \mu_j \in \mathbb{R}_+^*$ carac. dans Ω_j ,

$n_j =$ normale à $\Gamma_j = \partial\Omega_j$,

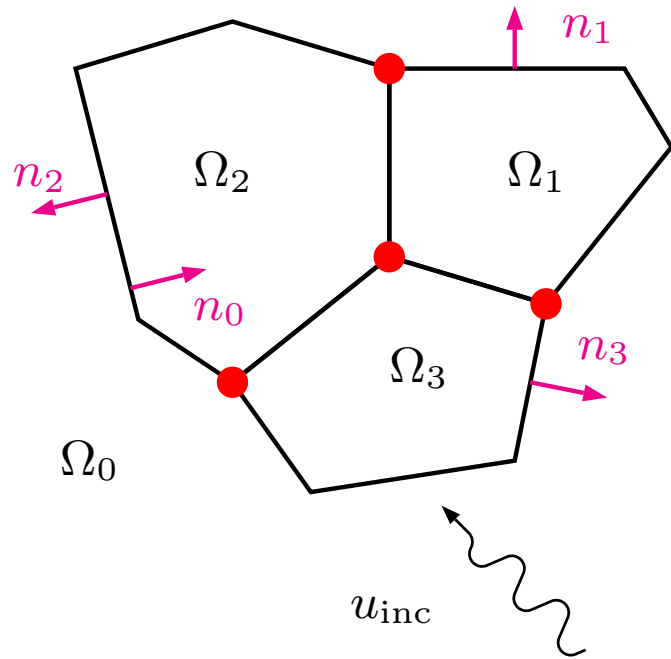
dirigée vers l'extérieur de Ω_j .

Problème de transmission (bien posé):

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in H_{\text{loc}}^1(\Delta, \overline{\Omega}_j) \text{ tel que} \\ \Delta u + \kappa_j^2 u = 0 \quad \text{dans } \Omega_j, \quad j = 0, \dots, n \\ u - u_{\text{inc}} \quad \text{sortant dans } \Omega_0, \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u|_{\Gamma_j} - u|_{\Gamma_k} = 0, \\ \partial_{n_j} u|_{\Gamma_j} + \partial_{n_k} u|_{\Gamma_k} = 0, \\ \text{sur } \Gamma_j \cap \Gamma_k, \forall j, k. \end{array} \right.$$

Diffraction multi sous-domaines



Notations

$\kappa_j, \mu_j \in \mathbb{R}_+^*$ carac. dans Ω_j ,

$n_j =$ normale à $\Gamma_j = \partial\Omega_j$,

dirigée vers l'extérieur de Ω_j .

Problème de transmission (**bien posé**):

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in H_{\text{loc}}^1(\Delta, \overline{\Omega_j}) \text{ tel que} \\ \Delta u + \kappa_j^2 u = 0 \quad \text{dans } \Omega_j, \quad j = 0, \dots, n \\ u - u_{\text{inc}} \quad \text{sortant dans } \Omega_0, \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u|_{\Gamma_j} - u|_{\Gamma_k} = 0, \\ \partial_{n_j} u|_{\Gamma_j} + \partial_{n_k} u|_{\Gamma_k} = 0, \end{array} \right. \quad \text{sur } \Gamma_j \cap \Gamma_k, \forall j, k.$$

THALES

On veut reformuler ce problème comme une équation intégrale posée sur Γ , puis résoudre par **éléments finis de bord (BEM)**.

Difficultés liées au conditionnement

Problème: BEM = mal conditionné

Les éléments finis de bord mènent à des **systemes linéaires pleins** qui, pour des problèmes de grande taille (contexte industriel), nécessitent des solveurs itératifs. Mais les matrices sont **mal conditionnées $O(1/h)$ en général**, ce qui empêche les solveurs de converger.

Approche I: équation $Id + \text{compact}$

Dans le cas particulier des opérateurs intégraux de 2nd espèce où **$A = Id + \text{compact}$, le conditionnement de la matrice est indépendant du pas du maillage à condition** d'utiliser un procédé de discrétisation pour lequel les matrices de masse satisfont une **condition inf-sup uniforme**.

Approche II: équation préconditionnée

Dans le cas général, un remède au mauvais conditionnement consiste à préconditionner. Mais le choix d'un préconditionneur n'est pas facile. . .

Préconditionneur de Calderón

Equation de type Rumsey "classique" (EFIE)

Dans le cas d'objets diffractants isolés et homogènes, le **préconditionneur de Calderón** est une technique devenue très populaire parce que facile à implémenter, et adaptée à une large gamme de fréquences. Elle **stabilise le conditionnement vis-à-vis du pas du maillage**.

[Steinbach & Wendland, 1998], [Christiansen & Nédélec, 2000], [Antoine & Boubendir, 2008], [Cools, Andriulli & Olyslager, 2009],...

Idée générale

L'opérateur intégral de Rumsey satisfait

$$A \cdot A \simeq \text{Id} + \text{compact} \quad (\text{cf } \text{formule de Calderón})$$

Comme **Id + compact = "plus facile à résoudre avec un solveur itératif"** (en général...), cela suggère A comme preconditionneur pour lui-même.

Objectif et littérature

Pour obtenir des formulations intégrales bien conditionnées ou facile à préconditionner, on pourrait penser à adapter les solutions qui existent déjà (dans le cas des objets isolés). Mais **celles-ci reposent en général sur une certaine orientation des interfaces**. Or le squelette Γ **n'est pas orientable**.

Déjà existant:

- **Rumsey/PMCHWT/EFIE = "formulation simple trace"**
- **Boundary element tearing and interconnecting method (BETI)**
[Steinbach & Windisch, 2010], [Langer & Steinbach, 2003], [Hsiao, Steinbach & Wendland, 2000], . . .

Objectif et littérature

Pour obtenir des formulations intégrales bien conditionnées ou facile à préconditionner, on pourrait penser à adapter les solutions qui existent déjà (dans le cas des objets isolés). Mais **celles-ci reposent en général sur une certaine orientation des interfaces**. Or le squelette Γ **n'est pas orientable**.

Déjà existant:



Pas de préconditionneur robuste

- Rumsey/PMCHWT/EFIE = "formulation simple trace"
- **Boundary element tearing and interconnecting method (BETI)**
[Steinbach & Windisch, 2010], [Langer & Steinbach, 2003], [Hsiao, Steinbach & Wendland, 2000], ...

Objectif et littérature

Pour obtenir des formulations intégrales bien conditionnées ou facile à préconditionner, on pourrait penser à adapter les solutions qui existent déjà (dans le cas des objets isolés). Mais **celles-ci reposent en général sur une certaine orientation des interfaces**. Or le squelette Γ **n'est pas orientable**.

Déjà existant:



Pas de préconditionneur robuste

- **Rumsey/PMCHWT/EFIE = "formulation simple trace"**
- **Boundary element tearing and interconnecting method (BETI)**
[Steinbach & Windisch, 2010], [Langer & Steinbach, 2003], [Hsiao, Steinbach & Wendland, 2000], ...

Récemment:

- **Seconde espèce** [Claeys, 2011]
- Multi-trace **globale** [Claeys & Hiptmair, 2011]
- Multi-trace **locale** [Jerez & Hiptmair, 2011]

Objectif et littérature

Pour obtenir des formulations intégrales bien conditionnées ou facile à préconditionner, on pourrait penser à adapter les solutions qui existent déjà (dans le cas des objets isolés). Mais **celles-ci reposent en général sur une certaine orientation des interfaces**. Or le squelette Γ **n'est pas orientable**.

Déjà existant:



Pas de préconditionneur robuste

- **Rumsey/PMCHWT/EFIE = "formulation simple trace"**
- **Boundary element tearing and interconnecting method (BETI)**
[Steinbach & Windisch, 2010], [Langer & Steinbach, 2003], [Hsiao, Steinbach & Wendland, 2000], ...

Récemment:



Préconditionneur de Calderón

- **Seconde espèce** [Claeys, 2011]
- **Multi-trace globale** [Claeys & Hiptmair, 2011]
- **Multi-trace locale** [Jerez & Hiptmair, 2011]

Objectif et littérature

Pour obtenir des formulations intégrales bien conditionnées ou facile à préconditionner, on pourrait penser à adapter les solutions qui existent déjà (dans le cas des objets isolés). Mais celles-ci reposent en général sur une certaine orientation des interfaces. Or le squelette Γ n'est pas orientable.

Déjà existant:

- Rumsey/PMCHWT/EFIE = "formulation simple trace"
- **Boundary element tearing and interconnecting method (BETI)**
[Steinbach & Windisch, 2010], [Langer & Steinbach, 2003], [Hsiao, Steinbach & Wendland, 2000], ...

Récemment:

- **Seconde espèce** [Claeys, 2011]
- Multi-trace **globale** [Claeys & Hiptmair, 2011]
- Multi-trace **locale** [Jerez & Hiptmair, 2011]

Objectif et littérature

Pour obtenir des formulations intégrales bien conditionnées ou facile à préconditionner, on pourrait penser à adapter les solutions qui existent déjà (dans le cas des objets isolés). Mais celles-ci reposent en général sur une certaine orientation des interfaces. Or le squelette Γ n'est pas orientable.

Déjà existant:

- Rumsey/PMCHWT/EFIE = "formulation simple trace"
- **Boundary element tearing and interconnecting method (BETI)** [Steinbach & Windisch, 2010], [Langer & Steinbach, 2003], [Hsiao, Steinbach & Wendland, 2000], ...

Récemment:

- **Seconde espèce** [Claeys, 2011]
- **Multi-trace globale** [Claeys & Hiptmair, 2011]

Multi-trace locale [Jerez & Hiptmair, 2011]

Objectif et littérature

Pour obtenir des formulations intégrales bien conditionnées ou facile à préconditionner, on pourrait penser à adapter les solutions qui existent déjà (dans le cas des objets isolés). Mais celles-ci reposent en général sur une certaine orientation pas orientable.

Multi-trace locale [Jerez & Hiptmair, 2011]

- Rumsey/PMCHWT/EFIE = "formulation simple trace"
- **Boundary element tearing and interconnecting method (BETI)** [Steinbach & Windisch, 2010], [Langer & Steinbach, 2003], [Hsiao, Steinbach & Wendland, 2000], ...

Récemment:

- **Seconde espèce** [Claeys, 2011]
- Multi-trace **globale** [Claeys & Hiptmair, 2011]

Objectif et littérature

Pour obtenir des formulations intégrales bien conditionnées ou facile à préconditionner, on pourrait penser à adapter les solutions qui existent déjà (dans le cas des objets isolés). Mais celles-ci reposent en général sur une certaine orientation.

Multi-trace **locale** [Jerez & Hiptmair, 2011]

- Précision comparable à BETI et PMCHWT
- Couplage entre sous-domaines **adjacents seulement** par des termes "de type **masse**" (\Rightarrow **Decomposition de Domaines**)

- **Seconde espèce** [Claeys, 2011]
- Multi-trace **globale** [Claeys & Hiptmair, 2011]

Objectif et littérature

Pour obtenir des formulations intégrales bien conditionnées ou facile à préconditionner, on pourrait penser à adapter les solutions qui existent déjà (dans le cas des objets isolés). Mais celles-ci reposent en général sur une certaine orientation.

Multi-trace **locale** [Jerez & Hiptmair, 2011]

- Précision comparable à BETI et PMCHWT
- Couplage entre sous-domaines **adjacents seulement** par des termes "de type **masse**" (\Rightarrow **Decomposition de Domaines**)

- **Difficile à analyser...**
- Liens avec multi-trace globale?
- Performances en terme de DDM?

Plan de l'exposé

I. Rappels sur une formule de représentation intégrale

II. Multi-trace locale: 2 sous-domaines

III. Multi-trace locale: cas général

IV. Multi-trace quasi-locale

Plan de l'exposé

I. Rappels sur une formule de représentation intégrale

II. Multi-trace locale: 2 sous-domaines

III. Multi-trace locale: cas général

IV. Multi-trace quasi-locale

Notations pour les traces

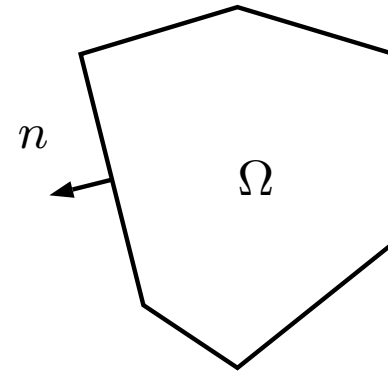
Ω = ouvert Lipschitz

$$\mathbb{H}(\partial\Omega) := H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \times H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega).$$

Opérateurs de trace

$$\gamma(v) := \begin{bmatrix} v|_{\partial\Omega}^{\text{int}} \\ \partial_n v|_{\partial\Omega}^{\text{int}} \end{bmatrix}, \quad \gamma_c(v) := \begin{bmatrix} v|_{\partial\Omega}^{\text{ext}} \\ \partial_n v|_{\partial\Omega}^{\text{ext}} \end{bmatrix},$$

$$\{\gamma\} := \frac{1}{2}(\gamma + \gamma_c) \quad \text{et} \quad [\gamma] := \gamma - \gamma_c.$$



Théorème de représentation

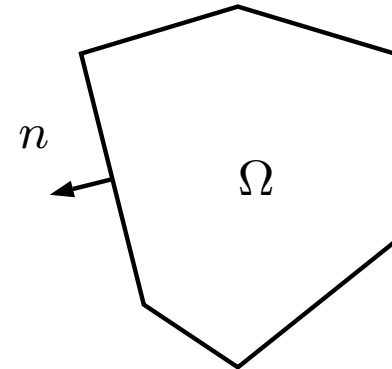
Opérateur au potentiel

$\mathcal{G}_\kappa(\mathbf{x}) := \exp(i\kappa|\mathbf{x}|)/(4\pi|\mathbf{x}|)$ = noyau de Green sortant pour l'éq. de Helmholtz

$$G_\kappa\left(\begin{bmatrix} v \\ q \end{bmatrix}\right)(\mathbf{x}) := \int_{\partial\Omega} q(\mathbf{y}) \mathcal{G}_\kappa(\mathbf{x} - \mathbf{y}) + v(\mathbf{y}) n(\mathbf{y}) \cdot (\nabla \mathcal{G}_\kappa)(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d\sigma(\mathbf{y})$$

Remarque

$G_\kappa(V)(\mathbf{x})$ est solution de l'équation de Helmholtz dans $\mathbb{R}^d \setminus \partial\Omega$, quel que soit $V = (v, q)$.



Théorème

Si $u \in H_{\text{loc}}^1(\overline{\Omega})$ tel que $\Delta u + \kappa^2 u = 0$ dans Ω (+ u est sortant si Ω est non borné) alors

$$G_\kappa(\gamma(u))(\mathbf{x}) = \begin{cases} u(\mathbf{x}) & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega, \\ 0 & \text{si } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}. \end{cases}$$

Projecteur de Calderón

Données de Cauchy locales à Ω :

$$\mathcal{C}_\kappa(\partial\Omega) := \{ \gamma(u) \mid \Delta u + \kappa^2 u = 0 \text{ dans } \Omega \text{ (+}u \text{ sortant si } \Omega \text{ non-borné)} \}.$$

Si v est solution de l'éq. de Helmholtz dans Ω alors

$$\gamma(v) \in \mathcal{C}_\kappa(\partial\Omega) \implies v = G_\kappa(\gamma(v)) \text{ dans } \Omega.$$

Projecteur de Calderón

Données de Cauchy locales à Ω :

$$\mathcal{C}_\kappa(\partial\Omega) := \{ \gamma(u) \mid \Delta u + \kappa^2 u = 0 \text{ dans } \Omega \text{ (+}u \text{ sortant si } \Omega \text{ non-borné)} \}.$$

Si v est solution de l'éq. de Helmholtz dans Ω alors

$$\gamma(v) \in \mathcal{C}_\kappa(\partial\Omega) \quad \Longrightarrow \quad \gamma(v) = \gamma \cdot G_\kappa(\gamma(v))$$

Projecteur de Calderón

Données de Cauchy locales à Ω :

$$\mathcal{C}_\kappa(\partial\Omega) := \{ \gamma(u) \mid \Delta u + \kappa^2 u = 0 \text{ dans } \Omega \text{ (+}u \text{ sortant si } \Omega \text{ non-borné)} \}.$$

Si v est solution de l'éq. de Helmholtz dans Ω alors

$$V \in \mathcal{C}_\kappa(\partial\Omega) \implies V = \gamma \cdot G_\kappa(V)$$

Projecteur de Calderón

Données de Cauchy locales à Ω :

$$\mathcal{C}_\kappa(\partial\Omega) := \{ \gamma(u) \mid \Delta u + \kappa^2 u = 0 \text{ dans } \Omega \text{ (+}u \text{ sortant si } \Omega \text{ non-borné)} \}.$$

Caractérisation des données de Cauchy

L'opérateur $\gamma \cdot G_\kappa : \mathbb{H}(\partial\Omega) \rightarrow \mathcal{C}_\kappa(\partial\Omega) \subset \mathbb{H}(\partial\Omega)$ est un projecteur continu appelé projecteur de Calderón intérieur à Ω . On a

$$V \in \mathcal{C}_\kappa(\partial\Omega) \iff V = \gamma \cdot G_\kappa(V)$$

Formule des sauts: $[\gamma] \cdot G_\kappa = \text{Id},$

Identité de Calderón: $(A_\kappa)^2 = \text{Id}$ avec $A_\kappa := 2\{\gamma\} \cdot G_\kappa.$

Projecteur de Calderón

Données de Cauchy locales à Ω :

$$\mathcal{C}_\kappa(\partial\Omega) := \{ \gamma(u) \mid \Delta u + \kappa^2 u = 0 \text{ dans } \Omega \text{ (+}u \text{ sortant si } \Omega \text{ non-borné)} \}.$$

Caractérisation des données de Cauchy

L'opérateur $\gamma \cdot G_\kappa : \mathbb{H}(\partial\Omega) \rightarrow \mathcal{C}_\kappa(\partial\Omega) \subset \mathbb{H}(\partial\Omega)$ est un projecteur continu appelé projecteur de Calderón intérieur à Ω . On a

$$V \in \mathcal{C}_\kappa(\partial\Omega) \iff V = \gamma \cdot G_\kappa(V) \quad \leftarrow \gamma = \{\gamma\} + \frac{1}{2}[\gamma]$$

Formule des sauts: $[\gamma] \cdot G_\kappa = \text{Id},$

Identité de Calderón: $(A_\kappa)^2 = \text{Id}$ avec $A_\kappa := 2\{\gamma\} \cdot G_\kappa.$

$$\{\gamma\} \cdot G_\kappa(V) + \frac{1}{2}[\gamma] \cdot G_\kappa(V)$$

Projecteur de Calderón

Données de Cauchy locales à Ω :

$$\mathcal{C}_\kappa(\partial\Omega) := \{ \gamma(u) \mid \Delta u + \kappa^2 u = 0 \text{ dans } \Omega \text{ (+}u \text{ sortant si } \Omega \text{ non-borné)} \}.$$

Caractérisation des données de Cauchy

L'opérateur $\gamma \cdot G_\kappa : \mathbb{H}(\partial\Omega) \rightarrow \mathcal{C}_\kappa(\partial\Omega) \subset \mathbb{H}(\partial\Omega)$ est un projecteur continu appelé projecteur de Calderón intérieur à Ω . On a

$$V \in \mathcal{C}_\kappa(\partial\Omega) \iff V = \boxed{\gamma \cdot G_\kappa(V)} \quad \leftarrow \gamma = \{\gamma\} + \frac{1}{2}[\gamma]$$

Formule des sauts: $[\gamma] \cdot G_\kappa = \text{Id},$

Identité de Calderón: $(A_\kappa)^2 = \text{Id}$ avec $A_\kappa := 2\{\gamma\} \cdot G_\kappa.$

$$\{\gamma\} \cdot G_\kappa(V) + \frac{1}{2}[\gamma] \cdot G_\kappa(V)$$

Projecteur de Calderón

Données de Cauchy locales à Ω :

$$\mathcal{C}_\kappa(\partial\Omega) := \{ \gamma(u) \mid \Delta u + \kappa^2 u = 0 \text{ dans } \Omega \text{ (+}u \text{ sortant si } \Omega \text{ non-borné)} \}.$$

Caractérisation des données de Cauchy

L'opérateur $\gamma \cdot G_\kappa : \mathbb{H}(\partial\Omega) \rightarrow \mathcal{C}_\kappa(\partial\Omega) \subset \mathbb{H}(\partial\Omega)$ est un projecteur continu appelé projecteur de Calderón intérieur à Ω . On a

$$V \in \mathcal{C}_\kappa(\partial\Omega) \iff V = \gamma \cdot G_\kappa(V)$$

Formule des sauts: $[\gamma] \cdot G_\kappa = \text{Id},$

Identité de Calderón: $(A_\kappa)^2 = \text{Id}$ avec $A_\kappa := 2\{\gamma\} \cdot G_\kappa.$

$$\frac{1}{2}(A_\kappa + \text{Id})V$$

Projecteur de Calderón

Données de Cauchy locales à Ω :

$$\mathcal{C}_\kappa(\partial\Omega) := \{ \gamma(u) \mid \Delta u + \kappa^2 u = 0 \text{ dans } \Omega \text{ (+}u \text{ sortant si } \Omega \text{ non-borné)} \}.$$

Caractérisation des données de Cauchy

L'opérateur $\gamma \cdot G_\kappa : \mathbb{H}(\partial\Omega) \rightarrow \mathcal{C}_\kappa(\partial\Omega) \subset \mathbb{H}(\partial\Omega)$ est un projecteur continu appelé projecteur de Calderón intérieur à Ω . On a

$$V \in \mathcal{C}_\kappa(\partial\Omega) \iff V = \frac{1}{2}(A_\kappa + \text{Id})V$$

Formule des sauts: $[\gamma] \cdot G_\kappa = \text{Id},$

Identité de Calderón: $(A_\kappa)^2 = \text{Id}$ avec $A_\kappa := 2\{\gamma\} \cdot G_\kappa.$

Projecteur de Calderón

Données de Cauchy locales à Ω :

$$\mathcal{C}_\kappa(\partial\Omega) := \{ \gamma(u) \mid \Delta u + \kappa^2 u = 0 \text{ dans } \Omega \text{ (+}u \text{ sortant si } \Omega \text{ non-borné)} \}.$$

Caractérisation des données de Cauchy

L'opérateur $\gamma \cdot G_\kappa : \mathbb{H}(\partial\Omega) \rightarrow \mathcal{C}_\kappa(\partial\Omega) \subset \mathbb{H}(\partial\Omega)$ est un projecteur continu appelé projecteur de Calderón intérieur à Ω . On a

$$V \in \mathcal{C}_\kappa(\partial\Omega) \iff 0 = (A_\kappa - \text{Id})V$$

Formule des sauts: $[\gamma] \cdot G_\kappa = \text{Id},$

Identité de Calderón: $(A_\kappa)^2 = \text{Id}$ avec $A_\kappa := 2\{\gamma\} \cdot G_\kappa.$

Projecteur de Calderón

Données de Cauchy locales à Ω :

$$\mathcal{C}_\kappa(\partial\Omega) := \{ \gamma(u) \mid \Delta u + \kappa^2 u = 0 \text{ dans } \Omega \text{ (+}u \text{ sortant si } \Omega \text{ non-borné)} \}.$$

Caractérisation des données de Cauchy (forme classique)

L'opérateur $\gamma \cdot G_\kappa : \mathbb{H}(\partial\Omega) \rightarrow \mathcal{C}_\kappa(\partial\Omega) \subset \mathbb{H}(\partial\Omega)$ est un projecteur continu appelé projecteur de Calderón intérieur à Ω . On a

$$V \in \mathcal{C}_\kappa(\partial\Omega) \iff 0 = (A_\kappa - \text{Id})V$$

Formule des sauts: $[\gamma] \cdot G_\kappa = \text{Id},$

Identité de Calderón: $(A_\kappa)^2 = \text{Id}$ avec $A_\kappa := 2\{\gamma\} \cdot G_\kappa.$

Plan de l'exposé

I. Rappels sur une formule de représentation intégrale

II. Multi-trace locale: 2 sous-domaines

III. Multi-trace locale: cas général

IV. Multi-trace quasi-locale

Réécriture du pb à traiter

$A_{\kappa_j}^j$ = opérateur associés à Ω_j

Conditions de transmission

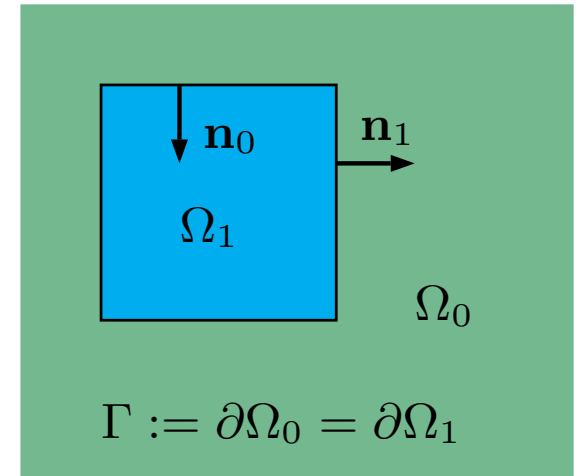
$$\begin{aligned}u_0|_{\Gamma} &= +u_1|_{\Gamma} \\ \partial_{n_0} u_0|_{\Gamma} &= -\partial_{n_1} u_1|_{\Gamma}\end{aligned}$$

Equations d'onde

$$\Delta u_1 + \kappa_1^2 u_1 = 0 \quad \text{dans } \Omega_1$$

$$\Delta u_0 + \kappa_0^2 u_0 = 0 \quad \text{dans } \Omega_0$$

$$u_0 - u_{\text{inc}} \text{ sortant}$$



Réécriture du pb à traiter

$A_{\kappa_j}^j$ = opérateur associés à Ω_j

Conditions de transmission

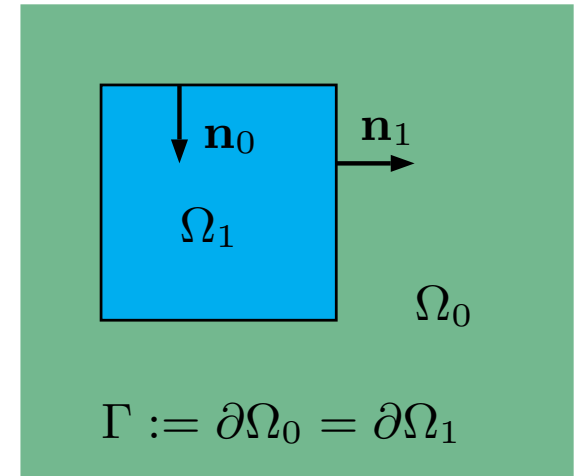
$$\begin{aligned}u_0|_{\Gamma} &= +u_1|_{\Gamma} \\ \partial_{n_0} u_0|_{\Gamma} &= -\partial_{n_1} u_1|_{\Gamma}\end{aligned}$$

Equations d'onde

$$\Delta u_1 + \kappa_1^2 u_1 = 0 \quad \text{dans } \Omega_1$$

$$\Delta u_0 + \kappa_0^2 u_0 = 0 \quad \text{dans } \Omega_0$$

$$u_0 - u_{\text{inc}} \text{ sortant}$$



Réécriture du pb à traiter

$A_{\kappa_j}^j$ = opérateur associés à Ω_j

Conditions de transmission

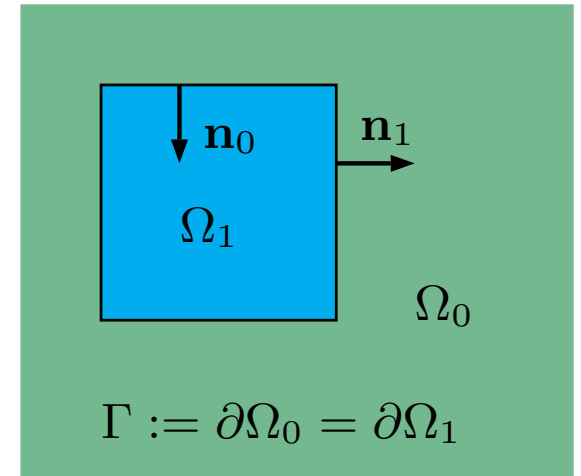
$$\begin{bmatrix} u_0|_{\Gamma} \\ \partial_{n_0} u_0|_{\Gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1|_{\Gamma} \\ \partial_{n_1} u_1|_{\Gamma} \end{bmatrix}$$

Equations d'onde

$$\Delta u_1 + \kappa_1^2 u_1 = 0 \quad \text{dans } \Omega_1$$

$$\Delta u_0 + \kappa_0^2 u_0 = 0 \quad \text{dans } \Omega_0$$

$$u_0 - u_{\text{inc}} \text{ sortant}$$



Réécriture du pb à traiter

$A_{\kappa_j}^j$ = opérateur associés à Ω_j

Conditions de transmission

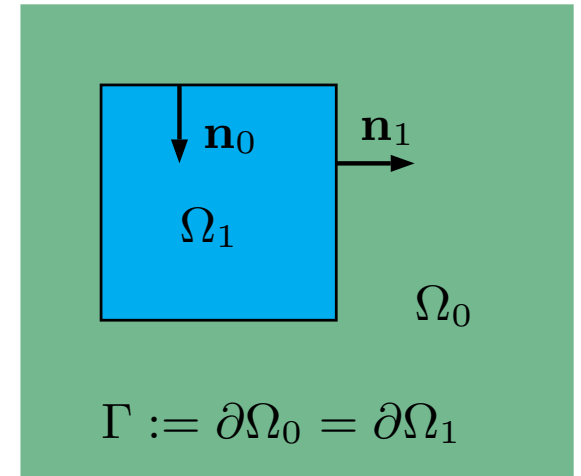
$$\underbrace{\begin{bmatrix} u_0|_{\Gamma} \\ \partial_{n_0} u_0|_{\Gamma} \end{bmatrix}}_{:= U_0} = \underbrace{\begin{bmatrix} +1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}_{:= Q} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} u_1|_{\Gamma} \\ \partial_{n_1} u_1|_{\Gamma} \end{bmatrix}}_{:= U_1}$$

Equations d'onde

$$\Delta u_1 + \kappa_1^2 u_1 = 0 \quad \text{dans } \Omega_1$$

$$\Delta u_0 + \kappa_0^2 u_0 = 0 \quad \text{dans } \Omega_0$$

$$u_0 - u_{\text{inc}} \quad \text{sortant}$$



Réécriture du pb à traiter

$A_{\kappa_j}^j$ = opérateur associés à Ω_j

Conditions de transmission

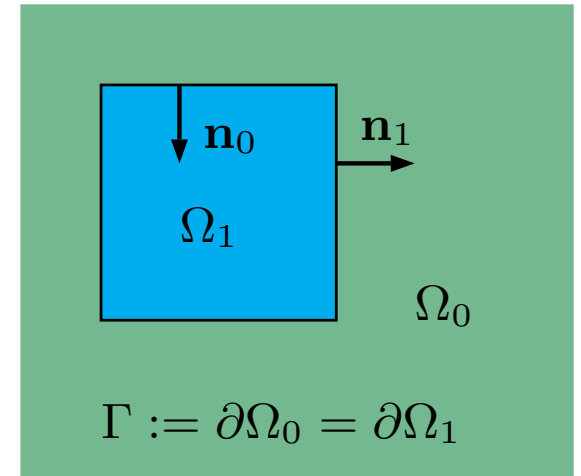
$$\underbrace{\begin{bmatrix} u_0|_{\Gamma} \\ \partial_{n_0} u_0|_{\Gamma} \end{bmatrix}}_{:= U_0} = \underbrace{\begin{bmatrix} +1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}_{:= Q} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} u_1|_{\Gamma} \\ \partial_{n_1} u_1|_{\Gamma} \end{bmatrix}}_{:= U_1}$$

Equations d'onde

$$\Delta u_1 + \kappa_1^2 u_1 = 0 \quad \text{dans } \Omega_1$$

$$\Delta u_0 + \kappa_0^2 u_0 = 0 \quad \text{dans } \Omega_0$$

$$u_0 - u_{\text{inc}} \text{ sortant}$$

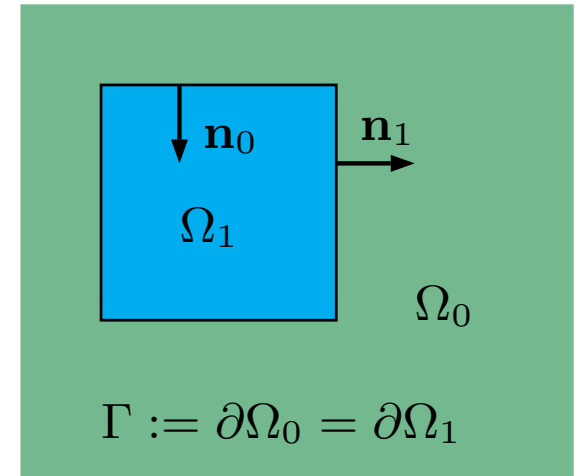


Réécriture du pb à traiter

$A_{\kappa_j}^j$ = opérateur associés à Ω_j

Conditions de transmission

$$\underbrace{\begin{bmatrix} u_0|_{\Gamma} \\ \partial_{n_0} u_0|_{\Gamma} \end{bmatrix}}_{:= U_0} = \underbrace{\begin{bmatrix} +1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}_{:= Q} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} u_1|_{\Gamma} \\ \partial_{n_1} u_1|_{\Gamma} \end{bmatrix}}_{:= U_1}$$



Equations d'onde

$$\left. \begin{array}{l} \Delta u_1 + \kappa_1^2 u_1 = 0 \quad \text{dans } \Omega_1 \\ \Delta u_0 + \kappa_0^2 u_0 = 0 \quad \text{dans } \Omega_0 \\ u_0 - u_{\text{inc}} \text{ sortant} \end{array} \right\} \iff \begin{cases} (A_{\kappa_1}^1 - \text{Id})U_1 = 0 \\ (A_{\kappa_0}^0 - \text{Id})U_0 = F_{\text{inc}} \end{cases}$$

Réécriture du pb à traiter

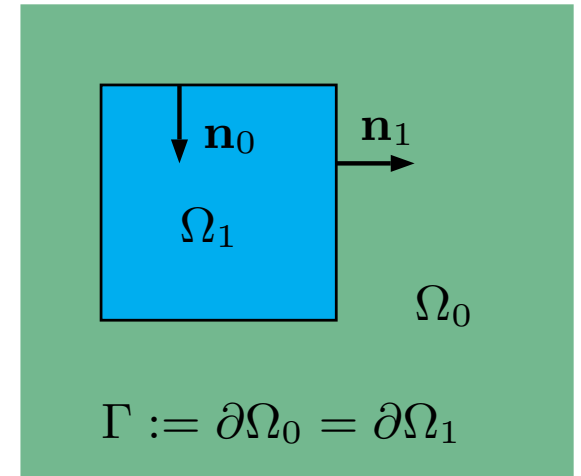
$A_{\kappa_j}^j$ = opérateur associés à Ω_j

Conditions de transmission

$$\underbrace{\begin{bmatrix} u_0|_{\Gamma} \\ \partial_{n_0} u_0|_{\Gamma} \end{bmatrix}}_{:= U_0} = \underbrace{\begin{bmatrix} +1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}_{:= Q} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} u_1|_{\Gamma} \\ \partial_{n_1} u_1|_{\Gamma} \end{bmatrix}}_{:= U_1}$$

Equations d'onde

$$\begin{bmatrix} A_{\kappa_0}^0 - \text{Id} & 0 \\ 0 & A_{\kappa_1}^1 - \text{Id} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_0 \\ U_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ F_{\text{inc}} \end{bmatrix}$$



Réécriture du pb à traiter

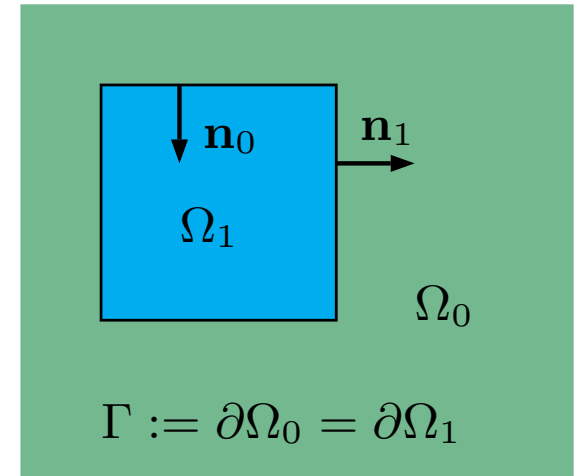
$A_{\kappa_j}^j$ = opérateur associés à Ω_j

Conditions de transmission

$$(*) \quad U_0 - Q \cdot U_1 = 0$$

Equations d'onde

$$\begin{bmatrix} A_{\kappa_0}^0 - \text{Id} & 0 \\ 0 & A_{\kappa_1}^1 - \text{Id} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_0 \\ U_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ F_{\text{inc}} \end{bmatrix}$$



Réécriture du pb à traiter

$A_{\kappa_j}^j$ = opérateur associés à Ω_j

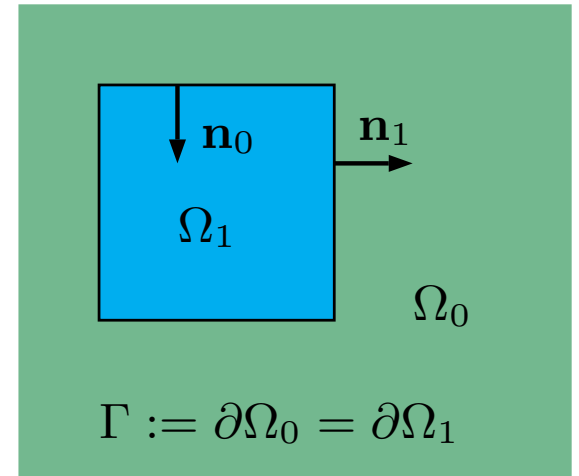
Conditions de transmission

$$(*) \quad U_0 - Q \cdot U_1 = 0$$

$$-Q \cdot (*) \quad -Q \cdot U_0 + U_1 = 0$$

Equations d'onde

$$\begin{bmatrix} A_{\kappa_0}^0 - \text{Id} & 0 \\ 0 & A_{\kappa_1}^1 - \text{Id} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_0 \\ U_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ F_{\text{inc}} \end{bmatrix}$$



Réécriture du pb à traiter

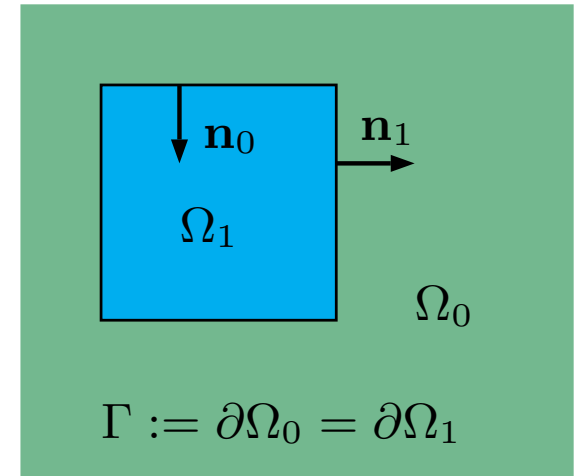
$A_{\kappa_j}^j$ = opérateur associés à Ω_j

Conditions de transmission

$$\begin{bmatrix} \text{Id} & -Q \\ -Q & \text{Id} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_0 \\ U_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Equations d'onde

$$\begin{bmatrix} A_{\kappa_0}^0 - \text{Id} & 0 \\ 0 & A_{\kappa_1}^1 - \text{Id} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_0 \\ U_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ F_{\text{inc}} \end{bmatrix}$$



Réécriture du pb à traiter

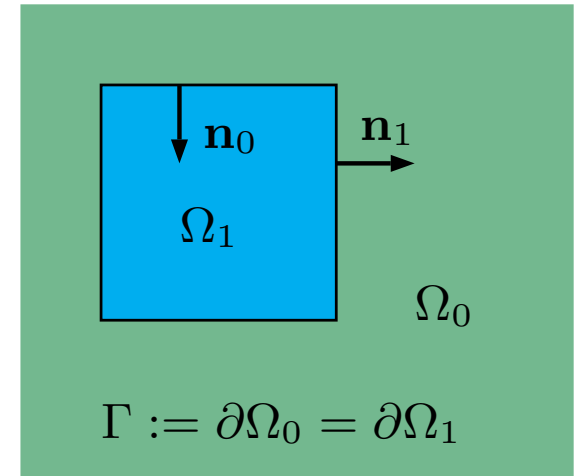
$A_{\kappa_j}^j$ = opérateur associés à Ω_j

Conditions de transmission

$$\left(\begin{bmatrix} \text{Id} & 0 \\ 0 & \text{Id} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & Q \\ Q & 0 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} U_0 \\ U_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Equations d'onde

$$\begin{bmatrix} A_{\kappa_0}^0 - \text{Id} & 0 \\ 0 & A_{\kappa_1}^1 - \text{Id} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_0 \\ U_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ F_{\text{inc}} \end{bmatrix}$$



Réécriture du pb à traiter

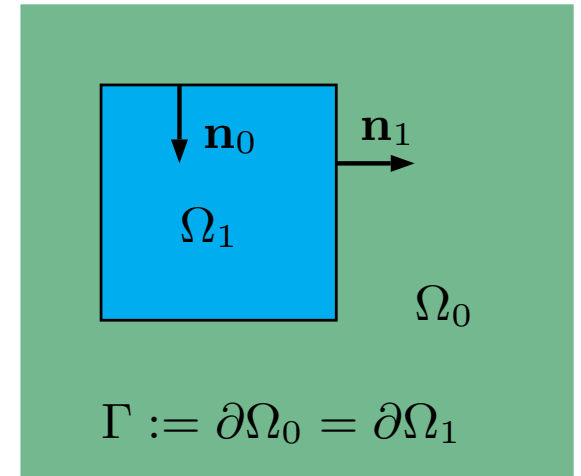
$A_{\kappa_j}^j$ = opérateur associés à Ω_j

Conditions de transmission

$$\left(\begin{bmatrix} \text{Id} & 0 \\ 0 & \text{Id} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & Q \\ Q & 0 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} U_0 \\ U_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Equations d'onde

$$\left(\begin{bmatrix} A_{\kappa_0}^0 & 0 \\ 0 & A_{\kappa_1}^1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \text{Id} & 0 \\ 0 & \text{Id} \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} U_0 \\ U_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ F_{\text{inc}} \end{bmatrix}$$



Réécriture du pb à traiter

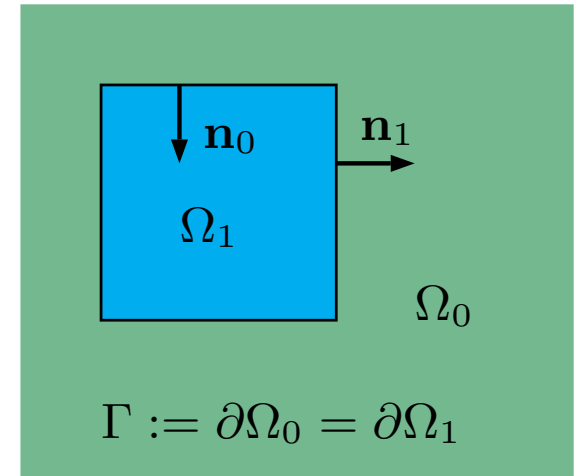
$A_{\kappa_j}^j$ = opérateur associés à Ω_j

Conditions de transmission

$$\left(\begin{bmatrix} \text{Id} & 0 \\ 0 & \text{Id} \end{bmatrix} - \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & Q \\ Q & 0 \end{bmatrix}}_{:= \Pi} \right) \cdot \begin{bmatrix} U_0 \\ U_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Equations d'onde

$$\left(\underbrace{\begin{bmatrix} A_{\kappa_0}^0 & 0 \\ 0 & A_{\kappa_1}^1 \end{bmatrix}}_{:= \mathbf{A}} - \begin{bmatrix} \text{Id} & 0 \\ 0 & \text{Id} \end{bmatrix} \right) \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} U_0 \\ U_1 \end{bmatrix}}_{:= \mathbf{U}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ F_{\text{inc}} \end{bmatrix}}_{:= \mathbf{F}}$$



Formulation multi-trace locale, avec $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

$$[(\mathbf{A} - \text{Id}) + \alpha (\text{Id} - \Pi)] \cdot \mathbf{U} = \mathbf{F}$$

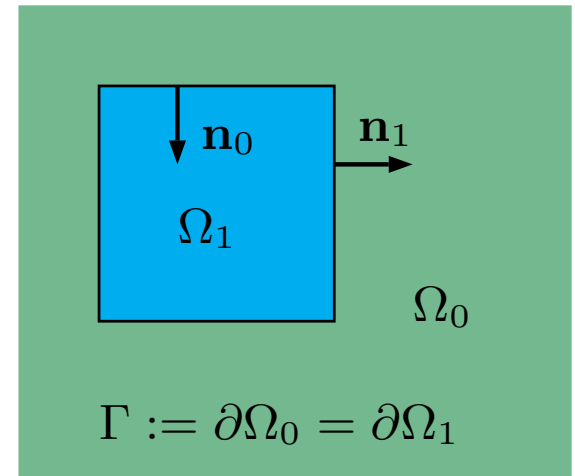
Remarques biblio

Formulation multi-trace locale

$$[(\mathbf{A} - \text{Id}) + \alpha (\text{Id} - \Pi)] \cdot \mathbf{U} = \mathbf{F} \quad (\#)$$

Remarques

- Seul le cas $\alpha = 1$ a déjà été analysé dans [Jerez & Hiptmair, 2011] qui a considéré une **géométrie avec points de jonction** et prouvé que (#) admet une unique solution (**pas d'inégalité de Garding...**)
- Le cas α arbitraire a été proposé (mais pas analysé...) dans un proceedings [Jerez, Hiptmair, Lee, Peng, 2012] consacré à la **décomposition de domaines**.



Spectre de l'opérateur multi-trace?

Formulation multi-trace locale

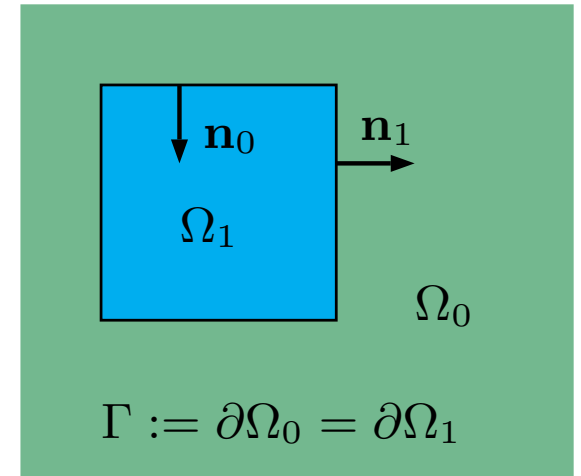
$$[(\mathbf{A} - \text{Id}) + \alpha (\text{Id} - \mathbf{\Pi})] \cdot \mathbf{U} = \mathbf{F}$$

Lemme: $\mathbf{\Pi}^2 = \text{Id}$

$$\begin{bmatrix} 0 & Q \\ Q & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & Q \\ Q & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q^2 = \text{Id} & 0 \\ 0 & Q^2 = \text{Id} \end{bmatrix}$$

Lemme: $\mathbf{A}\mathbf{\Pi} + \mathbf{\Pi}\mathbf{A} = 0$ si $\kappa_0 = \kappa_1$

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \mathbf{\Pi} &= \begin{bmatrix} A_{\kappa_0}^0 & 0 \\ 0 & A_{\kappa_1}^1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & Q \\ Q & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & A_{\kappa_0}^0 Q \\ A_{\kappa_1}^1 Q & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -QA_{\kappa_1}^1 \\ -QA_{\kappa_0}^0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -Q \\ -Q & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_{\kappa_0}^0 & 0 \\ 0 & A_{\kappa_1}^1 \end{bmatrix} = -\mathbf{\Pi} \cdot \mathbf{A} \end{aligned}$$



Spectre de l'opérateur multi-trace?

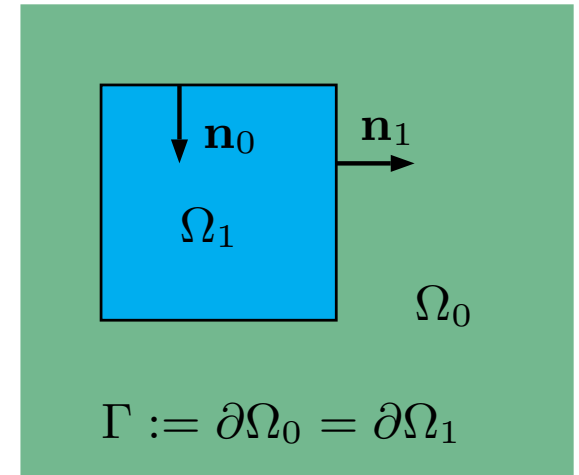
Formulation multi-trace locale

$$[(\mathbf{A} - \text{Id}) + \alpha (\text{Id} - \mathbf{\Pi})] \cdot \mathbf{U} = \mathbf{F}$$

Lemme:

i) $\mathbf{\Pi}^2 = \text{Id}$

ii) $\mathbf{A}\mathbf{\Pi} + \mathbf{\Pi}\mathbf{A} = 0$, si $\kappa_0 = \kappa_1$



$$\mathfrak{S}((\mathbf{A} - \text{Id}) + \alpha (\text{Id} - \mathbf{\Pi})) = \mathfrak{S}(\mathbf{A} - \alpha\mathbf{\Pi}) - 1 + \alpha$$

$$(\mathbf{A} - \alpha\mathbf{\Pi})^2 = \mathbf{A}^2 + \alpha^2\mathbf{\Pi}^2 - \alpha(\cancel{\mathbf{A}\mathbf{\Pi} + \mathbf{\Pi}\mathbf{A}}) = (1 + \alpha^2)\text{Id}$$

$= 0$

Bilan:

$$\mathfrak{S}((\mathbf{A} - \text{Id}) + \alpha (\text{Id} - \mathbf{\Pi})) = -1 + \alpha \pm \sqrt{1 + \alpha^2} \implies \text{injectivité pour } \alpha \neq 0.$$

Plan de l'exposé

I. Rappels sur une formule de représentation intégrale

II. Multi-trace locale: 2 sous-domaines

III. Multi-trace locale: cas général

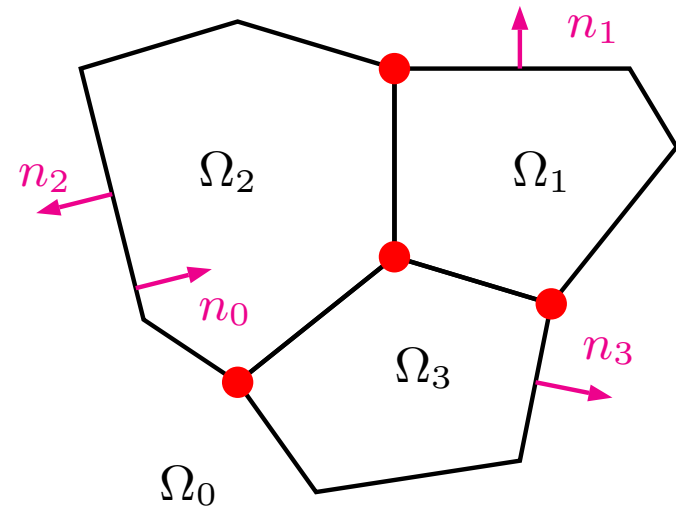
IV. Multi-trace quasi-locale

Retour au problème général...

Problème de transmission

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in H_{\text{loc}}^1(\Delta, \bar{\Omega}_j) \text{ tel que} \\ \Delta u + \kappa_j^2 u = 0 \quad \text{dans } \Omega_j, \quad j = 0, \dots, n \\ u - u_{\text{inc}} \quad \text{sortant dans } \Omega_0, \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u|_{\Gamma_j} - u|_{\Gamma_k} = 0, \\ \partial_{n_j} u|_{\Gamma_j} + \partial_{n_k} u|_{\Gamma_k} = 0, \\ \text{sur } \Gamma_j \cap \Gamma_k, \forall j, k. \end{array} \right.$$



Notations

$$\gamma^j = \begin{bmatrix} \gamma_D^j \\ \gamma_N^j \end{bmatrix} = \text{traces sur } \Gamma_j$$

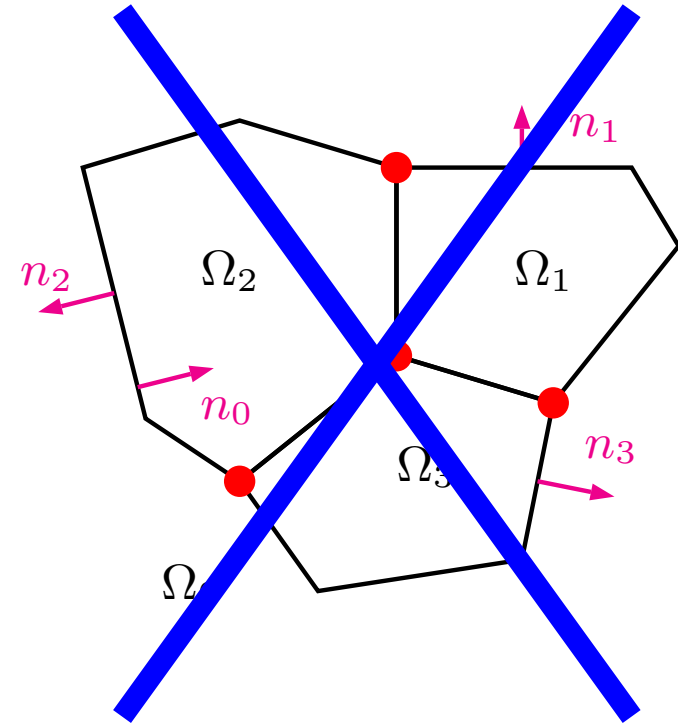
$n_j =$ normale à Γ_j .

Retour au problème général...

Problème de transmission

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in H_{\text{loc}}^1(\Delta, \bar{\Omega}_j) \text{ tel que} \\ \Delta u + \kappa_j^2 u = 0 \quad \text{dans } \Omega_j, \quad j = 0, \dots, n \\ u - u_{\text{inc}} \quad \text{sortant dans } \Omega_0, \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u|_{\Gamma_j} - u|_{\Gamma_k} = 0, \\ \partial_{n_j} u|_{\Gamma_j} + \partial_{n_k} u|_{\Gamma_k} = 0, \\ \text{sur } \Gamma_j \cap \Gamma_k, \forall j, k. \end{array} \right.$$



**Hypothèse supplémentaire:
pas de point de jonction**

Notations

$$\gamma^j = \begin{bmatrix} \gamma_D^j \\ \gamma_N^j \end{bmatrix} = \text{traces sur } \Gamma_j$$

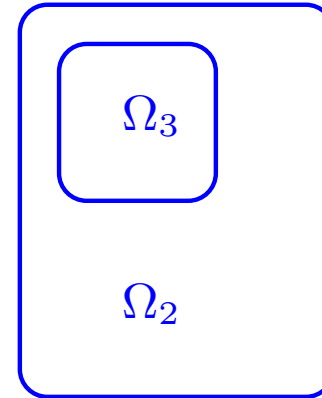
$n_j =$ normale à Γ_j .

Retour au problème général...

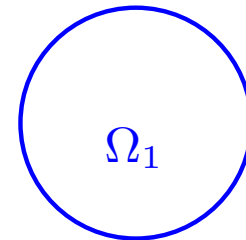
Problème de transmission

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in H_{\text{loc}}^1(\Delta, \overline{\Omega}_j) \text{ tel que} \\ \Delta u + \kappa_j^2 u = 0 \quad \text{dans } \Omega_j, \quad j = 0, \dots, n \\ u - u_{\text{inc}} \quad \text{sortant dans } \Omega_0, \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u|_{\Gamma_j} - u|_{\Gamma_k} = 0, \\ \partial_{n_j} u|_{\Gamma_j} + \partial_{n_k} u|_{\Gamma_k} = 0, \\ \text{sur } \Gamma_j \cap \Gamma_k, \forall j, k. \end{array} \right.$$



Ω_0



Notations

$$\gamma^j = \begin{bmatrix} \gamma_D^j \\ \gamma_N^j \end{bmatrix} = \text{traces sur } \Gamma_j$$

$n_j =$ normale à Γ_j .

**Hypothèse supplémentaire:
pas de point de jonction**

Espace multi/simple-trace

Espace multi-trace:

$$\mathbb{H}(\Gamma) := \mathbb{H}(\Gamma_0) \times \cdots \times \mathbb{H}(\Gamma_n) \quad \text{avec} \quad \mathbb{H}(\Gamma_j) = \mathbb{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_j) \times \mathbb{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_j).$$

Crochet de dualité sur $\mathbb{H}(\Gamma)$:

$$[[U, V]] = \sum_{j=0}^n \left[\begin{pmatrix} u_j \\ p_j \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_j \\ q_j \end{pmatrix} \right]_{\Gamma_j} = \sum_{j=0}^n \int_{\Gamma_j} u_j q_j - p_j v_j d\sigma,$$

Espace multi/simple-trace

Espace multi-trace:

$$\mathbb{H}(\Gamma) := \mathbb{H}(\Gamma_0) \times \cdots \times \mathbb{H}(\Gamma_n) \quad \text{avec} \quad \mathbb{H}(\Gamma_j) = H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_j) \times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_j).$$

Crochet de dualité sur $\mathbb{H}(\Gamma)$:

$$[[U, V]] = \sum_{j=0}^n \left[\left(\begin{array}{c} u_j \\ p_j \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} v_j \\ q_j \end{array} \right) \right]_{\Gamma_j} = \sum_{j=0}^n \int_{\Gamma_j} u_j q_j - p_j v_j d\sigma,$$

Espace simple-trace :

$$\mathbb{X}(\Gamma) = \text{adh} \left(\left\{ (\gamma^j(v))_{j=0\dots n} \mid v \in H^1(\mathbb{R}^d), \Delta v \in L^2(\mathbb{R}^d) \right\} \right) \text{ pour } \| \cdot \|_{\mathbb{H}(\Gamma)}$$

$\mathbb{X}(\Gamma)$ = éléments de $\mathbb{H}(\Gamma)$ satisfaisant les conditions de transmission.

Espace multi/simple-trace

Espace multi-trace:

$$\mathbb{H}(\Gamma) := \mathbb{H}(\Gamma_0) \times \cdots \times \mathbb{H}(\Gamma_n) \quad \text{avec} \quad \mathbb{H}(\Gamma_j) = H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_j) \times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_j).$$

Crochet de dualité sur $\mathbb{H}(\Gamma)$:

$$[[U, V]] = \sum_{j=0}^n \left[\begin{pmatrix} u_j \\ p_j \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_j \\ q_j \end{pmatrix} \right]_{\Gamma_j} = \sum_{j=0}^n \int_{\Gamma_j} u_j q_j - p_j v_j d\sigma,$$

Espace simple-trace :

$$\mathbb{X}(\Gamma) = \text{adh} \left(\left\{ (\gamma^j(v))_{j=0\dots n} \mid v \in H^1(\mathbb{R}^d), \Delta v \in L^2(\mathbb{R}^d) \right\} \right) \text{ pour } \| \cdot \|_{\mathbb{H}(\Gamma)}$$

$\mathbb{X}(\Gamma)$ = éléments de $\mathbb{H}(\Gamma)$ satisfaisant les conditions de transmission.

Lemme:

Pour $U \in \mathbb{H}(\Gamma)$, on a : $U \in \mathbb{X}(\Gamma) \iff [[U, V]] = 0 \forall V \in \mathbb{X}(\Gamma)$.

Opérateur de transmission

Pour $U = (u_j, p_j)_{j=0}^n, V = (v_j, q_j)_{j=0}^n \in \mathbb{H}(\Gamma)$ on pose

$$\Pi(U) = V \iff \begin{cases} v_j = u_k \\ q_j = -p_k \end{cases} \quad \text{sur } \Gamma_j \cap \Gamma_k$$

Propriétés immédiates

- i) $\Pi^2 = \text{Id}$,
- ii) $\Pi : \mathbb{H}(\Gamma) \rightarrow \mathbb{H}(\Gamma)$ continu (faux avec des jonctions...),
- iii) $U \in \mathbb{X}(\Gamma) \iff \Pi(U) = U$,
- iv) $[[\Pi(U), V]] = [[\Pi(V), U]] \quad \forall U, V \in \mathbb{H}(\Gamma)$.

Reformulation du problème

$$\left\{ \begin{array}{l} u|_{\Gamma_j} - u|_{\Gamma_k} = 0, \\ \partial_{n_j} u|_{\Gamma_j} + \partial_{n_k} u|_{\Gamma_k} = 0, \\ \text{sur } \Gamma_j \cap \Gamma_k, \forall j, k. \end{array} \right.$$

$$\iff (\text{Id} - \Pi)U = 0 \quad (*)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in H_{\text{loc}}^1(\Delta, \bar{\Omega}_j) \text{ tel que} \\ \Delta u + \kappa_j^2 u = 0 \quad \text{dans } \Omega_j, j = 0, \dots, n \\ u - u_{\text{inc}} \quad \text{sortant dans } \Omega_0, \end{array} \right.$$

$$(A_{\kappa_0}^0 - \text{Id})(U_0 - U_0^{\text{inc}}) = 0$$

$$\iff (A_{\kappa_1}^1 - \text{Id})U_1 = 0$$

$$\vdots$$

$$(A_{\kappa_n}^n - \text{Id})U_n = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$(\mathbf{A} - \text{Id})U = F \quad (**)$$

$$\text{avec } \mathbf{A} = \text{diag} \{ A_{\kappa_j}^j \}_{j=0 \dots n}$$

Reformulation du problème

$$\left\{ \begin{array}{l} u|_{\Gamma_j} - u|_{\Gamma_k} = 0, \\ \partial_{n_j} u|_{\Gamma_j} + \partial_{n_k} u|_{\Gamma_k} = 0, \\ \text{sur } \Gamma_j \cap \Gamma_k, \forall j, k. \end{array} \right.$$

$$\iff (\text{Id} - \Pi)U = 0 \quad (*)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in H_{\text{loc}}^1(\Delta, \bar{\Omega}_j) \text{ tel que} \\ \Delta u + \kappa_j^2 u = 0 \quad \text{dans } \Omega_j, j = 0, \dots, n \\ u - u_{\text{inc}} \quad \text{sortant dans } \Omega_0, \end{array} \right.$$

$$(A_{\kappa_0}^0 - \text{Id})(U_0 - U_0^{\text{inc}}) = 0$$

$$\iff (A_{\kappa_1}^1 - \text{Id})U_1 = 0$$

$$\vdots$$

$$(A_{\kappa_n}^n - \text{Id})U_n = 0$$

Formulation multi-trace locale

$$(**) + \alpha \cdot (*)$$

Trouver $U \in \mathbb{H}(\Gamma)$ tel que

$$[(\mathbf{A} - \text{Id}) + \alpha(\text{Id} - \Pi)]U = F.$$

$$\Updownarrow$$

$$(\mathbf{A} - \text{Id})U = F \quad (**)$$

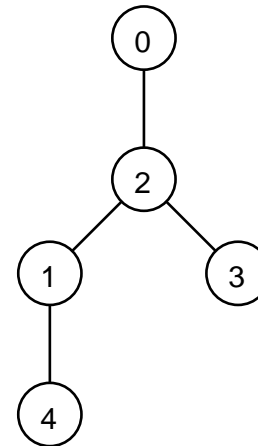
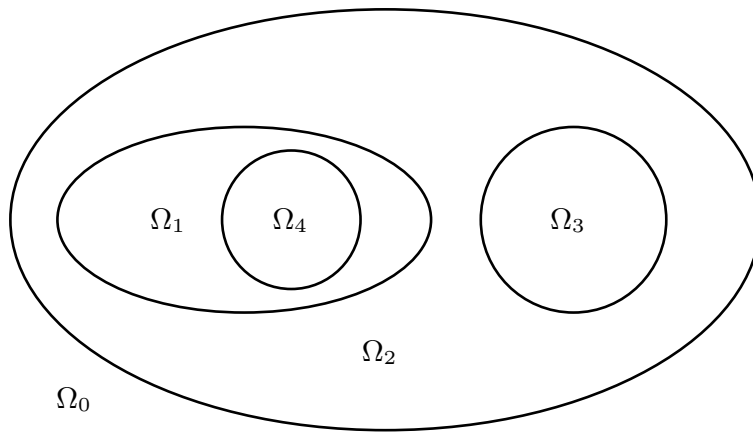
$$\text{avec } \mathbf{A} = \text{diag} \{A_{\kappa_j}^j\}_{j=0 \dots n}$$

Analyse spectrale

Théorème:

Soit $p = \text{diamètre du graphe d'adjacence de la partition en sous-domaines}$. Si $\kappa_0 = \dots = \kappa_n$ alors:

$$(\mathbf{A}\Pi + \Pi\mathbf{A})^{p+1} = 0.$$



Corollaire:

$$\mathfrak{S}((\mathbf{A} - \text{Id}) + \alpha(\text{Id} - \Pi)) = \{-1 + \alpha \pm \sqrt{1 + \alpha^2}\}$$

Caractère bien posé

Construction d'une parametrix: dans le cas où $\kappa_0 = \kappa_1 = \dots = \kappa_n$, avec le calcul qui précède, on obtient:

$$\begin{aligned} & [(\mathbf{A} - \alpha\Pi) - (1 - \alpha)\text{Id}] \cdot [(\mathbf{A} - \alpha\Pi) + (1 - \alpha)\text{Id}] \\ &= 2\alpha\text{Id} - \alpha(\mathbf{A}\Pi + \Pi\mathbf{A}) = 2\alpha(\text{Id} + \text{nilpotent}) \end{aligned}$$

Proposition

Dans le cas de κ_j arbitraires, l'opérateur multi-trace locale $(\mathbf{A} - \text{Id}) + \alpha(\text{Id} - \Pi)$ est **Fredholm d'indice 0 dès que $\alpha \neq 0$** .

Un raisonnement "classique" exploitant la condition de radiation permet d'établir l'injectivité pour des κ_j arbitraires dès que $\alpha \neq 0$. On en déduit:

Corollaire

Dans le cas de κ_j arbitraires, $(\mathbf{A} - \text{Id}) + \alpha(\text{Id} - \Pi)$ est **inversible dès que $\alpha \neq 0$** .

Bloc-Jacobi DDM

Solveur global cf [Jerez,Hiptmair, Lee, Peng, 2013]

$$[\mathbf{A} + (\alpha - 1)\text{Id}] U^{(\mathbf{k}+1)} - \alpha \Pi U^{(\mathbf{k})} = F$$

Bloc-Jacobi DDM

Solveur global cf [Jerez,Hiptmair, Lee, Peng, 2013]

$$[\mathbf{A} + (\alpha - 1)\text{Id}] U^{(\mathbf{k}+1)} = \alpha \Pi U^{(\mathbf{k})} + F$$

Bloc-Jacobi DDM

Solveur global cf [Jerez,Hiptmair, Lee, Peng, 2013]

$$U^{(\mathbf{k}+1)} = \alpha[\mathbf{A} + (\alpha - 1)\text{Id}]^{-1} \Pi U^{(\mathbf{k})} + \tilde{F}$$

Bloc-Jacobi DDM

Solveur global cf [Jerez,Hiptmair,Lee,Peng, 2013]

$$U^{(\mathbf{k}+1)} = \alpha \underbrace{[\mathbf{A} + (\alpha - 1)\text{Id}]^{-1}}_{\substack{= \frac{1}{\alpha(2 - \alpha)} [\mathbf{A} + (1 - \alpha)\text{Id}]}} \Pi U^{(\mathbf{k})} + \tilde{F}$$

Bloc-Jacobi DDM

Solveur global cf [Jerez,Hiptmair, Lee, Peng, 2013]

$$U^{(k+1)} = \frac{1}{2 - \alpha} [\mathbf{A} + (1 - \alpha)\text{Id}] \Pi U^{(k)} + \tilde{F}$$

Bloc-Jacobi DDM

Solveur global cf [Jerez,Hiptmair,Lee,Peng, 2013]

$$U^{(\mathbf{k}+1)} = \frac{1}{2-\alpha} \underbrace{[\mathbf{A} + (1-\alpha)\text{Id}] \Pi}_{\stackrel{\text{def}}{=} J_\alpha} U^{(\mathbf{k})} + \tilde{F}$$

Proposition

Dans le cas où $\kappa_0 = \dots = \kappa_n$, on a $\mathfrak{S}(J_\alpha) = \left\{ \pm \sqrt{\frac{\alpha}{\alpha-2}} \right\}$

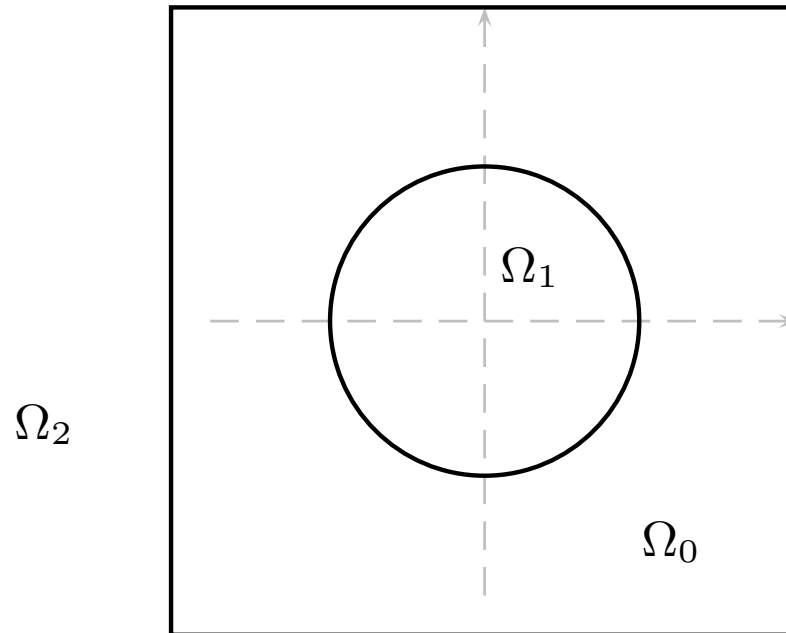
Remarques

- 1) Pour des κ_j arbitraires, ce résultat fournit les points d'accumulation du spectre.
- 2) La valeur $\alpha = 0$ apparait comme optimale: $J_{\alpha=0}$ est nilpotent (et garde un sens!) et correspond à l'itération de Jacobi pour le problème:

$$[(\mathbf{A} - \text{Id}) + 2(\text{Id} - \Pi)] \cdot \Pi(\tilde{U}) = -2\tilde{F}.$$

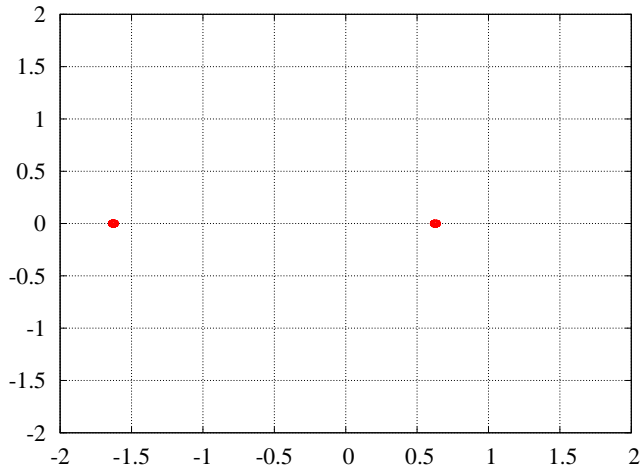
Confirmation numérique

$$\mathfrak{S} \left((\mathbf{A} - \text{Id}) + \alpha(\text{Id} - \Pi) \right) = ?$$

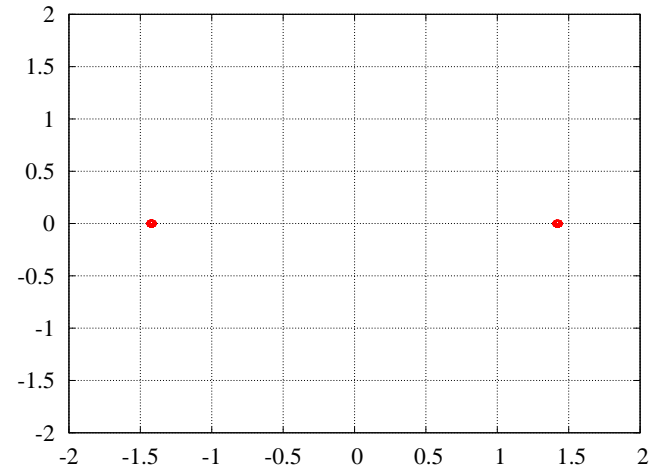


Confirmation numérique

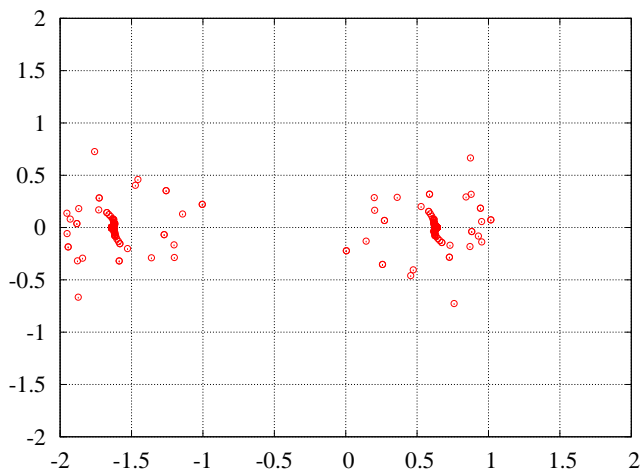
$$\mathfrak{S}((\mathbf{A} - \text{Id}) + \alpha(\text{Id} - \Pi)) = ?$$



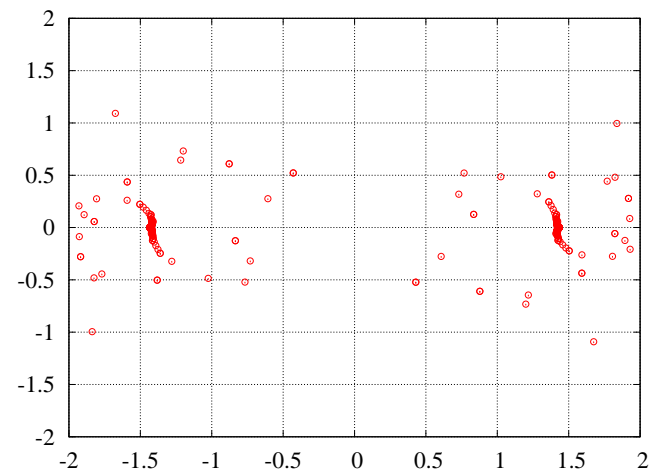
$$\alpha = 0.5, \kappa_0 = \kappa_1 = \kappa_2 = 1$$



$$\alpha = 1, \kappa_0 = \kappa_1 = \kappa_2 = 1$$



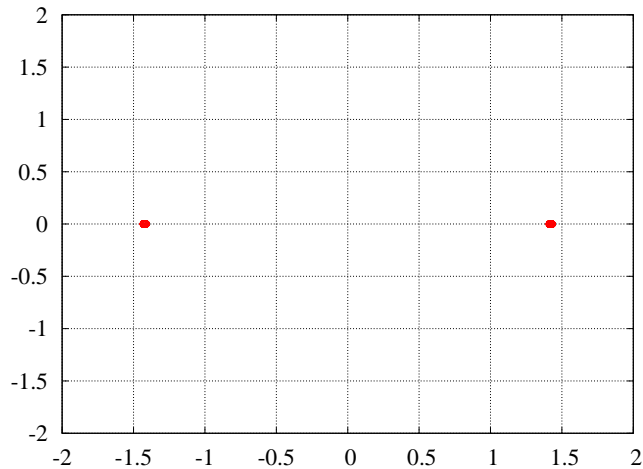
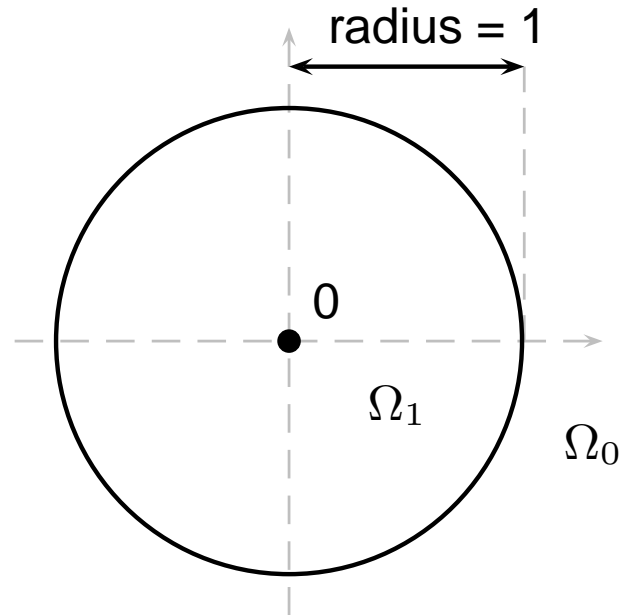
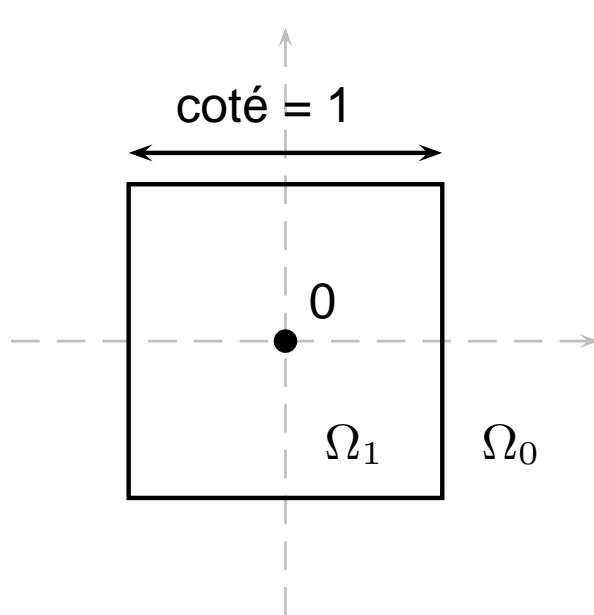
$$\alpha = 0.5, \kappa_0 = 5, \kappa_1 = 1, \kappa_2 = 2$$



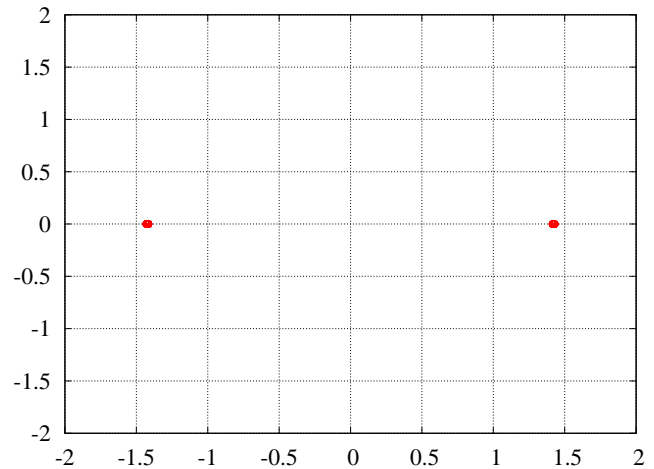
$$\alpha = 0.5, \kappa_0 = 5, \kappa_1 = 1, \kappa_2 = 2$$

Confirmation numérique

$$\mathfrak{S}((\mathbf{A} - \text{Id}) + \alpha(\text{Id} - \Pi)) = ?$$



$$\alpha = 1., \kappa_0 = \kappa_1 = \kappa_2 = 1$$



$$\alpha = 1., \kappa_0 = \kappa_1 = \kappa_2 = 1$$

Plan de l'exposé

I. Rappels sur une formule de représentation intégrale

II. Multi-trace locale: 2 sous-domaines

III. Multi-trace locale: cas général

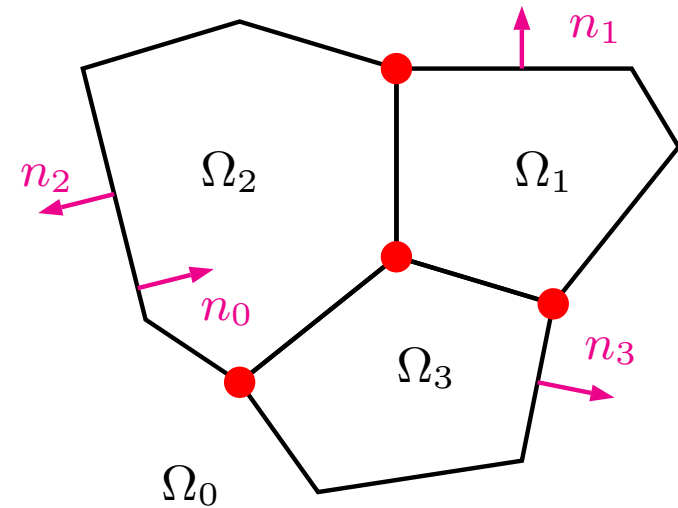
IV. Multi-trace quasi-locale

Problème général... avec jonctions

Problème de transmission

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in H_{\text{loc}}^1(\Delta, \bar{\Omega}_j) \text{ tel que} \\ \Delta u + \kappa_j^2 u = 0 \quad \text{dans } \Omega_j, \quad j = 0, \dots, n \\ u - u_{\text{inc}} \quad \text{sortant dans } \Omega_0, \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u|_{\Gamma_j} - u|_{\Gamma_k} = 0, \\ \partial_{n_j} u|_{\Gamma_j} + \partial_{n_k} u|_{\Gamma_k} = 0, \\ \text{sur } \Gamma_j \cap \Gamma_k, \forall j, k. \end{array} \right.$$



Notations

$$\gamma^j = \begin{bmatrix} \gamma_D^j \\ \gamma_N^j \end{bmatrix} = \text{traces sur } \Gamma_j$$

$n_j =$ normale à Γ_j .

Rappel: opérateur de transmission

La formulation multi-trace locale exprime les conditions de transmission par $\Pi(U) = U$ où

$$\Pi(U) = V \iff \begin{cases} v_j = u_k \\ q_j = -p_k \end{cases} \quad \text{sur } \Gamma_j \cap \Gamma_k$$

Propriétés immédiates

- i) $\Pi^2 = \text{Id}$,
- ii) $U \in \mathbb{X}(\Gamma) \iff \Pi(U) = U$,
- iii) $[[\Pi(U), V]] = [[\Pi(V), U]] \quad \forall U, V \in D(\Pi) \subsetneq \mathbb{H}(\Gamma)$.

Problème: Π n'est plus un opérateur continu sur $\mathbb{H}(\Gamma)$.

Question

Peut-on construire une formulation multi-trace "régularisée" avec un autre un opérateur $\tilde{\Pi} : \mathbb{H}(\Gamma) \rightarrow \mathbb{H}(\Gamma)$ continu et satisfaisant i)-ii)-iii)?

Opérateur multi-potentiel

On propose une construction directement inspirée de l'opérateur multi-potentiel introduit dans [Claeys, 2011]. Rappel: \mathcal{G}_0 = noyau de Green du Laplacien. On pose

$$K^j \begin{pmatrix} v \\ q \end{pmatrix}(\mathbf{x}) := \int_{\Gamma_j} \mathcal{G}_0(\mathbf{x} - \mathbf{y})q(\mathbf{y}) + \mathbf{n}_j(\mathbf{y}) \cdot (\nabla \mathcal{G}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{y})v(\mathbf{y}) d\sigma(\mathbf{y})$$

$$K(U)(\mathbf{x}) := \sum_{j=0}^n K^j(U_j)(\mathbf{x}) \quad \text{pour } U = (U_j)_{j=0}^n \in \mathbb{H}(\Gamma)$$

On note $\gamma(u) := (\gamma^0(u), \dots, \gamma^n(u))$, de sorte que $\gamma \cdot K : \mathbb{H}(\Gamma) \rightarrow \mathbb{H}(\Gamma)$ est une matrice pleine d'opérateurs intégraux continus

$$\gamma \cdot K(U) := \begin{bmatrix} \gamma^0 \cdot K^0 & \cdots & \gamma^0 \cdot K^n \\ \vdots & & \vdots \\ \gamma^n \cdot K^0 & \cdots & \gamma^n \cdot K^n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_0 \\ \vdots \\ U_n \end{bmatrix}$$

Opérateur multi-potentiel

Théorème

L'opérateur $\gamma \cdot K : \mathbb{H}(\Gamma) \rightarrow \mathbb{H}(\Gamma)$ est un projecteur continu vérifiant

$$\text{Ker}(\gamma \cdot K) = \text{Im}(\text{Id} - \gamma \cdot K) = \mathbb{X}(\Gamma)$$

$$[[\gamma \cdot K(U), V]] = [[\gamma \cdot K(V), U]] + [[U, V]] \quad \forall U, V \in \mathbb{H}(\Gamma)$$

Corollaire

L'opérateur $T := \text{Id} - 2\gamma \cdot K$ vérifie:

- i) $T^2 = \text{Id}$,
- ii) $U \in \mathbb{X}(\Gamma) \iff T(U) = U$,
- iii) $[[T(U), V]] = [[T(V), U]] \quad \forall U, V \in \mathbb{H}(\Gamma)$.

Remarque: ces propriétés restent vraies si l'on remplace \mathcal{G}_0 par *n'importe quelle* fonction régulière (pas forcément un noyau de Green!) qui coïncide avec \mathcal{G}_0 dans un voisinage de 0.

Quasi-localisation

L'opérateur continu $T : \mathbb{H}(\Gamma) \rightarrow \mathbb{H}(\Gamma)$ peut tout à fait être utilisé pour exprimer les conditions de transmission. Mais il n'est **pas local**, contrairement à Π .

On considère donc un autre opérateur continu $\tilde{\Pi} : \mathbb{H}(\Gamma) \rightarrow \mathbb{H}(\Gamma)$ obtenu comme une combinaison de Π et T ,

$$[[\tilde{\Pi}(U), V]] := [[\Pi(U), \chi V]] + [[T(\psi U), \psi V]]$$

$\psi :=$ troncature $\neq 0$ localisée autour des jonctions,

$$\chi := 1 - \psi^2.$$

Lemme

i) $\tilde{\Pi}^2 = \text{Id}$,

ii) $U \in \mathbb{X}(\Gamma) \iff \tilde{\Pi}(U) = U$,

iii) $[[\tilde{\Pi}(U), V]] = [[\tilde{\Pi}(V), U]] \forall U, V \in \mathbb{H}(\Gamma)$.

Remarque: rien n'interdit de considérer $\psi = 1$ auquel cas $\tilde{\Pi} = T$.

Formulation quasi-locale

La nouvelle formulation multi-trace quasi-locale est obtenue en substituant $\tilde{\Pi}$ à Π .
Elle s'écrit: trouver $U \in \mathbb{H}(\Gamma)$ tel que

$$(\mathbf{A} - \tilde{\Pi})U = F.$$

Lemma

Soit $\Theta(V) = (v_j, -q_j)_{j=0}^n$ pour $V = (v_j, q_j)_{j=0}^n$. Alors il existe $R : \mathbb{H}(\Gamma) \rightarrow \mathbb{H}(\Gamma)$ compact tel que: $\Re\{[(\tilde{\Pi} + R)(U), \Theta(\bar{U})]\} \leq 0 \forall U \in \mathbb{H}(\Gamma)$

Corollaire: Inégalité de Garding

Il existe une constante $C > 0$ et un opérateur compact $R : \mathbb{H}(\Gamma) \rightarrow \mathbb{H}(\Gamma)$ tels que:

$$\Re\{[(\mathbf{A} - \tilde{\Pi} + R)U, \Theta(\bar{U})]\} \geq C\|U\|_{\mathbb{H}(\Gamma)}^2 \quad \forall U \in \mathbb{H}(\Gamma)$$

Remarque: Injectivité de $\mathbf{A} - \tilde{\Pi}$ si

- 1) le noyau de $\tilde{\Pi}$ est réel
- 2) ψ est "suffisamment" localisée autour des jonctions

Cas test

Milieu de propagation

$$\overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2 = \overline{D}(0, 1)$$

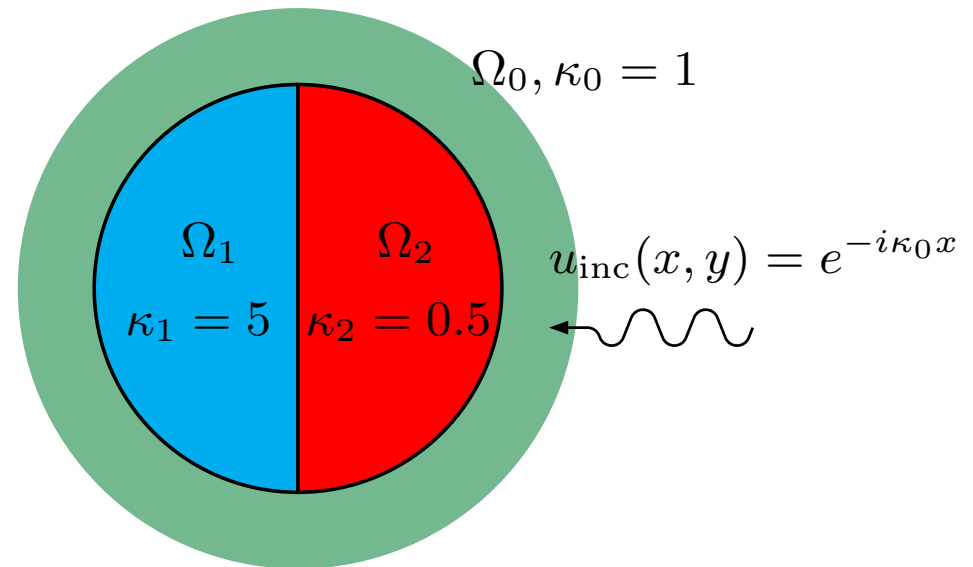
Problème de transmission

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in H_{\text{loc}}^1(\Delta, \overline{\Omega}_j) \text{ tel que} \\ \Delta u + \kappa_j^2 u = 0 \quad \text{dans } \Omega_j \\ u - u_{\text{inc}} \quad \text{sortant dans } \Omega_0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u|_{\partial\Omega_j} - u|_{\partial\Omega_k} = 0 \\ \partial_{n_j} u|_{\partial\Omega_j} + \partial_{n_k} u|_{\partial\Omega_k} = 0 \\ \text{sur } \partial\Omega_j \cap \partial\Omega_k, \forall j, k \end{array} \right.$$

Discretisation:

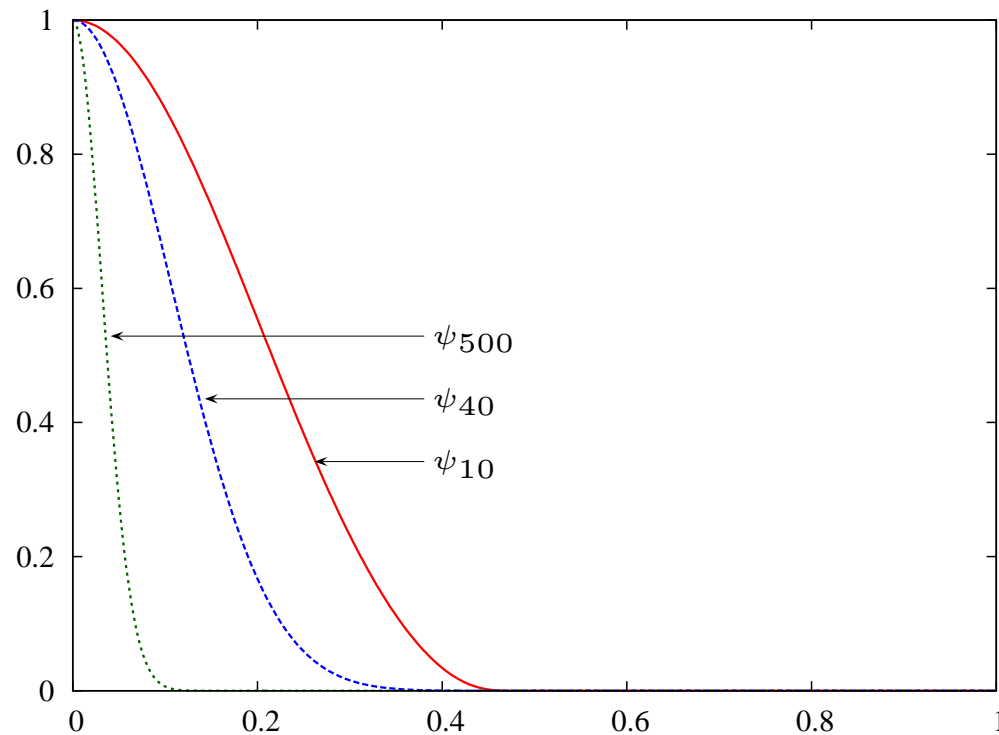
Fonctions \mathbb{P}_1 -Lagrange pour les traces Dirichlet et Neumann.



Choix de la troncature

$$\psi(\mathbf{x}) := \psi_\alpha(\mathbf{x} - \mathbf{x}_+) + \psi_\alpha(\mathbf{x} - \mathbf{x}_-)$$

with $\psi_\alpha(\mathbf{y}) = \exp(-\alpha|\mathbf{y}|^2) \exp\left(\frac{1}{1 - 1/(2|\mathbf{y}|)^2}\right) \mathbf{1}_{2|\mathbf{y}| < 1}$



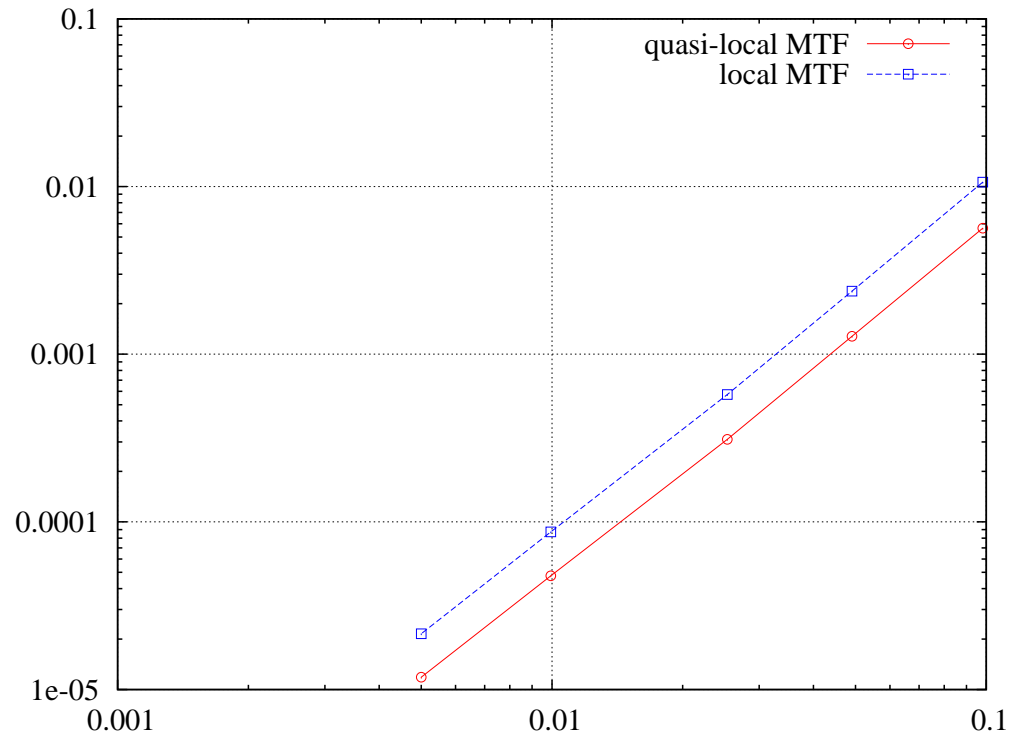
Consistance ($\alpha = 40$)

h	$\ U_h^{QL} - U_h^{STF}\ _{\mathbb{H}}$	$\ U_h^L - U_h^{STF}\ _{\mathbb{H}}$
0.1	0.00563797	0.010623
0.05	0.00127879	0.00237613
0.025	0.000310327	0.000574992
0.01	4.77015e-05	8.70664e-05
0.005	1.18548e-05	2.15064e-05

U_h^{STF} : PMCHWT

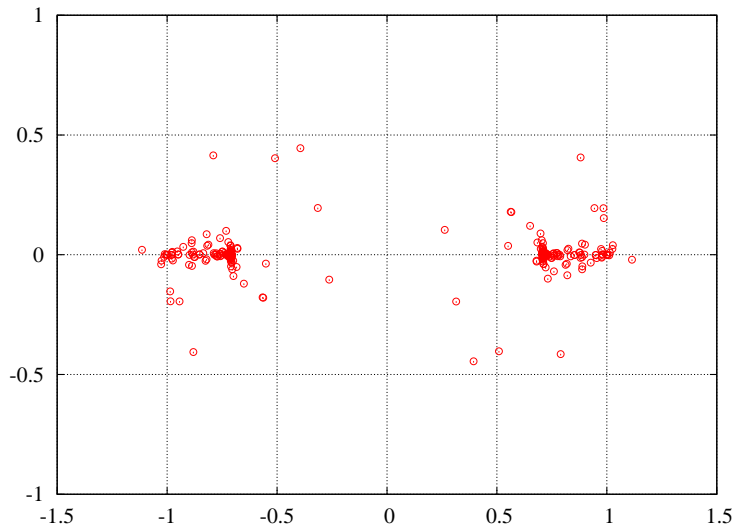
U_h^L : multi-trace locale

U_h^{QL} : multi-trace quasi-locale

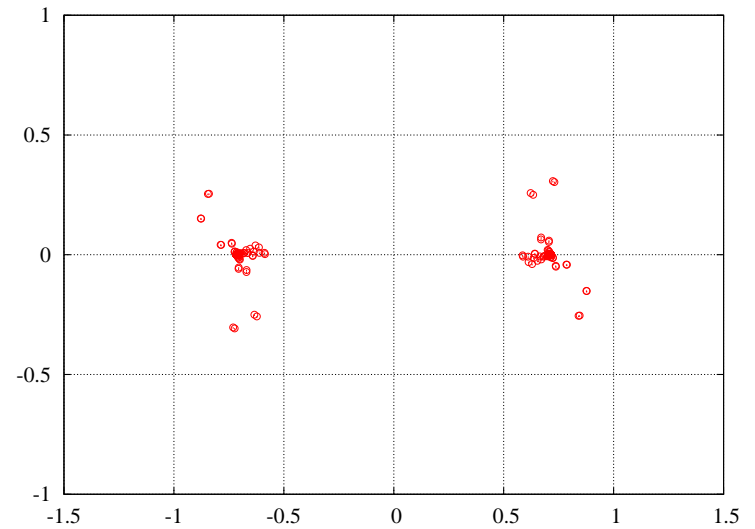


Spectre des opérateurs ($\alpha = 40$)

Matrices: $M_h \leftrightarrow [[\cdot, \cdot]]$
 $A_h^L \leftrightarrow [[(\mathbf{A} - \Pi)\cdot, \cdot]]$
 $A_h^{QL} \leftrightarrow [[(\mathbf{A} - \tilde{\Pi})\cdot, \cdot]]$



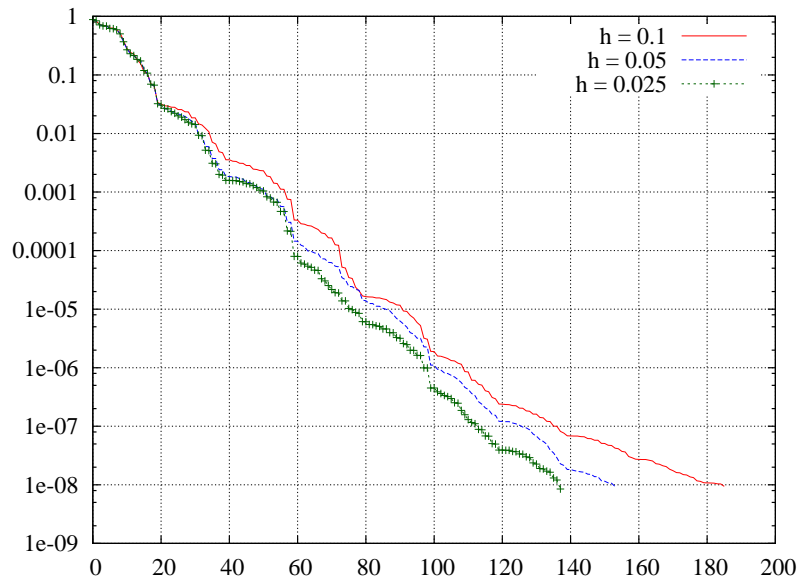
$$\mathfrak{S}(M_h^{-1} A_h^{QL} / 2)$$



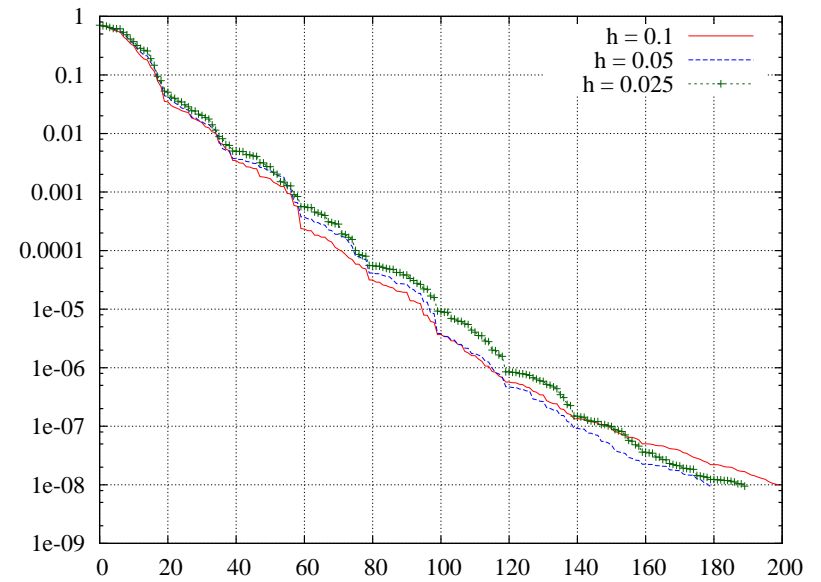
$$\mathfrak{S}(M_h^{-1} A_h^L / 2)$$

Historiques GMRes ($\alpha = 40$)

Norme2 du résidu GMRes avec un restart de 20



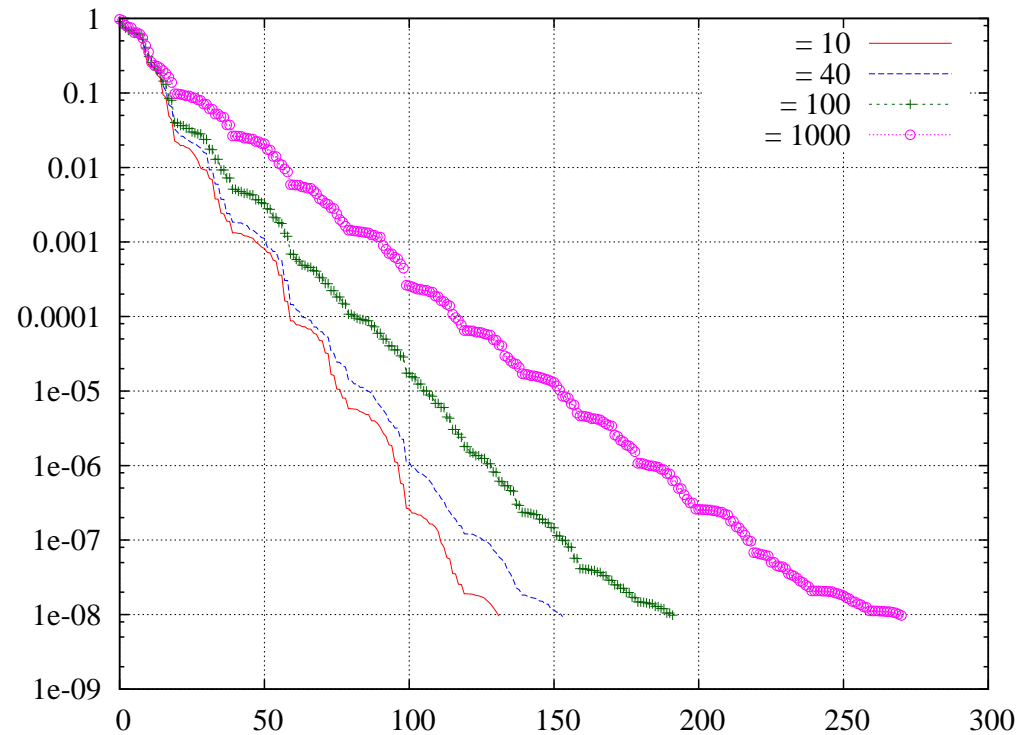
avec $M_h^{-1} A_h^{QL}$



avec $M_h^{-1} A_h^L$

GMRes en fonction de α

Norme2 du résidu GMRes avec un restart de 20 appliqué à la formulation quasi-locale avec $h = 20$.



Conclusion

Bibliographie

- R. Hiptmair and C. Jerez-Hanckes. *Multiple traces boundary integral formulation for Helmholtz transmission problems*. Adv. Comput. Math., 37(1): 39-91,2012.
- X. Claeys, R. Hiptmair, and C. Jerez-Hanckes. *Multi-trace boundary integral equations*. In Direct and Inverse Problems in Wave Propagation and Applications. I. Graham, U. Langer, M. Sini, M. Melenk, 2012.
- R. Hiptmair, C. Jerez-Hanckes, J. Lee, and Z. Peng. *Domain decomposition for boundary integral equations via local multi-trace formulations*. Proc. DD XXI, Technical Report 2013-08, SAM ETH Zürich, 2013.
- V. Dolean et M. Gander, *Multitrace formulations and Dirichlet-Neumann algorithms*, Proc. DD XXII.
- X. Claeys, *Quasi-local multi-trace boundary integral formulations*, available on HAL.

Possibles voix de recherche futures

- Analyse spectrale de la formulation multi-trace locale dans le cas de géométries avec point de jonction.
- Utilisation des opérateurs de transmission quasi-locaux en conjonctions avec des méthodes de type Schwarz optimisées (OSM).
- Implémentation des formulations multi-traces sur des cas tests plus réalistes et tests de DDM classiques (Jacobi, Gauss-Seidel, Krylov, . . .).
- Utilisation d'un solveur grossier basé sur la formulation multi-trace globale pour préconditionner une DDM classique appliquée à la formulation multi-trace locale.

Merci pour votre attention