PHYSIQUE MATHÉMATIQUE. — *Instabilité des états stationnaires dans les équations de Schrödinger et de Klein-Gordon non linéaires.* Note (*) de **Henri Berestycki** et **Thierry Cazenave,** présentée par Laurent Schwartz.

On établit l'instabilité des états stationnaires de la forme $\varphi(t, x)=e^{i\omega t}u(x)$ pour l'équation de Schrödinger $i\varphi_t+\Delta\varphi+g(\varphi)=0$, et de la forme $\varphi(t, x)=u(x)$ pour l'équation de Klein-Gordon $\varphi_{tt}-\Delta\varphi+\omega\varphi=g(\varphi)$. Ces solutions correspondent aux états fondamentaux de l'équation $-\Delta u+\omega u=g(u)$ dans $\mathbb{R}^N$, $u\in H^1(\mathbb{R}^N)$, $u\not\equiv 0$. Sous certaines hypothèses sur g, on montre en effet l'explosion en temps fini de la solution de ces équations pour des données initiales arbitrairement voisines des états stationnaires.

In this Note, we prove the instability of stationary states of the type $\varphi(t, x)=e^{i\omega t}u(x)$ for the Schrödinger equation $i\varphi_t+\Delta\varphi+g(\varphi)=0$ or of the type $\varphi(t, x)=u(x)$ for the Klein-Gordon equation $\varphi_{tt}-\Delta\varphi+\omega\varphi=g(\varphi)$. Here, $u(x)$ is a ground state solution of the nonlinear scalar field equation $-\Delta u+\omega u=g(u)$ in $\mathbb{R}^N$, $u\in H^1(\mathbb{R}^N)$, $u\not\equiv 0$. Indeed, under certain assumptions on g, we show that there exist initial conditions, arbitrarily close to the stationary states, such that the solutions of these equations blow up in finite time.

1. INTRODUCTION. — On considère l'équation de Schrödinger non linéaire :

$$\text{(S)} \qquad i\varphi_t+\Delta\varphi+g(\varphi)=0$$

et l'équation de Klein-Gordon non linéaire :

$$\text{(kG)} \qquad \varphi_{tt}-\Delta\varphi+m\varphi=g(\varphi),$$

où $\varphi=\varphi(t, x)\in\mathbb{C}$, $t\in\mathbb{R}$, $x\in\mathbb{R}^N$. On supposera dans toute la suite $m>0$ et que g est de la forme $g(\varphi)=f(|\varphi|^2)\varphi$ avec $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue. Soit $u=u(x):\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}$ une solution de l'équation de champ scalaire Euclidien :

$$\text{(E)} \qquad -\Delta u+mu=g(u) \quad \text{dans } \mathbb{R}^N, \qquad u\in H^1(\mathbb{R}^N), \qquad u\not\equiv 0.$$

Alors, $\varphi(t, x)=u(x)$ est une solution stationnaire de (KG) et $\varphi(t, x)=e^{imt}u(x)$ est une solution de (S) appelée « état stationnaire ». L'objet de cette Note est d'étudier la stabilité de telles solutions.

2. HYPOTHÈSES ET RAPPELS. — Selon le contexte, on envisagera g comme fonction de $\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ ou bien comme fonction (impaire) de $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. s désignera une variable réelle. On suppose que g vérifie :

$$\text{(H.0)} \begin{cases} g\in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}); \quad g'(0)=0; \quad g(s)\geq 0, \quad \forall s\geq 0; \\ \lim\limits_{s\to+\infty} g(s)s^{-l}=0 \quad \text{avec} \quad l=\dfrac{N+2}{N-2} \quad \text{si } N\geqq 3 \quad \text{et} \quad l<\infty \quad si\ N=1, 2. \end{cases}$$

$$\overline{\lim_{s\to+\infty}}\ |g'(s)|\,s^{-(l-1)}<\infty.$$

On pose $G(z)=\displaystyle\int_0^{|z|} g(s)\,ds$ pour $z\in\mathbb{C}$. Dans la suite, g satisfait *certaines* des hypothèses suivantes :

$$\text{(H.1)} \begin{cases} \text{La fonction } h(s)=\{sg(s)-2G(s)\}\,s^{-(2+4/N)} \text{ est strictement croissante sur } [0, +\infty), \\ \lim\limits_{s\to 0} h(s)=0 \text{ et } sg(s)\geqq\sigma G(s) \text{ pour } s \text{ grand avec } \sigma>2+4/N. \end{cases}$$

(H.2) $\left\{\begin{array}{l}\text{Il existe } p_1, p_2, r_0, r \text{ avec } 1 \leqq p_1 \leqq p_2 < l, \quad 2 \leqq r_0 \leqq r < l+1, \\ r_0/r' \leqq p_1 \leqq p_2 \leqq r_0/r'_0, \text{ tels que } g'(s) \leqq C(s^{p_1-1}+s^{p_2-1}), \forall s \leqq 0, \text{ où } l \text{ est défini en} \\ (H.0),\ 1/r+1/r'=1/r_0+1/r'_0=1 \text{ et } C>0 \text{ est une constante.}\end{array}\right.$

(H.3) $\left\{\begin{array}{l}s \mapsto g(s)/s \text{ est une fonction strictement croissante sur } [0, +\infty) \text{ et } G(s) \leqq \theta\, g(s)\, s, \\ \forall s \geqq 0 \text{ avec } 0 < \theta < 1/2.\end{array}\right.$

Remarque 1. — Dans le cas particulier $g(u)=|u|^{p-1}u$, alors g vérifie (H.0) et (H.3) pour tout p tel que $1 < p < l=(N+2)/(N-2)$; g vérifie de plus (H.1) et (H.2) sous réserve que $1+4/N < p < l$. □

Pour tout $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ — les fonctions considérées ici sont à valeurs complexes — on définit deux fonctionnelles :

$$Q(u)=\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2\, dx - \frac{N}{2}\int_{\mathbb{R}^N} \{\bar{u} g(u) - 2\, G(u)\}\, dx,$$

$$S(u)=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2\, dx + \frac{m}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |u|^2\, dx - \int_{\mathbb{R}^N} G(u)\, dx,$$

S représente *l'action* relative à l'équation de champ Euclidien (E). Une solution u de (E) telle que $S(u) \leqq S(v)$, pour toute solution v de (E), est appelée *état fondamental* de (E). Nous rappelons à présent quelques résultats concernant les équations (E), (S) et (KG).

L'existence d'un état fondamental de (E) est établie dans H. Berestycki et P. L. Lions ([1], [2]) sous des hypothèses très générales et pratiquement optimales pour la résolution de (E). En particulier, les seules hypothèses (H.0), $m > 0$ et $\lim_{s \to +\infty} g(s)/s = +\infty$ permettent par exemple d'appliquer les résultats de ([1], [2]). Il existe alors un état fondamental u de (E) tel que $u \in C^2(\mathbb{R}^N)$, $u > 0$, u est à symétrie sphérique, est décroissant par rapport à $r=|x|$ et u, $|u_{x_i}|$, $|u_{x_i x_j}|$ décroissent exponentiellement vers zéro lorsque $|x| \to +\infty$. (L'existence d'une infinité de solutions de (E) — *états excités* — est également démontrée dans H. Berestycki et P. L. Lions ([3], [4])). □

Sous les hypothèses (H.1) et (H.2), on sait résoudre localement le problème de Cauchy pour l'équation (S) d'après les résultats de J. Ginibre et G. Velo [5]. Plus précisément, pour toute donnée initiale $\varphi_0 \in H^1(\mathbb{R}^N)$, il existe une unique solution φ de (S) définie sur un intervalle de temps maximal $[0, T)$ où $T=T_{\max}(\varphi_0) > 0$, et telle que $\varphi \in C^0([0, T), H^1(\mathbb{R}^N))$, $\varphi(0, .)=\varphi_0$. De plus, ou bien $T_{\max}(\varphi_0)=+\infty$, ou bien :

$$\lim_{t \to T_{\max}(\varphi_0)} \|\varphi(t, .)\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} = +\infty \quad \text{si} \quad T_{\max}(\varphi_0) < +\infty. \tag{1}$$

On rappelle que pour tout $t \in [0, T_{\max}(\varphi_0))$, on a les lois de conservation :

$$\|\varphi(t, .)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} = \|\varphi_0\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}; \tag{2}$$

$$S(\varphi(t, .)) = S(\varphi_0). \quad \square \tag{3}$$

Enfin, en ce qui concerne l'équation (KG), on sait résoudre localement le problème de Cauchy pour (KG) sous l'hypothèse (H.0) si $N \leqq 3$ (*voir* W. Strauss [6]). Pour tout $\varphi_0 \in H^2(\mathbb{R}^N)$, il existe une solution φ de (KG) définie sur un intervalle de temps maximal $[0, T)$, $T=T_{\max}(\varphi_0) > 0$, telle que :

$$\varphi \in C^0([0, T), H^2(\mathbb{R}^N)), \qquad \varphi(0, .)=\varphi_0, \qquad \varphi_t(0, .) \equiv 0.$$

De plus, ou bien $T_{max}(\varphi_0)=+\infty$ ou bien l'on a :

(4) $$\lim_{t\to T_{max}(\varphi_0)} \|\varphi(t,\,.)\|_{H^2(\mathbb{R}^N)}=+\infty \quad \text{si} \quad T_{max}(\varphi_0)<+\infty.$$

Si g vérifie certaines conditions supplémentaires, on peut raffiner (4) et montrer que φ vérifie (1) (*voir* [7]). Enfin, pour tout $t\in[0, T_{max}(\varphi_0))$, on a :

(5) $$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}|\varphi_t(t,x)|^2\,dx+S(\varphi(t,\,.))=S(\varphi_0). \quad \square$$

3. Les principaux résultats.

Théorème 1. — *On suppose que g vérifie* (H.0), (H.1) *et* (H.2) *et que u est un état fondamental de* (E). *Alors, pour tout* $\varepsilon>0$, *il existe* $\varphi_0\in H^1(\mathbb{R}^N)$ *avec* $\|u-\varphi_0\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}<\varepsilon$ *et tel que la solution* φ *de* (S) *correspondant à la donnée initiale* $\varphi(0,\,.)=\varphi_0$ *vérifie* (1) *et* $T_{max}(\varphi_0)<+\infty$.

En ce qui concerne l'équation (KG), nous nous bornons à énoncer ici un résultat pour la dimension $N\leqq 3$. Des résultats pour les dimensions supérieures sont indiqués dans [7].

Théorème 2. — *Soit* $N\leqq 3$. *On suppose que g satisfait* (H.0) *et* (H.3) *et que u est un état fondamental de* (E). *Alors, pour tout* $\varepsilon>0$ *il existe* $\varphi_0\in H^2(\mathbb{R}^N)$ *avec* $\|u-\varphi_0\|_{H^2}<\varepsilon$ *tel que la solution* φ *de* (KG) *correspondant aux données initiales* $\varphi(0,\,.)=\varphi_0$ *et* $\varphi_t(0,\,.)=0$ *vérifie* (4) *et* $T_{max}(\varphi_0)<+\infty$.

Remarque 2. — Les théorèmes 1 et 2 montrent que les états stationnaires de (KG) ou (S) envisagés ici sont *instables* en un sens très fort : une perturbation des données initiales arbitrairement petite suffit à faire *exploser* la solution perturbée en un temps fini. $\square$

Remarque 3. — Les hypothèses du théorème 1 sont en un certain sens optimales du point de vue des résultats d'instabilité pour (S). Si l'on considère le cas $g(u)=|u|^{p-1}u$, les hypothèses du théorème 1 signifient précisément $1+4/N<p<l$. Or, la conclusion du théorème 1 devient *fausse* si $1<p<1+4/N$. T. Cazenave et P. L. Lions [8] ont en effet montré dans ce cas que l'état stationnaire est, au contraire, une *solution stable de* (S). $\square$

Remarque 4. — Pour l'équation (KG), dans le cas $g(u)=|u|^{p-1}u$, le théorème 2 s'applique pour tout p tel que $1<p<l$. Dans le théorème 2, on peut en fait choisir φ_0 *à support compact*. Compte tenu des propriétés de propagation du support d'une solution de (KG), ceci montre que l'instabilité est non seulement globale mais aussi *locale*. $\square$

4. Principe de la démonstration du théorème 1. — On se ramène tout d'abord facilement au cadre de l'étude de la stabilité d'une solution stationnaire $\varphi(t,x)=u(x)$ au regard de l'équation :

(S′) $$i\varphi_t+\Delta\varphi-m\varphi+g(\varphi)=0,$$

où u est un état fondamental de (E). On pose :

$$M=\{u\in H^1(\mathbb{R}^N);\ u\neq 0,\ Q(u)=0\}.$$

La démonstration du théorème 1 repose sur deux lemmes.

Lemme 1. — *Une fonction* $u\in H^1(\mathbb{R}^N)$ *est un état fondamental de* (E) *si et seulement si u vérifie :*

(i) $$u\in M;$$

(ii) $$S(u)=\operatorname*{Min}_{v\in M} S(v)\equiv d>0.$$

On introduit les ensembles :

$$K_1 = \{v \in H^1(\mathbb{R}^N);\ S(v) < d,\ Q(v) \geqq 0\},$$
$$K_2 = \{v \in H^1(\mathbb{R}^N);\ S(v) < d,\ Q(v) < 0\}.$$

A l'aide de (2) et (3), on déduit du lemme 1 :

LEMME 2. — *Soit* $\varphi_0 \in K_1$ (*resp.* $\varphi_0 \in K_2$) *et soit* φ *la solution de* (S') *telle que* $\varphi(0, .) = \varphi_0$. *On note* $[0, T_{\max}(\varphi_0))$ *l'intervalle de temps maximal pour l'existence de* φ. *Alors, pour tout* $t \in [0, T_{\max}(\varphi_0))$ *on a* $\varphi(t, .) \in K_1$ (*resp.* $\varphi(t, .) \in K_2$). *De plus, si* $\varphi_0 \in K_2$, *on a* $Q(\varphi(t, .)) \leqq -(d - S(\varphi_0))$ *pour tout* $t \in [0, T_{\max}(\varphi_0))$.

On conclut la démonstration en montrant, à l'aide d'une identité de [5] et d'un argument de R. Glassey [9] que si $\varphi_0 \in K_2$, alors $T_{\max}(\varphi_0) < +\infty$. En posant $u_\lambda(x) = \lambda^{N/2} u(\lambda x)$ $(\lambda > 0)$, il suffit de choisir $\varphi_0 = u_{1+\delta}$ où $\delta > 0$ est suffisamment petit pour que $\| u - u_{1+\delta} \|_{H^1} \leqq \varepsilon$. On a en effet $\varphi_0 \in K_2$ et $T_{\max}(\varphi_0) < +\infty$.

Remarque 5. — La même démonstration s'adapte pour traiter le cas des solutions de (S') de la forme $\varphi(t, x) = e^{i\omega t} u(x)$ où $m + \omega > 0$ et u est un état fondamental de :

$$\text{(E')} \qquad -\Delta u + (m + \omega) u = g(u), \qquad u \not\equiv 0, \qquad u \in H^1(\mathbb{R}^N). \quad \square$$

5. PRINCIPE DE LA DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 2. — On adapte ici une méthode de L. E. Payne et D. H. Sattinger [10]. En utilisant certaines idées analogues à celles de la démonstration précédente. (Rappelons que les résultats de [10] concernent une équation d'ondes non linéaires dans un *ouvert borné*.) □

(*) Reçue le 10 juillet 1981, acceptée le 21 septembre 1981.

[1] H. BERESTYCKI et P. L. LIONS, *Comptes rendus*, 287, série A, 1978, p. 503.

[2] H. BERESTYCKI et P. L. LIONS, *Nonlinear Scalar Field Equations. I. Existence of a Ground State* [*Arch. Rational Mech. Anal.* (à paraître)].

[3] H. BERESTYCKI et P. L. LIONS, *Comptes rendus*, 288, série A, 1979, p. 395.

[4] H. BERESTYCKI et P. L. LIONS, *Nonlinear Scalar Field Equations. II. Existence of Infinitely Many Solutions* [*Arch. Rational Mech. Anal.* (à paraître)].

[5] J. GINIBRE et G. VELO, *J. Functional Analysis*, 32, 1979, p. 1-71.

[6] W. STRAUSS, *Lecture Notes in Physics*, n° 73, p. 197-249, Springer Verlag, New York, 1978.

[7] H. BERESTYCKI et T. CAZENAVE, *Instability of Stationary States in Nonlinear Schrödinger or Klein-Gordon Equations* (à paraître).

[8] T. CAZENAVE et P. L. LIONS, *Orbital Stability of Standing Waves for Some Nonlinear Schrödinger Equations* (à paraître).

[9] R. GLASSEY, *J. Math. Phys.*, 18, 1977, p. 1794-1797.

[10] L. E. PAYNE et D. H. SATTINGER, *Israël J. of Math.*, 22, 1975, p. 273-303.

Analyse numérique, 55-65, 5 E,
Université Pierre-et-Marie-Curie, 4, *place Jussieu*, 75230 *Paris Cedex*.