

# Simulation par méthode particulière de réactions de fusion dans un plasma



Frédérique Charles<sup>1</sup>  
Stéphane Dellacherie<sup>2</sup>

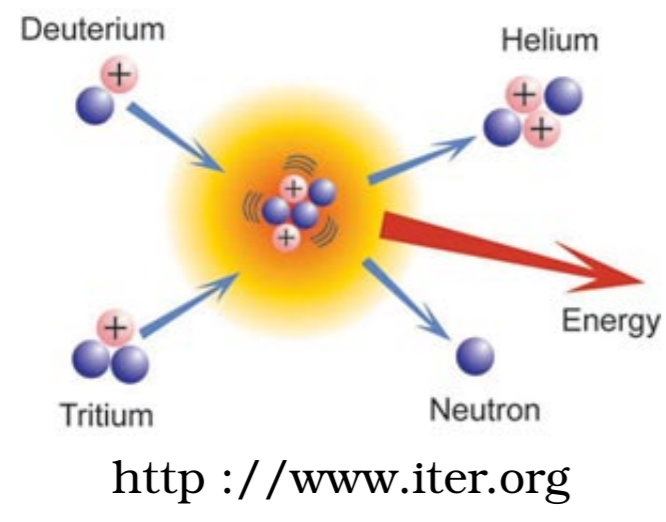


(2) CEA DEN/DANS/DM2S/SFME/LMEC  
91 191 Gif-sur-Yvette Cedex

frederique.charles@upmc.fr

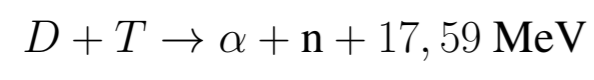
Laboratoire Jacques-Louis Lions,  
Université Pierre et Marie Curie, CNRS UMR  
7598

## Contexte



➤ L'un des objectifs du futur réacteur ITER est d'obtenir des réactions de fusion entre Deuterium et Tritium dans un plasma confiné.

➤ Les particules  $\alpha$  ont un rôle significatif : elles participent au chauffage du plasma et contribuent à l'évolution du champ électrique.



## 1. Modèle cinétique

Modèle (cas homogène en espace) [2]

$f_a : (t, v) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3 \mapsto f_a(t, v_a) \geq 0$  : fonction de densité en nombre de chaque espèce,  $a \in \{D, T, \alpha, n\}$ .

$$\begin{cases} \frac{\partial f_D}{\partial t} = -P_D(f_D, f_T), & \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} = G_\alpha(f_D, f_T), \\ \frac{\partial f_T}{\partial t} = -P_T(f_D, f_T), & \frac{\partial f_n}{\partial t} = \frac{G_n(f_D, f_T)}{\text{terme de gain}} \end{cases}$$

Hypothèses

$m_D v_D^2 + m_T v_T^2 + 2Q = m_\alpha v_\alpha^2 + m_n v_n^2$

$m_D + m_T = m_\alpha + m_n$

$m_D v_D + m_T v_T = m_\alpha v_\alpha + m_n v_n$

- L'énergie produite par le défaut de masse  $Q = \Delta M c^2 = 17,59 \text{ MeV}$  est complètement convertie en énergie sur les particules  $\alpha$  et les neutrons.
- Le défaut de masse est négligeable comparé aux masses des particules
- La quantité de mouvement est conservée au cours d'une réaction de fusion

Expressions des opérateurs

$$P_D(f_D, f_T)(v) = f_D(v) \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{S}^2} f_T(v_*) q(|v - v_*|, \Omega) dv_* d\Omega,$$

$$\int_{\mathbb{R}^3} G_\alpha(f_D, f_T)(v) \varphi(v) dv = \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{S}^2} f_D(v) f_T(v_*) \varphi(v_\alpha) q(|v - v_*|, \Omega) dv dv_* d\Omega,$$

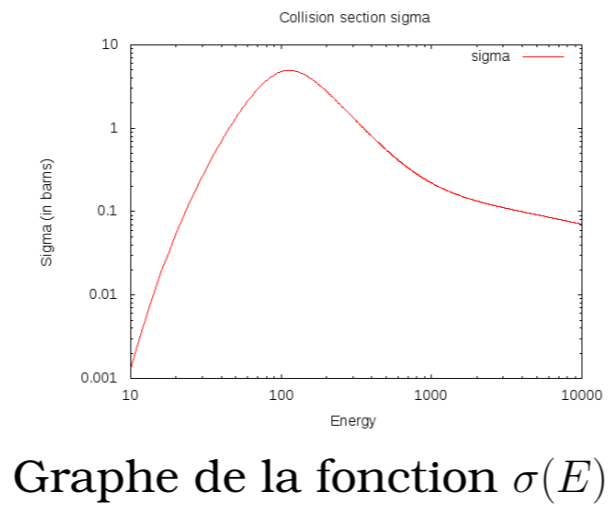
avec  $\begin{cases} v_\alpha = v_\alpha(v, v_*, \Omega) = \frac{m_D v + m_T v_*}{m_D + m_T} + \frac{\mu_{\alpha n}}{m_\alpha} \sqrt{\zeta^2 + \frac{\mu_{DT}}{\mu_{\alpha n}} |v - v_*|^2}, \\ v_n = v_n(v, v_*, \Omega) = \frac{m_D v + m_T v_*}{m_D + m_T} - \frac{\mu_{\alpha n}}{m_n} \sqrt{\zeta^2 + \frac{\mu_{DT}}{\mu_{\alpha n}} |v - v_*|^2}. \end{cases}$  où  $\mu_{\alpha n} = \frac{m_\alpha m_n}{m_\alpha + m_n}$  et  $\zeta = \sqrt{2Q/\mu_{\alpha n}}$

Collision kernel  $q$

• Section de collision "fusion" [3]

$$q(|v - v_*|) = |v - v_*| \frac{p_5 + p_2 / [(p_4 - p_3 E)^2 + 1]}{E [\exp(p_1 / \sqrt{E}) - 1]}, \text{ avec } E = \frac{1}{2} m_D |v - v_*|^2$$

• Section de collision Maxwellienne  $q(|v - v_*|) = \frac{\lambda}{4\pi}$



Modèle asymptotique

• Vitesses thermiques, pour  $a \in \{D, T\}$  :

$$V_a^{th} := \sqrt{2\theta_a/m_a}, \text{ où } \theta_a(t) = \frac{m_a}{3 \langle f_a(t, \cdot) \rangle} \langle f_a(t, \cdot) (v - u_a)^2 \rangle$$

• Petit paramètre

$$\varepsilon = \frac{\max(V_D^{th}, V_T^{th})}{\sqrt{2Q/\mu_{\alpha n}}} [\sim 0.015 \text{ for } \theta_D = \theta_T = 10 \text{ keV}]$$

**Proposition 1** [Dellacherie, Sentis [2]] : Si  $q \in L^\infty(\mathbb{R})$ ,  $f_D, f_T \in L^1(\mathbb{R}^3; (1 + |v|^2) dv)$ , alors

$$\int_{\mathbb{R}^3} \varphi(v) \frac{G_\alpha(f_D, f_T)}{(G_\alpha(f_D, f_T))} dv \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{S}^2} \varphi(\bar{V}_\alpha \Omega) d\Omega, \quad \forall \varphi \in C(\mathbb{R}^3), \text{ où } \bar{V}_\alpha := \frac{\mu_{\alpha n}}{m_\alpha} \zeta;$$

⇒ Modèle approché pour  $\varepsilon \ll 1$

$$\begin{cases} \frac{\partial f_D}{\partial t} = -P_D(f_D, f_T), & \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} = \frac{1}{4\pi} \tau(f_D, f_T) \delta_\alpha, \\ \frac{\partial f_T}{\partial t} = -P_T(f_D, f_T), & \frac{\partial f_n}{\partial t} = \frac{1}{4\pi} \tau(f_D, f_T) \delta_n, \end{cases} \text{ où } \int_{\mathbb{R}^3} \delta_a(v) \varphi(v) dv = \int_{\mathbb{S}^2} \varphi(\bar{V}_\alpha \Omega) d\Omega$$

$\tau(f_D, f_T)$  : taux de réaction nucléaire

$$\tau(f_D, f_T) = \langle G_\alpha(f_D, f_T) \rangle = \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{S}^2} f_D(t, v) f_T(t, v_*) q(|v - v_*|, \Omega) d\Omega dv dv_*.$$

## 2. Méthode particulière Monte-Carlo

Principe des méthodes particulières

$$f_a(v, t = 0) \approx f_a^0(v) := \sum_{k=1}^{N_a^0} \omega \delta(v - V_{a,k}^0) \rightarrow f_a(v, t = t^n) \approx f_a^n(v) := \sum_{k=1}^{N_a^n} \omega \delta(v - V_{a,k}^n)$$

$V_{a,k}^0$  : vitesses initiales des macro-particules |  $V_{a,k}^n$  : vitesses des macro-particules à  $t = t^n$   
 $\omega$  : poids numérique des particules,  $\omega = \rho_a^{\text{ini}} / N_a^0$  |  $N_a^n$  : nombre de macro-particules de  $a$  à  $t = t^n$

Discrétisation en temps

$$f_D^{n+1} = f_D^n - \Delta t \frac{\widetilde{P}_D(f_D^n, f_T^n)}{\text{Monte-Carlo approximation of } P_D(f_D^n, f_T^n)}, \quad f_\alpha^{n+1} = f_\alpha^n + \Delta t \frac{\widetilde{G}_\alpha(f_D^n, f_T^n)}{\text{Monte-Carlo approximation of } G_\alpha(f_D^n, f_T^n)}$$

Approximation Monte-Carlo des opérateurs de gain et pertes

**Proposition 2** [1] Soit  $\varphi$  une fonction test. Sous l'hypothèse  $\Delta t \leq \frac{1}{4\pi \|q\|_\infty \omega} \min\left(\frac{1}{N_D^n}, \frac{1}{N_T^n}\right)$ , on a

$$\Delta t \int_{\mathbb{R}^3} \varphi(v) P_D(f_D^n, f_T^n)(v) dv = \eta^n \frac{\omega}{\#P} \sum_{k=1}^{N^n} \varphi(V_{D,r_k}^n) \int_0^1 1_{\{0 \leq u \leq p_{r_k, s_k}^n\}} du$$

et

$$\Delta t \int_{\mathbb{R}^3} \varphi(v) G_\alpha(f_D^n, f_T^n)(v) dv = \eta^n \frac{\omega}{\#P} \sum_{k=1}^{N^n} \int_{\mathbb{S}^2} \int_0^1 \varphi(V_{\alpha, r_k, s_k}^n) 1_{\{0 \leq u \leq p_{r_k, s_k}^n\}} du \frac{d\Omega}{4\pi}$$

avec

$$V_{\alpha, r_k, s_k}^n = v_\alpha(V_{D, r_k}^n, V_{T, s_k}^n, \Omega),$$

$$N^n = \lfloor N_D^n N_T^n \omega \Delta t 4\pi \|q\|_\infty \rfloor, \quad \eta^n = \frac{N_D^n N_T^n \omega \Delta t 4\pi \|q\|_\infty}{N^n} \sim 1, \quad p_{r_k, s_k}^n = \frac{q(|V_{D, r_k}^n - V_{T, s_k}^n|)}{\|q\|_\infty} \in [0, 1],$$

$P$  étant l'ensemble des façons possibles de faire  $N^n$  paires distinctes  $(r_k, s_k)_{1 \leq k \leq N^n}$  parmi l'ensemble  $\{1, \dots, N_D^n\} \times \{1, \dots, N_T^n\}$ .

Soient alors

$$\Delta t \widetilde{P}_D(f_D^n, f_T^n) = \omega \sum_{k=1}^{N^n} \varphi(V_{D, r_k}^n) 1_{\{0 \leq u_k \leq p_{r_k, s_k}^n\}} \quad \text{et} \quad \Delta t \widetilde{G}_\alpha(f_D^n, f_T^n) = \omega \sum_{k=1}^{N^n} \varphi(V_{\alpha, r_k, s_k}^n) 1_{\{0 \leq u_k \leq p_{r_k, s_k}^n\}}$$

**Algorithme**

• Sélection des  $N^n$  paires de macro-particules (D-T) dont les indices  $(r_k, s_k)_{k \in \{1, \dots, N^n\}}$  sont tirés avec une loi uniforme parmi les  $\#P$  paires possibles.

• Pour chaque paire de vitesses  $(V_{D, r_k}, V_{T, s_k})$ , on tire  $u_k \sim \mathcal{U}([0, 1])$  et on calcule

$$p_{r_k, s_k} = \frac{q(|V_{D, r_k} - V_{T, s_k}|)}{\|q\|_\infty}$$

Si  $p_{r_k, s_k} > u_k$ , les deux macro-particules de vitesses  $V_{D, r_k}$  et  $V_{T, s_k}$  fusionnent.

• Pour chaque paire interagissant, on tire  $\Omega_k$  avec une loi uniforme sur  $\mathbb{S}^2$  et on crée une paire de macro-particules ( $\alpha$ -n), de vitesses  $V_{\alpha, r_k, s_k, \Omega_k}$  and  $V_{n, r_k, s_k, \Omega_k}$ .

## 3. Résultats numériques

➤ Méthode numérique validée grâce à des solutions explicites dans le cas d'une section maxwellienne.

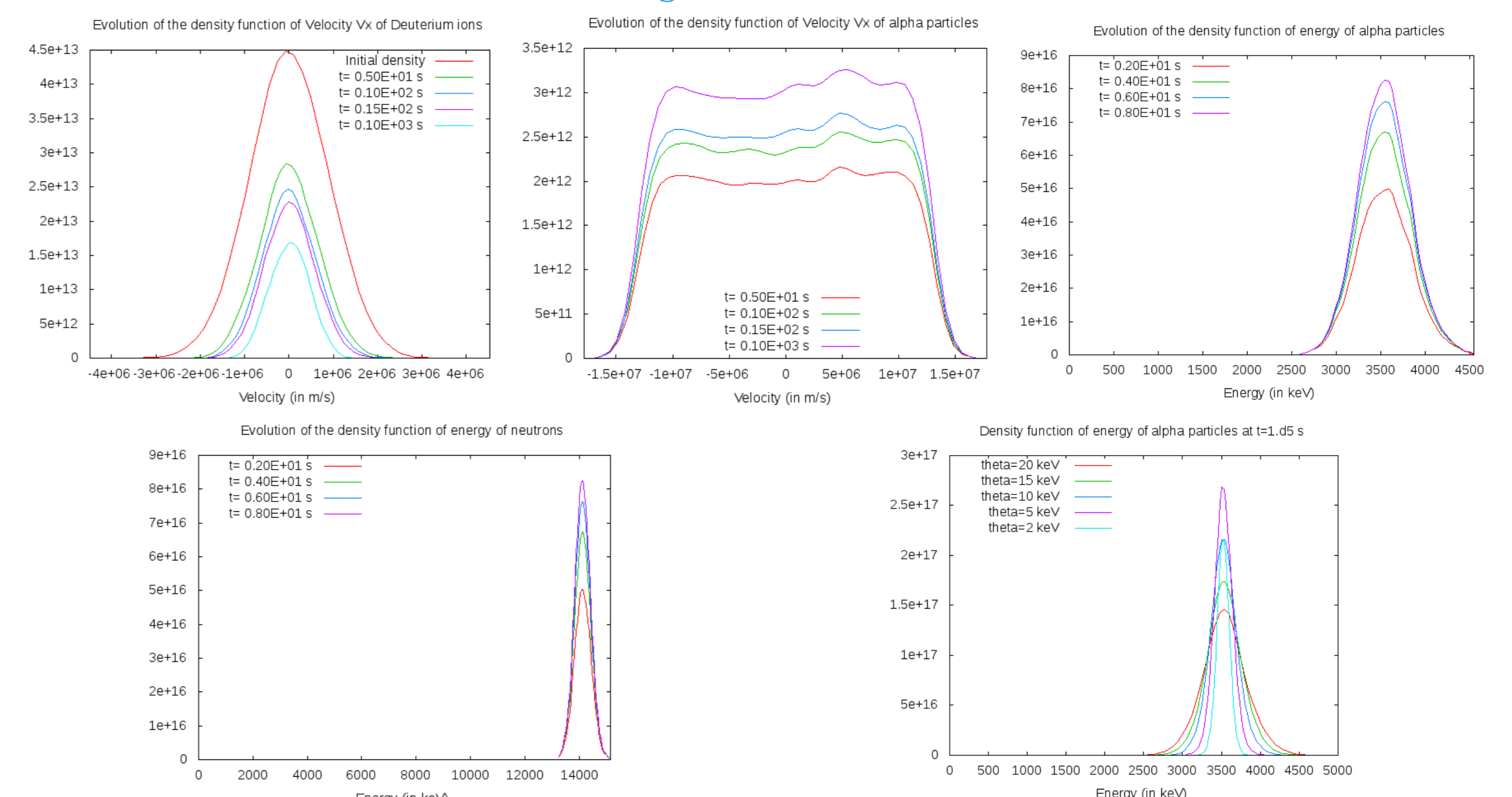
➤ Densités initiales

$$f_a^{\text{ini}}(v) = \frac{\rho_a^{\text{ini}}}{(2\pi \theta_a^{\text{ini}})^{3/2}} \exp\left(-\frac{|v - u_a^{\text{ini}}|^2}{2\theta_a^{\text{ini}}}\right), \quad a \in \{D, T\}, \quad f_\alpha^{\text{ini}} = f_n^{\text{ini}} = 0.$$

➤ Les fonctions de densités sont reconstruites à partir des valeurs des vitesses des macro-particules par convolution avec une B-spline d'ordre 3.

➤ Ici  $\theta_D^{\text{ini}} = 20 \text{ keV}$  et  $\theta_T^{\text{ini}} = 15 \text{ keV}$  ( $\sim 10^8 \text{ K}$ ).

Évolution des densités en vitesse et en énergie



Utilisation du modèle asymptotique

• Au temps  $t^n$ ,  $\tau(f_D, f_T)(t^n)$  paires particules  $\alpha$ -neutron sont créées.

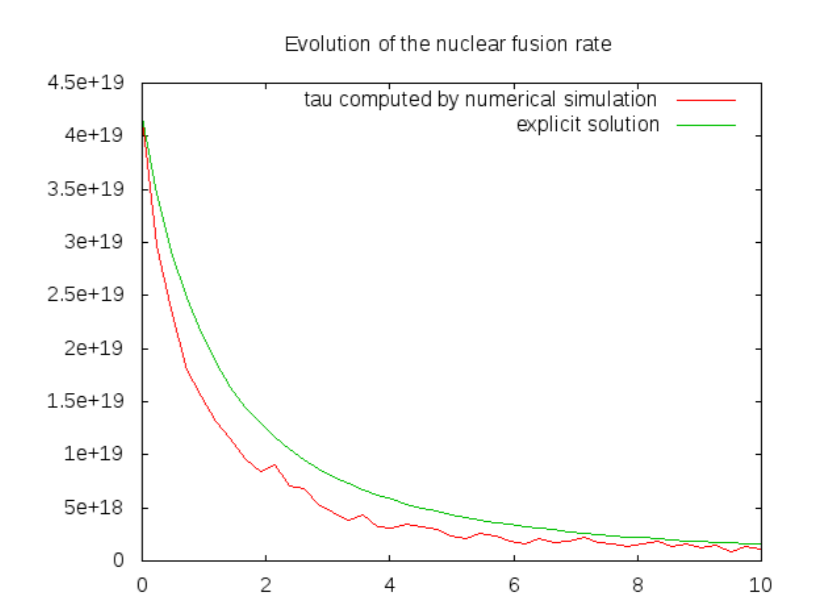
• Les particules  $\alpha$  sont tirés avec une énergie de 3.5 MeV, dans une direction tirée uniformément sur  $\mathbb{S}^2$ .

• A priori, on a besoin de calculer  $f_D^n$  et  $f_T^n$  pour avoir une estimation de  $\tau(f_D, f_T)(t^n)$ ...

• Mais pour une section de collision maxwellienne on peut obtenir une expression explicite de  $\tau(f_D, f_T)(t)$

$$\tau(t) = \frac{\tau(0) \rho^{\text{ini}^2}}{(\tau(0)t + \rho^{\text{ini}})^2}$$

⇒ On utilise cette expression pour la section de fusion, en ne calculant que  $\tau(0)$



## Références

- [1] F. CHARLES, C. COPOL, S. DELLACHERIE, AND J.-M. MOUNSAMY, Numerical simulation by a random particle method of deuterium-tritium reactions in a plasma. In ESAIM Proceedings, Vol. 38, pp. 220–240, 2012.
- [2] S. DELLACHERIE, R. SENTIS, Nuclear Collisions Models with Boltzmann Operators, Mathematical Models and Methods in Applied Sciences, Vol. 10, No 4, p. 479–506, 2000.
- [3] Duane, B.H. Fusion cross-section theory. Rapport du Battelle Pacific Northwest Laboratory (Université du Michigan), BNWL-1685 (1951).
- [4] B. LAPEYRE AND E. PARDOUX AND R. SENTIS, Méthodes de Monte-Carlo pour les équations de transport et de diffusion, Springer, 1998.
- [5] L. PARESCHI, G. RUSSO, An introduction to Monte Carlo methods for the Boltzmann equation, In ESAIM : Proceedings, 1999.