Современная математика. Фундаментальные направления. Том 15 (2006). С. 1–10

УДК 517.55+517.95

АНАЛИТИЧНОСТЬ И НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ПОВЕРХНОСТЕЙ РАЗДЕЛА: ОТ НЕУСТОЙЧИВОСТИ КЕЛЬВИНА—ГЕЛЬМГОЛЬЦА ДО ВОДНЫХ ВОЛН

© 2006 г. **К. БАРДОС**

Аннотация. Работа посвящена анализу решений гидродинамических уравнений с поверхностями раздела. Цель работы — показать, как недавние результаты об аналитичности связаны с неустойчивостью поверхности раздела.

1. Введение

Цель данной работы — объяснить, как недавние результаты в гидродинамике об аналитичности поверхности раздела связаны с неустойчивостью, наблюдаемой в численных и в физических экспериментах. Такая неустойчивость возникает даже на границе раздела двух жидкостей одинаковой плотности в случае скачка начальной скорости (так называемая *задача Кельвина—Гельмгольца*). Если плотности различны, то получаем *задачу Рэлея—Тейлора*. Наконец, *водными волнами* называют случай, когда одной из плотностей (например, плотностью воздуха) можно пренебречь в сравнении с другой. Очень часто предполагается несжимаемость, а вязкость и поверхностное натяжение считаются пренебрежимо малыми. Эти упрощения обоснованы не только потому, что соответствуют количественному анализу, но и потому (и это даже важнее), что решения таких уравнений демонстрируют патологическое поведение поверхности раздела, которое как раз и наблюдается в экспериментах. Было обнаружено, что для поверхности раздела малая регулярность влечет за собой (для задач Кельвина—Гельмгольца и Рэлея—Тейлора) существенную гладкость (в математической формулировке — аналитичность). Поскольку решения не являются гладкими, они должны быть сильно сингулярными (для водных волн это неверно), и это — одно из объяснений возникновения нерегулярных (например, спиральных или бесконечно длинных) и (возможно) хаотичных поверхностей раздела.

Существуют два подхода к изучению поверхностей раздела. Более естественный — это явное продолжение поверхности раздела с использованием параметризации, зависящей от времени. Альтернативный подход — описать поверхность раздела посредством решения некоторого уравнения в частных производных, которое может далее развиваться вместе с поверхностью раздела. В последнем случае рассматриваются слабые решения уравнения Эйлера или его решения в смысле обобщенных функций; указанная формулировка справедлива во всех случаях.

Таким образом, данная работа построена следующим образом. Вначале обсуждается эквивалентность этих двух подходов (она имеет место для случая гладких решений, а в общем случае — не всегда). Далее приводятся результаты для задачи Коши и рассматривается возникновение особенностей. Затем доказывается локальная аналитичность. Мы настаиваем на том, что эти различные явления тесно связаны. Фактически, краеугольный камень всех доказательств для задач Кельвина—Гельмгольца и Рэлея—Тейлора — это эллиптичность линеаризованного оператора, однако для водных волн это неверно. В этом принципиальная разница с математической точки зрения.

2. Слабые решения и результаты, специфичные для двумерного случая

В самом общем виде рассматривается следующая задача для уравнения Эйлера:

$$\partial_t(\rho u) + \nabla(\rho u \otimes u) + \nabla p = \rho \underline{g},$$
$$\nabla \cdot u = 0,$$
$$\partial_t \rho + \nabla(\rho u) = 0.$$

Здесь ρ обозначает плотность, u — скорость жидкости в эйлеровых координатах, а g — гравитацию. Для этих уравнений мы считаем плотность $\rho = \rho_\pm \geqslant 0$ постоянной вне некоторой пространственно-временной «гладкой» поверхности, а завихренность считаем мерой Радона с носителем, содержащимся на той же поверхности. Число Этвуда равно

$$a = \frac{|\rho_+ - \rho_-|}{\rho_+ + \rho_-},$$

где $0 \leqslant a \leqslant 1$. Равенство $a = 1$ справедливо тогда и только тогда, когда одна из плотностей равна нулю. Это соответствует водным волнам. Задаче Кельвина—Гельмгольца соответствует случай $\rho_+ = \rho_-$, что является частным случаем задачи Рэлея—Тейлора ($a = 0$).

Основное внимание будет уделено плоским потокам, но большинство из представленных результатов справедливо (если не оговорено противное) для вещественных трехмерных потоков. Для начала напомним известные «двумерные» результаты для случая постоянной плотности: $\rho \equiv 1$. Основной результат для этого случая заключается в том, что перенос завихренности описывается уравнениями

$$\partial_t \Omega + \nabla(u\Omega) = 0, \qquad \nabla \cdot u = 0, \qquad \Omega = \nabla \wedge u. \tag{2.1}$$

Как следствие, доказываются следующие результаты (если исходить из удобной гипотезы о начальной завихренности: $\Omega_0(x) = \Omega(x, 0)$).

- Существование и единственность слабого решения для $\Omega_0 \in L^\infty$ (см. [2]).
- Существование слабого решения для $\Omega_0 \in L^p$ с $p > 1$ (см. [2]).
- Существование слабого решения, если $\Omega(x, 0)$ — знакопостоянная мера Радона (см. [8]) или мера Радона со строго управляемым изменением знака (см. [16]).
- Неединственность и, в частности, существование решения $u \in L^2(\mathbb{R}_x^2 \times \mathbb{R}_t)$, финитного по пространственно-временным переменным (см. [22,23]). Пример строится посредством концентрации колебаний и не является физическим (по нескольким веским причинам). Однако он важен с математической точки зрения, и из него следует, что решение Делора (см. [8]), существующее всегда, может с самого начала отличаться от решения, описывающего поверхность раздела.

3. Слабые решения и решения, описывающие поверхность раздела

Соотношения между слабыми решениями и решениями, описывающими поверхность раздела, рассматриваются (для простоты) лишь в случае двух пространственных переменных. Обобщение на случай трех переменных очевидно. Для начала предположим, что гладкая поверхность раздела $\Sigma(x, t)$ определена отображениями $t \mapsto \Sigma_t$, $t \in (-T, T)$, где Σ_t обозначает гладкую кривую. Можно использовать различные параметризации $x = r(t, \lambda)$ кривой Σ_t. В частности, s означает длину дуги до некоторой фиксированной точки, а $\tau = \partial_s r(t, s) = \dfrac{\partial_\lambda(r(t,\lambda))}{\|\partial_\lambda(r(t,\lambda))\|}$ и $\nu = R_{\frac{\pi}{2}}(\tau)$ — единичный касательный вектор и единичная нормаль (соответственно) к кривой $x = r(t, \lambda)$ (для случая двух пространственных переменных). Если f непрерывна на $\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^d - \Sigma$, а следы на обеих сторонах Σ корректно определены, то используются обозначения f_- и f_+. Для скачков и для среднего значения используются следующие обозначения: $\langle f \rangle = \dfrac{f_+ + f_-}{2}$ и $[f] = f_+ - f_-$. В этих обозначениях имеем элементарную формулу

$$[fg] = \langle f \rangle [g] + [f] \langle g \rangle. \tag{3.1}$$

Если завихренность Ω несжимаемой жидкости является ограниченной мерой Радона с носителем на $\Sigma_t = r(t,\lambda)$, то ее скорость u задается (для $x \notin \Sigma_t$) так называемым законом Био—Савара:

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi} R_{\frac{\pi}{2}} \int \frac{x-r'}{|x-r'|^2}\Omega(t,r(t,\lambda'))ds' = \frac{1}{2\pi} R_{\frac{\pi}{2}} \int \frac{x-r(t,\lambda')}{|x-r(t,\lambda')|^2}\Omega(t,r(t,\lambda'))\frac{\partial s(\lambda',t)}{\partial\lambda'}d\lambda'. \quad (3.2)$$

Более того, если $x \to \Sigma_t$, то u принимает два предельных значения $u\pm$. Если условие несжимаемости выполнено, то

$$u_- \cdot \nu = u_+ \cdot \nu = u_\nu, \quad (3.3)$$

а среднее значение $\langle u\rangle$ задается главным значением интеграла, возникающего в (3.2) (отметим, что в этих условиях указанный интеграл является сингулярным):

$$v = \langle u\rangle = \frac{1}{2\pi} R_{\frac{\pi}{2}} \int \frac{x-r'}{|x-r'|^2}\Omega(t,r(t,\lambda'))ds'. \quad (3.4)$$

Наконец, оператор K_Σ, определенный формулой

$$K_\Sigma(\Omega) = v(\Omega)\tau = \left(\frac{1}{2\pi} R_{\frac{\pi}{2}} \int \frac{x-r'}{|x-r'|^2}\Omega(t,r(t,\lambda'))ds'\right)\tau, \quad (3.5)$$

при $r(t,\cdot) \in C^{1+\beta}(\mathbb{R})$ непрерывен в пространстве $C^\beta \cap L^2$ (см. [24]) и компактен (см. [11]), если Σ_t — замкнутая кривая со спектром, расположенным между $-1/2$ и $1/2$. Из теории обобщенных функций следует, что если поверхность раздела Σ гладкая, то u является гладким решением системы

$$\begin{gathered}\partial_t(\rho u) + \nabla(\rho u \otimes u) + \nabla p = \rho \underline{g},\\ \nabla\cdot u = 0,\\ \partial_t\rho + \nabla(\rho u) = 0\end{gathered}$$

тогда и только тогда, когда плотность завихрения и кривая удовлетворяют системе

$$[\rho u\cdot\tau]_t - \partial_s\left([\rho u\cdot\tau]\partial_t r\cdot\tau + \frac{1}{2}[\rho(|u_\nu|^2 - |u_\tau|^2]) - [\rho]g\cdot r\right) = 0, \quad (3.6)$$

$$(r_t - v)\cdot\nu = 0, \quad (3.7)$$

$$v(t,r) = \langle u\rangle(t,r) = R_{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2\pi}\,\mathrm{v.p.}\int \frac{r-r(t,s')}{\|r-r(t,s')\|^2}\Omega(t,s')ds', \quad (3.8)$$

описывающей развитие поверхностей раздела в задачах Рэлея—Тейлора, Кельвина—Гельмгольца ($[\rho]=0$) и водных волн ($\rho_+ = 0$).

Замечание 3.1. Уравнения (3.6), (3.7) и (3.8) не определяют $r(t,\lambda)$ полностью, поскольку параметризацию поверхности раздела можно выбрать различными способами.

Если поверхность раздела — это график ($y = y(x,t)$), а $\langle v\rangle = (v_1, v_2)$, то соотношения (3.6) и (3.7) принимают вид

$$y_t + y_x v_1 = v_2, \quad (3.9)$$

$$\partial_t\left(\frac{\Omega}{2} + a(v_1 + y_x v_2)\right) + \partial_x\left(v_1\left(\frac{\Omega}{2} + a(v_1 + y_x v_2)\right)\right) + a\left(\frac{\Omega^2}{8(1+y_x^2)} - \frac{|v|^2}{8} - gy\right) = 0. \quad (3.10)$$

В случае поверхности раздела Кельвина—Гельмгольца имеем

$$y_t + y_x v_1 = v_2, \quad \partial_t(\Omega) + \partial_x(v_1\Omega) = 0. \quad (3.11)$$

Таким же образом получаем классическую формулировку для уравнения водных волн с потенциалом $v = \nabla\phi$: потенциал $\phi(x,t)$ гармоничен в области, где $y \leqslant y(x,t)$, т. е.

$$-\Delta\phi(x,y,t) = 0 \quad \text{при } y \leqslant y(x,t), \quad (3.12)$$

а поверхность раздела есть решение уравнений

$$y_t + y_x\partial_x\phi = \partial_y\phi, \quad \partial_t\phi + \frac{1}{2}|\nabla\phi|^2 = gy. \quad (3.13)$$

Замечание 3.2. Из вышеизложенного видно, что задача Коши задается парой начальных функций: $(y(x,0),\,\Omega(x,0))$ — в случае задачи Рэлея—Тейлора и $(y(x,0),\,\phi(x,0))$ — в случае водных волн.

4. Уравнение Биркгофа—Ротта для задач Рэлея—Тейлора и Кельвина—Гельмгольца

Интуиция подсказывает, что скорость изменения поверхности раздела в задаче Кельвина—Гельмгольца должна быть равна $\langle v\rangle$ в лагранжевых координатах, а для более общего случая задачи Рэлея—Тейлора только касательная составляющая должна изменяться под влиянием $[\rho]$. Действительно, для случая гладких поверхностей раздела и гладких решений это можно строго показать, используя вышеизложенное, при условии, что $[\rho u\cdot\tau]\neq 0$.

Начнем с тождества

$$[\rho u\cdot\tau]\partial_t r\cdot\tau+\frac{1}{2}[\rho(|u_\nu|^2-|u_\tau|^2]+[\rho]g\cdot r=[\rho u\cdot\tau](\partial_t r-v)\cdot\tau+[\rho]\left(\frac{1}{2}|v|^2-\frac{1}{8}\Omega^2+gr\right)\tag{4.1}$$

и используем соотношения

$$w=[\rho u\cdot\tau],\qquad U=\left(\frac{1}{2}|v|^2-\frac{1}{8}\Omega^2+gr\right).\tag{4.2}$$

Применяя формулу Шварца

$$\partial_t w=\partial_s\Bigg(w(\partial_t r-v)\cdot\tau+[\rho]U\Bigg)\tag{4.3}$$

и соотношение $w=[\rho u\cdot\tau]\neq 0$, введем функцию $\lambda(t,s)$ и новую параметризацию $t'=t,\ \lambda=\lambda(s,t)$, учитывая, что $\partial_\lambda r=c(\lambda,t')\tau$ и $w\partial_\lambda r=\tau$:

$$\partial_s\lambda=w,\quad \partial_t\lambda=w((\partial_t r-v)\cdot\tau)+[\rho]U,\tag{4.4}$$

$$\partial_t r=\partial_{t'}r+\partial_\lambda(w((\partial_t r-v)\cdot\tau)+[\rho]U)r,\tag{4.5}$$

$$\partial_{t'}r\cdot\tau=\partial_t r\cdot\tau-\partial_\lambda rw\cdot\tau((\partial_t r-v)\cdot\tau)+\partial_\lambda[\rho]U\cdot\tau,\tag{4.6}$$

$$\partial_{t'}r=v-[\rho]U\partial_\lambda r.\tag{4.7}$$

В новых переменных $t'=t$, $\lambda=\lambda(s,t)$ это дает

$$\partial_t r+[\rho]U\partial_\lambda r=R_{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2\pi}\,\mathrm{v.p.}\int\frac{r(t,\lambda)-r(t,\lambda')}{\|r(t,\lambda)-r(t,\lambda')\|^2}\Omega(t,\lambda')\frac{1}{w}d\lambda',\tag{4.8}$$

что в случае задачи Кельвина—Гельмгольца с $[\rho]=0$ и $w=\Omega$ обращается в классическое уравнение Биркгофа—Ротта

$$\partial_t r=R_{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2\pi}\,\mathrm{v.p.}\int\frac{r(t,\lambda)-r(t,\lambda')}{\|r(t,\lambda)-r(t,\lambda')\|^2}d\lambda'\tag{4.9}$$

или (если ввести комплексную переменную $z(t,\lambda)=r_1(t,\lambda)+ir_2(t,\lambda)$) в уравнение

$$\partial_t\overline{z}=\frac{1}{2\pi}\,\mathrm{v.p.}\int\frac{d\lambda'}{z(t,\lambda)-z(t,\lambda')}.\tag{4.10}$$

Замечание 4.1. Приведенные рассуждения гарантируют (при наложенных выше условиях гладкости) полную эквивалентность решения уравнения Эйлера решению «задачи о поверхности раздела». Для слабых решений уравнения Эйлера (как в [8]) ситуация гораздо сложнее. Ниоткуда не следует, что такое решение будет решением, описывающим поверхность раздела. Теоремы неединственности из [22,23] показывают, что даже если решение, описывающее поверхность раздела, существует и гладко, оно, вообще говоря, не обязательно совпадает со слабым решением. Более того, дальнейшие исследования показывают, что, как только образовалась первая особенность, решение становится «сильно сингулярным». Решения, полученные в [8], глобальны, и, следовательно, они могут стать настолько слабыми, что вышеприведенные рассуждения будут уже недействительны. Наконец, в [15], при незначительном ослаблении регулярности завихренности, построены примеры решений уравнения Биркгофа—Ротта, не являющихся слабыми решениями уравнения Эйлера.

По сути, в [15] используется лист вихря Прандтля—Мунка. Начнем с начальной завихренности

$$\Omega_0(x_1,x_2)=\frac{x_1}{\sqrt{1-x_1^2}}\Xi(-1,1)(x_1)\otimes\delta(x_2),\tag{4.11}$$

где $\Xi(-1,1)$ — характеристическая функция интервала $(-1,1)$. По закону Био—Савара скорость постоянна: $\langle v\rangle = (0,-1/2)$. Решение задачи Кельвина—Гельмгольца — это завихренность, задаваемая формулой

$$\Omega(x_1,x_2,t) = \Omega_0(x_1,x_2+t/2). \tag{4.12}$$

С другой стороны, в [15] замечено, что скорость u, связанная с этой завихренностью, не является даже слабым решением уравнения Эйлера. В действительности справедливы равенства

$$\nabla\cdot u = 0, \qquad \partial_t u + \nabla_x(u\otimes u) + \nabla p = F, \tag{4.13}$$

где F задана формулой

$$F = \frac{\pi}{8}[(\delta(x_1+1,x_2+t/2) - \delta(x_1-1,x_2+t/2)),0]. \tag{4.14}$$

Эта патология объясняется «плохим» поведением Ω вблизи точек $(\pm1,0)$. Функция $\Omega(t,s)$ принадлежит $L^\infty(\mathbb{R}_t;L^1(\Sigma_t))$, но не принадлежит $L^\infty(\mathbb{R}_t;L^2(\Sigma_t))$. В [14] используется понятие регулярной кривой. Кривая C называется *регулярной*, если она спрямляема и существует такая постоянная $A<\infty$, что для любого шара B_r радиуса r справедливо неравенство

$$|C\cap B_r| < Ar.$$

Далее вводится определение слабого решения уравнения Биркгофа—Ротта и доказывается, что $\Omega = \gamma\delta_{\Sigma_t}$ доставляет слабое решение уравнения Эйлера тогда и только тогда, когда

$$\gamma\in L^\infty(\mathbb{R}_t;L^2(\Sigma_t)). \tag{4.15}$$

5. Классические теоремы о задачах Коши для поверхностей раздела

Чтобы сравнить полученные результаты с образованием особенностей и подчеркнуть разницу между водными волнами и задачей Рэлея—Тейлора, удобно напомнить основные результаты для задачи Коши.

- Первые результаты о задачах Коши для водных волн были получены в случае аналитических начальных данных (ср. [20]), а позже было обнаружено (см. [1, 7, 13, 28]), что эта задача настолько устойчива, что начальные данные можно брать из пространств Соболева конечного порядка (при условии, что временно́й интервал конечен). В [13, 28] рассматривались жидкости с конечной глубиной и неплоским дном. Одним из элементов анализа был тот факт, что линеаризованный оператор не является ни эллиптическим, ни строго гиперболическим, а для корректности в пространствах Соболева обязательно выполнение условия устойчивости (как замечено в [3], в математической формулировке это — так называемый критерий устойчивости Тейлора). Это условие эквивалентно отсутствию у поверхности самопересечений, и, как доказано Ву, в случае отсутствия дна (т. е. если глубина бесконечна) решение остается гладким, пока выполнено следующее условие:

$$(x_{tt},y_{tt})\cdot n - (0,-g)\cdot n \geqslant 0.$$

- Для задач Рэлея—Тейлора и (в частности) Кельвина—Гельмгольца ситуация совершенно иная, поскольку линеаризованная задача (как мы увидим и используем ниже) эллиптична. Следовательно, задача Коши в постановках Рэлея—Тейлора и Кельвина—Гельмгольца корректна (при конечном положительном или отрицательном времени) только в предположении об аналитичности начальных данных. Вначале это было доказано для задачи Кельвина—Гельмгольца (в [25]), а затем распространено на задачу Рэлея—Тейлора (в [24]) в случае, когда число Этвуда

$$a = \frac{|\rho_+ - \rho_-|}{|\rho_+ + \rho_-|}$$

достаточно мало. Этот результат можно распространить на случай любого a, $0\leqslant a<1$ (исключая случай водных волн $a=1$), если начальная кривая замкнута и конечна. Дело в том, что оператор

$$K_\Sigma(\Omega) = v(\Omega)\tau = \left(\frac{1}{2\pi}R_{\frac{\pi}{2}}\int \frac{x-r'}{|x-r'|^2}\Omega(t,r(t,\lambda'))ds'\right)\tau$$

компактен, а его спектр $\sigma[K]$ содержится в отрезке $[-1/2, 1/2]$, см. [11].

6. Особенности

Численные эксперименты (см. [12, 18, 19]) показали, что возможно возникновение особенности типа точки заострения. Математическое доказательство для задачи Кельвина—Гельмгольца приведено в [5, 9].

Начав с решений, аналитических при $t > 0$ и сингулярных при $t = 0$, используем полную обратимость задачи Кельвина—Гельмгольца для получения решений, аналитических при $t = 0$ и с особенностями в положительные моменты времени, которые в некоторых случаях можно оценить через величины, входящие в начальное условие (ср. [17]).

Кафлиш и Орельяна построили для уравнения Биркгофа пример, в котором

$$z(t, \lambda) = \lambda + \varepsilon s_0 + r(\lambda, t), \tag{6.1}$$

где s_0 — точное решение линеаризованного уравнения, заданное формулой

$$s_0(\lambda, t) = (1 - i)\left\{(1 - e^{-\frac{t}{2} - i\lambda})^{1+\nu} - (1 - e^{-\frac{t}{2} + i\lambda})^{1+\nu}\right\}, \tag{6.2}$$

а положительное ε достаточно мало. Доказывается существование аналитической при $t > 0$ функции $r(\lambda, t)$, которая есть $O(\varepsilon^2)$ в $C^2(\lambda)$, такой, что $z(t, \lambda)$ — решение уравнения Биркгофа—Ротта. Поскольку $s_0(\lambda, 0) \sim \lambda^{1+\nu}$, имеем

$$z(\lambda, 0) \in C^{1+\nu}, \qquad z(\lambda, 0) \notin C^{1+\nu'} \text{ для } \nu' > \nu. \tag{6.3}$$

В примере Дучона и Роберта (предшественника этой теории), начальное условие на завихренность при $t = 0$ ослабляется и предполагается, что в системе

$$y_t + y_x v_1 = v_2, \tag{6.4}$$

$$\partial_t(\Omega) + \partial_x(v_1 \Omega) = 0, \tag{6.5}$$

$$r(t, x) = (x, y(x, t)), \quad v(t, r) = R_{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2\pi} \text{ v.p.} \int \frac{r - r(t, s')}{\|r - r(t, s')\|^2} \Omega(t, s') ds' \tag{6.6}$$

функция $y(x, t)$ стремится к нулю при $t \to \infty$.

Тогда для любых начальных данных $y(x, 0)$ таких, что

$$y(x, 0) = \int e^{ix\xi} g(\xi) d\xi, \qquad \int |g(\xi)| d\xi \leqslant \varepsilon,$$

где ε достаточно мало, доказывается существование и единственность корректно определенного (при $t > 0$) решения, стремящегося к нулю при $t \to \infty$. Это решение аналитично при $t > 0$.

7. Эллиптичность и аналитичность решений

Теорема 7.1 (см. [11]). *Пусть $u \in C(-T, T; L^2(\mathbb{R}^2))$ — слабое решение системы уравнений*

$$\partial_t(\rho u) + \nabla(\rho u \otimes u) + \nabla p = \rho \underline{g},$$
$$\nabla u = 0,$$
$$\partial_t \rho + \nabla(\rho u) = 0,$$

где $\nabla \wedge u \in L^\infty(0, T; (BRM)(\mathbb{R}^2))$. Пусть существует такая окрестность $\mathcal{U}$ точки $(t_0, r_0 = r(t_0, \lambda_0))$, что

$$(\text{supp } \nabla \wedge u) \cap \mathcal{U} \subset \cup_{\{-\varepsilon + t_0 < t < \varepsilon + t_0\}} \Sigma_t, \qquad \nabla \wedge u = \Omega(t, s) \delta_\Sigma,$$

где $t \mapsto \Sigma(t, s) \in C^\alpha(\mathbb{R}_t; C^{1+\beta}(\mathbb{R}_s))$, s — длина дуги кривой и $\rho = (\rho_+, \rho_-)$ постоянна в $\mathcal{U} - \Sigma$. Пусть Ω и $w = [\rho u_\tau](t_0, r_0)$ отличны от нуля. Тогда $r(t, s)$ и $\Omega(t, s)$ аналитичны в окрестности $\mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$ точки (t_0, r_0).

Идея доказательства. Введем открытое множество $\mathcal{U}' \subset\subset \mathcal{U}$. Используя формулы $\nabla \cdot u = 0$ и $\nabla \wedge u = \Omega$ и считая, что кривая состоит только из дуг и хорд, запишем уравнение (4.8) в виде

$$\partial_t r + [\rho] U \partial_\lambda r = \frac{1}{2\pi} R_{\frac{\pi}{2}} \,\mathrm{v.p.} \int\limits_{r(t,\lambda)\in\mathcal{U}} \frac{r(t,\lambda) - r(t,\lambda')}{\|r(t,\lambda) - r(t,\lambda')\|^2} \Omega(t,\lambda') \frac{1}{w} d\lambda' + E(t, r(t,\lambda)),$$

где $E(t,\lambda)$ аналитична в $\mathcal{U}'$. Согласно галилеевскому преобразованию вблизи $r(t_0,\lambda_0)$, полагаем (здесь $r = r_1 + ir_2$), что

$$\Omega(0,0) = 1, \qquad r(\lambda,t) = (\alpha t + \beta(\lambda + \varepsilon f(t,\lambda)),$$

если

$$\sup\{|\lambda|, |t|\} \leqslant M, \qquad f(0,0) = \nabla f(0,0) = 0.$$

Далее, чтобы «исключить» $\dfrac{\Omega}{w}$, используем условие скачка

$$\Omega = \frac{1}{\langle\rho\rangle}(w - [\rho] v_s) = \frac{1}{\langle\rho\rangle}(w - [\rho] v(w \partial_\lambda r)) = \frac{w}{\langle\rho\rangle}(1 - [\rho] \mathrm{Re}(r_\lambda \overline{v})),$$

которое дает

$$\frac{\Omega}{w} + \frac{[\rho]}{\langle\rho\rangle} \mathrm{Re} \left(\frac{1}{2\pi i} \,\mathrm{v.p.} \int\limits_{r(t,\lambda')\in\mathcal{U}} \frac{(1 + \varepsilon \partial_\lambda f(t,\lambda)) \frac{\Omega}{w} d\lambda'}{(\lambda - \lambda')(1 - \varepsilon \frac{f(t,\lambda) - f(t,\lambda')}{\lambda - \lambda'})} \right) = E(t, r(t,\lambda)). \tag{7.1}$$

Напомним, что U задано формулой

$$U = \frac{1}{2}|v|^2 - \frac{1}{8}\Omega^2 + gr.$$

Всюду заменим Ω на $\dfrac{\Omega}{w}$. В частности, получим, что

$$\Omega_0 = \Omega(0,0) = \frac{1}{\langle\rho\rangle}, \qquad U_0 = -\frac{1}{8\langle\rho\rangle^2}.$$

Наконец, продолжая $f(t,\lambda)$ и $\Omega(t,\lambda)$ нулем вне $\mathcal{U}$, получаем систему уравнений

$$\varepsilon|\beta|^2(\partial_t \overline{f} + [\rho] U \partial_\lambda \overline{f}) = \frac{1}{2\pi i} \,\mathrm{v.p.} \int\limits_{r(t,\lambda')\in\mathcal{U}} \frac{\Omega(t,\lambda') d\lambda'}{(\lambda - \lambda')\left(1 - \varepsilon \frac{f(t,\lambda) - f(t,\lambda')}{\lambda - \lambda'}\right)} + E(t, r(t,\lambda)), \tag{7.2}$$

$$\Omega + \frac{[\rho]}{\langle\rho\rangle} \mathrm{Re} \left(\frac{1}{2\pi i} \,\mathrm{v.p.} \int\limits_{r(t,\lambda')\in\mathcal{U}} \frac{(1 + \varepsilon \partial_\lambda f(t,\lambda)) \Omega(t,\lambda') d\lambda'}{(\lambda - \lambda')\left(1 - \varepsilon \frac{f(t,\lambda) - f(t,\lambda')}{\lambda - \lambda'}\right)} \right) = E(t, r(t,\lambda)), \tag{7.3}$$

где $r \mapsto E(t,r)$ обозначает функцию, аналитическую в $\mathcal{U}$.

Далее, используя разложение

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi} \,\mathrm{v.p.} \int \frac{d\lambda'}{(\lambda - \lambda')\left(1 + \varepsilon \frac{f(\lambda,t) - f(\lambda',t)}{\lambda - \lambda'}\right)} d\lambda' = \\ &= \frac{\varepsilon}{2\pi} \int \frac{f(\lambda,t) - f(\lambda',t)}{(\lambda - \lambda')^2} d\lambda' + \sum_{n \geqslant 2} \frac{\varepsilon^n}{2\pi} \int \frac{(f(\lambda,t) - f(\lambda',t))^n}{(\lambda - \lambda')^{(n+1)}} d\lambda', \end{aligned} \tag{7.4}$$

формулы

$$\frac{1}{2\pi} \int \frac{f(\lambda,t) - f(\lambda',t)}{(\lambda - \lambda')^2} d\lambda' = -\frac{i}{2} \mathrm{sign}(D) f,$$

$$\frac{1}{2\pi} \,\mathrm{v.p.} \int \frac{f(\lambda,t) - f(\lambda',t)}{(\lambda - \lambda')^2} d\lambda' = |D| f,$$

(преобразование Гильберта) и соотношение

$$E(t, r(\lambda,t)) = E(t, \alpha t + \beta(\lambda + \varepsilon f(t,\lambda)) = E(t,\lambda) + \varepsilon R(t,\lambda, f(t,\lambda), \tag{7.5}$$

из (7.2) и (7.3) выводим, что вещественная и мнимая части функции

$$f(t,\lambda) = X(t,\lambda) + iY(t,\lambda)$$

принадлежат $\mathcal{U}' \subset\subset \mathcal{U}$ и являются решениями системы уравнений

$$\partial_t X + [\rho]\left(\frac{\Omega_0^2}{4\beta^2} + U_0\right)\partial_\lambda X = \frac{\Omega_0^2}{2\beta^2}|D_\lambda|Y + \varepsilon R_1(X,Y) + E_1(t,\lambda), \tag{7.6}$$

$$\partial_t Y + [\rho]\left(\frac{\Omega_0^2}{4\beta^2} + U_0\right)\partial_\lambda Y = \frac{\Omega_0^2}{2\beta^2}\left(1 - \frac{[\rho]^2}{4\langle\rho\rangle^2}\right)|D_\lambda|X + \varepsilon R_2(X,Y) + E_2(t,\lambda), \tag{7.7}$$

где E_1 и E_2 аналитичны в $\mathcal{U}'$. Функции $(X,Y) \mapsto (R_1(t,\lambda,X,Y), R_2(t,\lambda,X,Y))$ (нелинейные, но непрерывные) действуют из $C^{1+\beta}$ в C^β. Наконец,

$$\left(\left(\partial_t + [\rho]\left(\frac{\Omega_0^2}{4\beta^2} + U_0\right)\partial_\lambda\right)^2 + \left(\frac{\Omega_0^2}{2\beta^2}\right)^2\left(1 - \frac{[\rho]^2}{4\langle\rho\rangle^2}\right)\partial_\lambda^2\right)\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \varepsilon R(X,Y) + E(\lambda,t). \tag{7.8}$$

Левая часть уравнения (7.8) есть эллиптический оператор второго порядка с постоянными коэффициентами, а правая часть — сумма нелинейного возмущения второго порядка и аналитической функции. Отсюда следует аналитичность.

Замечание 7.1.

- Комплексное представление используется лишь для простоты. Результаты того же типа (с необходимыми изменениями) справедливы и в трехмерном случае.
- Знак гравитации g или (в более общем виде) критерий устойчивости Тейлора

$$1 - \frac{[\rho]^2}{4\langle\rho\rangle^2} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \text{число Этвуда } < 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \rho^+\rho^- = 0, \tag{7.9}$$

  существенные для уравнения водных волн (ср. [13] или [26]), не появляются в предыдущих рассуждениях. Они учтены в члене первого порядка, который существенен только в том случае, когда система перестает быть эллиптической. Это происходит, если число Этвуда становится равным единице. Заметим также, что соотношение $a < 1$ существенно и для вывода Ω из уравнения (7.1).
- Идея доказательства описана без подробностей. Эти подробности «легко» восстановить, если начать с предположения о более высокой регулярности, например, считая, что $(r,\Omega) \in C^2(t,\lambda)$. Это — стандартный подход для всех задач со свободной границей: первые шаги доказательств регулярности вблизи «порога» гораздо более трудны, чем последующие улучшения этих результатов. Фактически, предположение о гельдеровости требует более глубокого гармонического анализа, и доказательство в [11] существенно использует разложение Пэли—Литтлвуда и псевдопроизведение Бони.
- Условие гельдеровости вполне согласуется с примером Кафлиша—Орельяны. Это значит, что если после появления особенности типа точки заострения все же существует решение в виде поверхности раздела, то оно не может быть регулярным по Гельдеру, а это говорит о существовании кривых спирального вида.

8. Уточнение порога регулярности

Эксперименты и численное моделирование, проведенные в основном для задачи Кельвина—Гельмгольца, показывают существование и устойчивость листов вихря после возникновения особенности. Более того, эти листы сворачиваются и, по-видимому, приводят к отделимым кривым бесконечной длины. Следовательно, «порог регулярности» должен быть выше и может включать спирали конечной длины. Наилучший (насколько нам известно) результат получен в [27]. В постановке задачи $C^\alpha_{loc}(\mathbb{R}_t; C^{1+\beta}_{loc}(\mathbb{R}_\lambda)$ заменяется на $H^1_{loc}(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_\lambda)$. Оценки получаются явно, с использованием теорем Дэвида, утверждающих, что интегральный оператор Коши

$$C_\Gamma(f) = \text{v.p.}\int \frac{f(s')}{\xi(s) - \xi(s')}d\xi(s')$$

(s — длина дуги) ограничен в $L^2(ds)$ для всех кривых $\Gamma : s \mapsto \xi(s)$, состоящих только из хорд и дуг. Интересно заметить, что эти результаты применимы к логарифмическим спиралям $r = e^\theta$, но не к алгебраическим спиралям бесконечной длины.

9. Выводы и нерешенные задачи

Водные волны, задача Рэли—Тейлора и задача Кельвина—Гельмгольца — это упрощенные модели, пренебрегающие эффектами, которые стабилизировали бы жидкость (вязкость и поверхностное натяжение). Тем не менее они считаются хорошими моделями, возможно, благодаря неустойчивостям, проявляемым решениями. Поэтому прогресс в их понимании ценен для приложений. Это обусловливает следующий список нерешенных задач.

- Распространить подход, предложенный Ву для уравнения Биркгофа—Ротта, на задачу Рэли—Тейлора. Задача технически трудна, но (скорее всего) осуществима.
- Доказать (даже для конечного интервала времени) существование слабых решений «делоровского типа» задачи Рэли—Тейлора.
- Определить класс слабых решений для поверхности раздела, которые были бы совместимы с потерей регулярности. Такие решения не будут удовлетворять гипотезе Ву, который в [27] предложил следующее определение для уравнения Биркгофа—Ротта: *слабое решение* есть функция $\alpha \mapsto z(\alpha, t)$, действующая из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{C}$, для которой справедливо следующее соотношение:
$$\partial_t \left(\int \overline{z}(\alpha)\eta(\alpha)d\alpha \right) = \frac{1}{4\pi i} \iint \frac{\eta(\alpha) - \eta(\beta)}{z(\alpha) - z(\beta)} d\alpha d\beta \quad \forall \eta \in C_0^\infty.$$
В работе [15] предложено более общее (и более удобное) определение с большей степенью свободы относительно параметра. Именно в этом классе доказана эквивалентность принадлежности плотности вихря пространству L^2 тому, что слабое решение является обобщенной функцией. Может быть, из-за некорректности задачи следует рассмотреть и гиперфункции (возможно, двойственные к аналитическим).
- В качестве первого шага в обосновании того, что листы вихря появляются часто, доказать, что регулярное решение (существующее в течение конечного времени) есть предел различных типов приближений: с вязкостью, с гладкими начальными данными и. т. д. Ранее результат такого типа был получен (см. [4]) для капельного и точечного вихрей.
- Гораздо труднее обосновать устойчивость листов вихря. Такие решения должны быть стационарными, а классический критерий устойчивости стационарных решений уравнения Эйлера (критерий Арнольда) здесь неприменим, поскольку относится к устойчивости в энстрофийной норме. Например, можно предположить, что устойчивые листы вихря принадлежат нерегулярному классу функций вроде алгебраических спиралей из [10, 21]. Методы получения теорем устойчивости для таких классов пока не известны.
- Объяснение частого появления таких листов вихря (например, за крылом самолета) может в итоге оказаться еще более трудным. Даже для случая гладкого стационарного решения двумерного уравнения Эйлера достигнуты только отдельные результаты, касающиеся возникновения «когерентных структур». Большинство подобных результатов получено методами статистической механики. Математическое изложение можно найти в [6, 17].

Результаты настоящей работы были доложены на Международной конференции по дифференциальным и функционально-дифференциальным уравнениям (Москва, 2005 г.). Автор очень благодарен организаторам, Математическому институту им. В. А. Стеклова РАН и Национальному центру научных исследований (Франция) за приглашение и финансовую поддержку.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Налимов В. И.* Задача Коши—Пуассона// Динамика сплошной среды. — 1974. — *18*. — С. 104–210.
2. *Юдович В. И.* Нестационарный поток идеальной несжимаемой жидкости// Журн. вычисл. мат. и мат. физ. — 1963. — *3*. — С. 1032–1066.
3. *Beale T., Hou T., Lowengrug J.* Growth rates for the linearized motion of fluid interfaces away from equilibrium// Commun. Pure Appl. Math. — 1993. — *46*. — С. 1269–1301.

4. *Caflisch R., Lowengrub J.* Convergence of the vortex methods for vortex sheets// SIAM J. Numer. Anal. — 1989. — *26.* — С. 1060–1080.
5. *Caflisch R., Orellana O.* Singular solutions and ill-posedness for the evolution of vortex sheets// SIAM J. Math. Anal. — 1989. — *20*, № 2. — С. 293–307.
6. *Caglioti E., Lions P. L., Marchioro C., Pulvirenti M.* A special class of stationary flows for two dimensional Euler equation. A statistical mechanics description// Commun. Math. Phys. — 1992. — *143.* — С. 501–525.
7. *Craig W.* An existence theory for water waves and the Boussinesq and the Korteweg de Vries scaling limits// Comm. Partial Differential Equations. — 1985. — *10*, № 8. — С. 787–1003.
8. *Delort J.-M.* Existence de nappes de tourbillon en dimension deux// J. Amer. Math. Soc. — 1991. — *4.* — С. 553–586.
9. *Duchon J., Robert R.* Global vortex sheet solutions of Euler equations in the plane// J. Differential Equations. — 1988. — *73*, № 2. — С. 215–224.
10. *Kambe T.* Spiral vortex solution of Birkhoff—Rott equation// Phys. D. — 1989. — *37*, № 1–3. — С. 463–473.
11. *Kamotski V., Lebeau G.* On 2D Rayleigh—Taylor instabilities// Asympt. Anal. — 2005. — *42*, № 1-2. — С. 1–27.
12. *Krasny R.* Computation of vortex sheet roll-up in Trefftz plane// J. Fluid Mech. — 1987. — *184.* — С. 123–155.
13. *Lannes D.* Well-posedness of the water waves equations// J. Amer. Math. Soc. — В печати.
14. *Lopes Filho M. C., Nussenzveig Lopes H. J., Schochet S.* A criterion for the equivalence of the Birkhoff—Rott and Euler description of vortex sheet evolution// В печати.
15. *Lopes Filho M. C., Nussenzveig Lopes H. J., Souza M. O.* On the equation satisfied by a steady Prandtl—Munk vortex sheet// Commun. Math. Sci. — 2003. — *1*, № 1. — С. 68–73.
16. *Lopes Filho M. C., Nussenzveig Lopes H. J., Xin Z.* Existence of vortex sheets with reflection symmetry in two space dimensions// Arch. Ration. Mech. Anal. — 2001. — *158*, № 3. — С. 235–257.
17. *Marchioro C., Pulvirenti M.* Mathematical theory of incompressible nonviscous fluids// Appl. Math. Sci. — 1994. — *96.*
18. *Meiron D., Baker G., Orszag S.* Analytic structure of vortex sheet dynamics. I. Kelvin–Helmholtz instability// J. Fluid Mech. — 1982. — *114.* — С. 283–298.
19. *Moore D. W.* The spontaneous appearance of a singularity in the shape of an evolving vortex shee// Proc. R. Soc. Lond., Ser. A. — 1979. — *365*, № 1720. — С. 105–119.
20. *Ovsjannikov L. V.* Cauchy problem in a scale of Banach spaces and its application to the shallow water theory justification// Lect. Notes Math. — 1976. — *503.* — С. 426–437.
21. *Pullin D. I., Buntine J. D., Saffman P. G.* The spectrum of a stretched spiral vortex// Phys. Fluids. — 1994. — *6*, № 9. — С. 3010–3027.
22. *Scheffer V.* An inviscid flow with compact support in space-time// J. Geom. Anal. — 1993. — *3.* — С. 343–401.
23. *Shnirelman A.* On the nonuniqueness of weak solutions of the Euler equations// Commun. Pure Appl. Math. — 1997. — *50.* — С. 1261–1286.
24. *Sulem C., Sulem P.-L.* Finite time analyticity for the two- and three-dimensional Rayleigh—Taylor instability// Trans. Amer. Math. Soc. — 1981. — *287*, № 1. — С. 127–160.
25. *Sulem C., Sulem P.-L., Bardos C., Frisch U.* Finite time analyticity for the two- and three-dimensional Kelvin—Helmholtz instability// Commun. Math. Phys. — 1981. — *80.* — С. 485–516.
26. *Wu S.* Well-posedeness in Sobolev spaces of the full water wave problem in 2-D// Invent. Math. — 1997. — *130.* — С. 439–472.
27. *Wu S.* Recent progress in mathematical analysis of vortex sheets// Proc. Int. Congr. Math. Vol. III, Beijing (2002). — 2002. — С. 233–242.
28. *Yosihara H.* Gravity waves on the free surface of an incompressible perfect fluid of finite depth// Publ. Res. Inst. Math. Sci. — 1982. — *18*, № 1. — С. 49–96.

Claude Bardos
Laboratoire Jacques Louis Lions, University Denis Diderot, Paris, France
E-mail: bardos@math.jussieu.fr