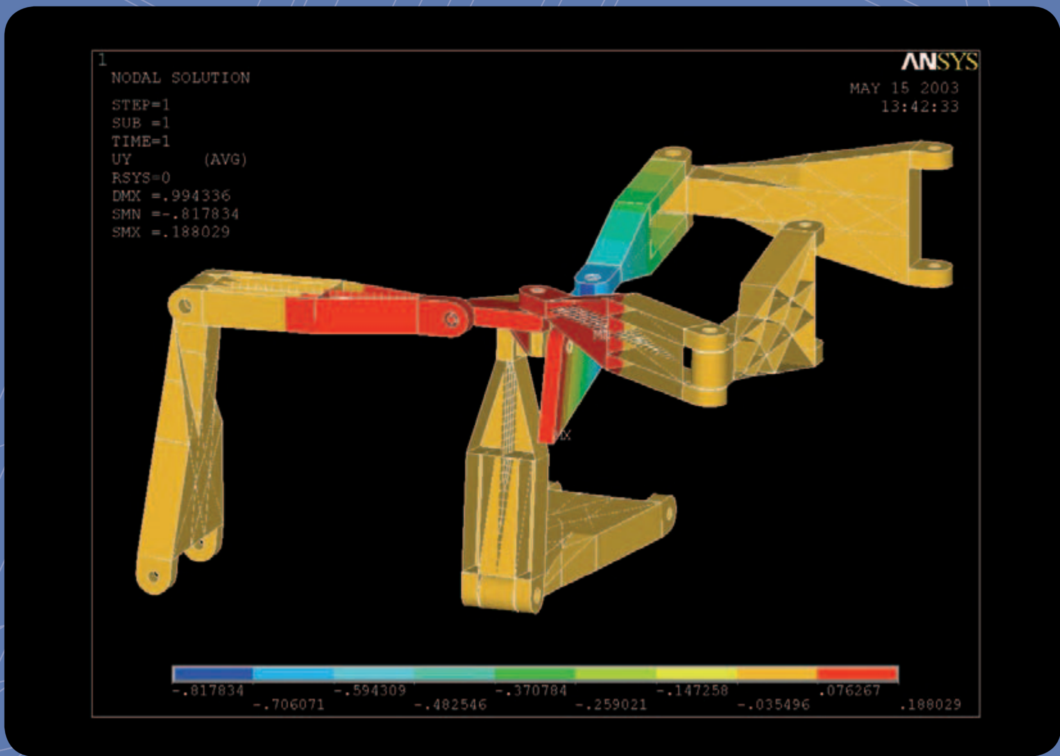
**JEAN-MICHEL CORON, EMMANUEL TRÉLAT**
Laboratoire de Mathématique, Equipe AN-EDP
Université Paris-Sud

# TOUT EST SOUS *contrôle*






Tout le monde sait maintenir en équilibre un balai sur son doigt (problème du pendule inversé). Il est beaucoup plus difficile en revanche de maintenir en équilibre sur son doigt un double pendule inversé, c’est-à-dire un système composé de deux balais l’un sur l’autre, surtout si l’on ferme les yeux. La théorie du contrôle permet pourtant de le faire. Mais pour réaliser effectivement cet équilibre, mieux vaut disposer d’un bon modèle et savoir résoudre des équations.

Photo : Robot T3R1 à l'architecture parallèle développé par le LaRAMA (Université Blaise-Pascal Clermont-Ferrand II) et le LASMEA.

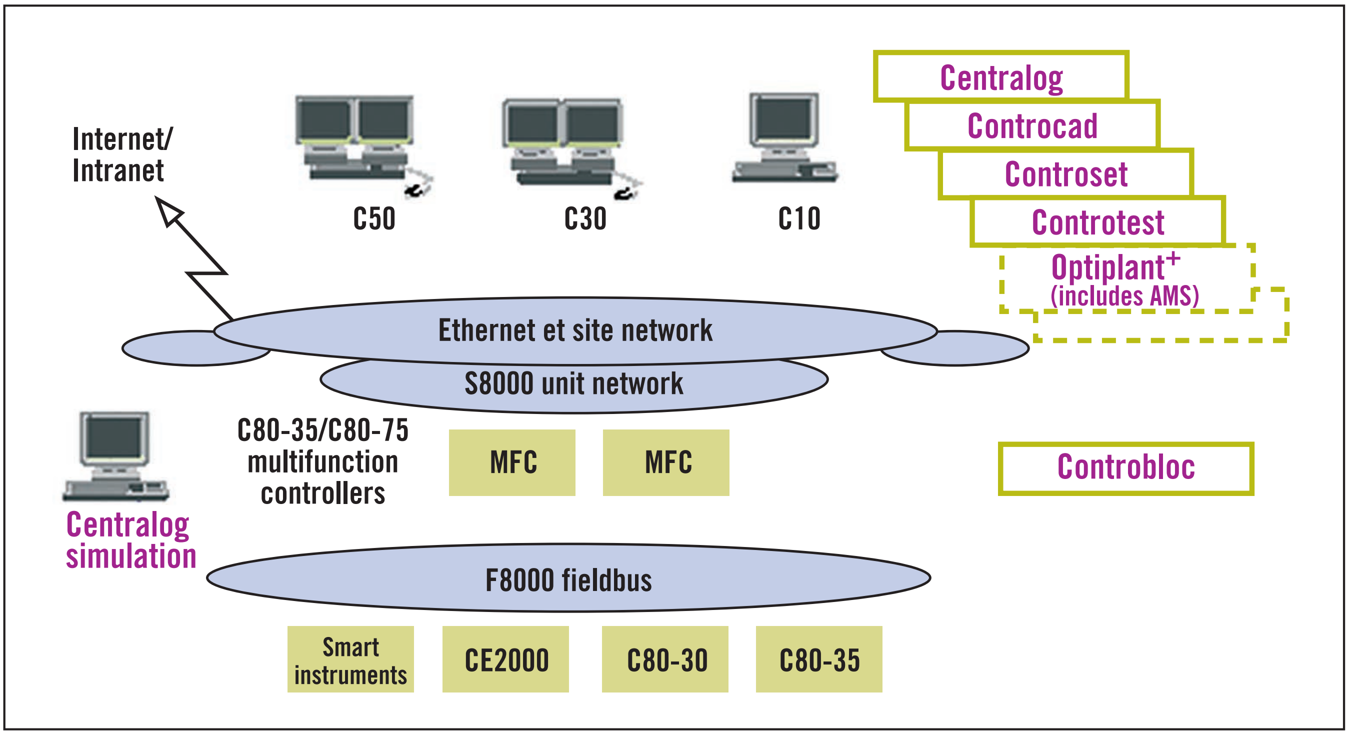
Une voiture sur laquelle on agit avec les pédales d'accélérateur et de frein, et que l'on guide avec le volant est un exemple de système de contrôle, de système dynamique sur lequel on peut agir au moyen d'une commande (ou contrôle). La *théorie du contrôle* analyse les propriétés d'un tel système commandé, dans le but de l'amener d'un état initial donné à un certain état final, en respectant éventuellement certains critères : c'est l'étape de réalisation de la commande. Les systèmes abordés sont multiples : systèmes différentiels, systèmes discrets, systèmes avec bruit, avec retard... Leurs origines sont très diverses : mécanique, électricité, électronique, biologie, chimie, économie… L'objectif peut être de stabiliser le système pour le rendre insensible à certaines perturbations (*stabilisation*), ou encore de déterminer des solutions optimales pour un certain critère d'optimisation (*contrôle optimal*). Dans les industries modernes où la notion de rendement est prépondérante, le rôle de l'automaticien est de concevoir, de réaliser et d'optimiser, tout au moins d'améliorer les méthodes existantes. C'est le sens des recherches que nous avons menées par exemple dans le domaine de l'aérospatiale. Les domaines d'applications de l'automatique, et les industries concernées, sont multiples : automobile, robotique, aéronautique, Internet et les communications en général, sans oublier le secteur médical, chimique, génie des procédés...

## Les systèmes de contrôle sont omniprésents

Pour définir précisément le concept de système de contrôle, il faut utiliser le langage mathématique. Pour en avoir tout d'abord une interprétation intuitive, prenons quelques exemples : un ordinateur dont les éléments interconnectés permettent à un utilisateur d'effectuer une série de commandes élémentaires ; un écosystème, sur lequel on agit en favorisant telle ou telle espèce, pour parvenir à un équilibre ; les tissus nerveux formant un réseau contrôlé par le cerveau, réalisant la transformation de stimuli provenant de l'extérieur et ayant un effet sur l'organisme, sont autant de systèmes de contrôle. Chacun a une structure, des propriétés et des finalités spécifiques. En considérant tous ces objets comme des systèmes de contrôle, on s'intéresse à leur comportement et à leurs caractéristiques fonctionnelles, sans forcément attacher d'importance à leurs propriétés internes ou intrinsèques. Par conséquent, deux systèmes de contrôle ayant, en un certain sens, le même comportement et des caractéristiques similaires, sont considérés comme identiques.
La structure d'un système de contrôle (**figure 1**) est représentée par l'interconnexion de certains éléments formant des sous-systèmes. Il y transite une certaine information. La dynamique d'un système de contrôle définit les transformations possibles du

**FIGURE 1**

Un ordinateur est une interconnexion d'éléments qui permet à un utilisateur d'effectuer une série de commandes élémentaires.



système, survenant dans le temps de manière déterministe ou aléatoire. Les exemples montrent que la structure et la dynamique d'un système de contrôle peuvent avoir différentes significations. Notons que le concept de système de contrôle peut aussi bien décrire des transformations discrètes que continues. Cela permet donc de décrire un ordinateur, des robots, des systèmes adaptatifs à structure variable, etc.
En bref, un système de contrôle est un système dynamique sur lequel on peut agir au moyen d'une commande ou contrôle. Pour le modéliser, on peut avoir recours à des équations différentielles, intégrales, fonctionnelles, aux différences finies, aux dérivées partielles, etc. Pour cette raison la théorie du contrôle est à l'interconnexion de nombreux domaines mathématiques. Les contrôles sont des fonctions ou des paramètres, habituellement soumis à des contraintes.
Un système de contrôle est dit *contrôlable* si on peut l'amener (en temps fini) d'un état initial arbitraire vers un état final prescrit. Sur le problème de la contrôlabilité, Kalman a donné dès 1949 une caractérisation des systèmes linéaires contrôlables en dimension finie, c'est-à-dire quand l'état n'a qu'un nombre fini de composantes **(encadré 1)**. Pour les systèmes non linéaires le problème mathématique de contrôlabilité est beaucoup plus difficile et constitue un domaine de recherche actif.

© ESA

Navette spatiale Hermès

## 1 Condition nécessaire et suffisante de contrôlabilité de Kalman.

Considérons le système différentiel de contrôle *(S)* dans $R^n$ : $\frac{dx}{dt}(t)=Ax(t)+Bu(t)$ où $A$ est une matrice carrée d'ordre $n$, $B$ est une matrice à $n$ lignes et $m$ colonnes, $x(t)$ est un vecteur réel ayant $n$ composantes, et $u$, $t \mapsto u(t)$ est une fonction de $R$ dans $R^m$ (mesurable et bornée). Le système *(S)* est dit contrôlable en temps $T$ si pour tous points $x_0$ et $x_1$ de $R^n$, il existe une fonction $u$, $t \mapsto u(t)$, telle que la solution $x$, $t \mapsto x(t)$ du système *(S)* associée à ce contrôle $u$, $t \mapsto u(t)$ vérifie $x(0)=x_0$ et $x(T)=x_1$.
Le critère de Kalman est le suivant : le système *(S)* est contrôlable (en temps $T$ quelconque) si et seulement si le rang de la matrice $(B, AB, A^2B, \ldots, A^{n-1}B)$ est égal à n.

## Optimiser ces systèmes

Une fois le problème de contrôlabilité résolu, on peut vouloir passer de l'état initial à l'état final en minimisant un certain critère ; on parle alors d'un problème de contrôle optimal. Par exemple, un conducteur effectuant le trajet Bordeaux-Strasbourg peut vouloir voyager en temps minimal, auquel cas il va prendre l'autoroute et donc dépenser plus d'argent et d'essence, ou bien il peut choisir comme critère de dépenser le moins d'argent possible, et dans ce cas il empruntera les axes secondaires, non payants, et mettra beaucoup plus de temps pour arriver à sa destination.
En mathématiques, la théorie du contrôle optimal s'inscrit dans la continuité du calcul des variations. Elle est apparue après la seconde guerre mondiale, répondant à des besoins pratiques de guidage, notamment dans le domaine de l'aéronautique et de la dynamique du vol. La formalisation de cette théorie a posé des questions nouvelles ; par exemple dans la théorie des équations différentielles ordinaires elle a motivé un concept de solution généralisée et a engendré de nouveaux résultats d'existence de trajectoires optimales. La théorie du contrôle optimal est très liée à la mécanique classique, en particulier aux principes variationnels de la mécanique (principe de Fermat, de Huygens, équations d'Euler-Lagrange). Le point clé de cette théorie est le Principe du Maximum de Pontryagin, formulé par L.S. Pontryagin en 1956. Les points forts de la théorie ont été la découverte de la méthode de programmation dynamique, l'introduction de l'analyse fonctionnelle dans la théorie des systèmes optimaux, la découverte des liens entre les solutions d'un problème de contrôle optimal et des résultats de la théorie de stabilité de Lyapunov. Plus tard sont apparues les fondations de la théorie du contrôle stochastique et du filtrage de systèmes dynamiques, la théorie des jeux, le contrôle d'équations aux dérivées partielles. Les résultats de la théorie du contrôle optimal ont trouvé des applications dans de nombreux domaines tels que la mécanique, la chimie, la biologie, la médecine, l'écologie, l'économie.

Un problème de contrôle optimal peut se formuler de la manière suivante. Soit un système de contrôle, dont la position à un instant donné est représentée par un vecteur. Des contrôles agissent sur le système, affectant la dynamique, sous forme de forces extérieures, de potentiels thermiques ou électriques, de programmes d'investissement, etc. Une équation est donnée, reliant les variables et modélisant la dynamique du système. Typiquement on peut considérer le cas d'un système d'équations différentielles. Il faut utiliser l'information présente et les caractéristiques du problème pour construire des contrôles adéquats, permettant de réaliser un but précis. Par exemple lorsqu'on se déplace en voiture on agit selon le code de la route (c'est en tout cas conseillé) et on s'efforce de déterminer un plan de route pour arriver à son but. Des contraintes sont donc imposées sur le processus ou sur les contrôles, qu'il faut prendre en considération. On se donne un critère permettant de mesurer la qualité du processus conduit. Il peut se présenter sous la forme d'une fonctionnelle dépendant de l'état et des contrôles. En plus des conditions précédentes on cherche alors, en outre, à minimiser (ou maximiser) cette quantité. Par exemple on peut souhaiter se déplacer en un temps minimal d'un point à un autre. Notons que l'allure des trajectoires optimales dépend fortement du critère d'optimisation. Par exemple pour réaliser un créneau et garer sa voiture, il est bien évident que la trajectoire suivie diffère si on réalise l'opération en temps minimal (ce qui est risqué) ou bien en minimisant la quantité d'essence dépensée.

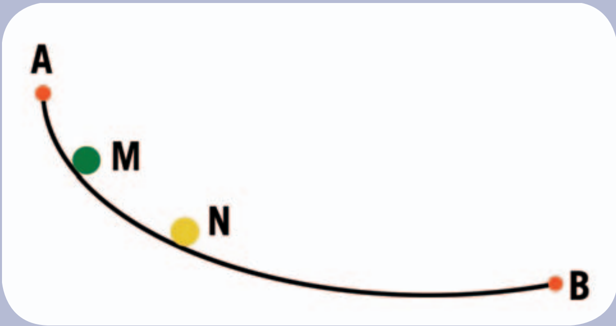
## Un exemple : le contrôle d'une navette spatiale

Dans le domaine de l'aérospatiale, la théorie du contrôle, et du contrôle optimal, a une importance croissante dans les techniques d'aérocapture : problèmes de guidage, transferts d'orbites aéroassistés, développement de lanceurs de satellites récupérables (l'enjeu financier est très important), problèmes de rentrée atmosphérique tels que le fameux projet *Mars Sample Return* développé par le CNES. Il consiste à envoyer une navette spatiale vers la planète Mars, dans le but de ramener sur Terre des échantillons martiens. Nos travaux de recherche nous ont amené à travailler sur ce sujet.
Au cours de la traversée de l'atmosphère, il faut réduire l'énergie cinétique par frottement, amener l'engin spatial d'une position initiale précise à une cible donnée. Il faut en outre prendre en compte certaines contraintes sur l'état : contrainte sur le flux thermique (il ne faut pas qu'il fasse trop chaud à l'intérieur de la navette !), sur l'accélération normale (confort de vol), et sur la pression dynamique (contrainte technique de structure). Enfin, nous avons cherché à minimiser un critère d'optimisation : le flux thermique total de la navette, qui est un facteur d'usure.

Le contrôle est la configuration aérodynamique de la navette. La première question qui se pose est la suivante : les forces aérodynamiques peuvent-elles contribuer à freiner la navette de manière adéquate ? En fait si l'altitude est trop élevée (supérieure à 120 km), alors la densité atmosphérique est trop faible, et il est physiquement impossible de générer des forces aérodynamiques suffisamment intenses. Au contraire, si l'altitude est trop basse (moins de 20 km), la densité atmosphérique est trop grande, et le seul emploi des forces aérodynamiques conduirait au dépassement du seuil autorisé pour le flux thermique ou la pression dynamique. En effet, la rentrée atmosphérique s'effectue à des vitesses très élevées : à 120 km d'altitude la vitesse est de l'ordre de 7 400 m/s, et à 20 km d'altitude la vitesse souhaitée est de l'ordre de 450 m/s ; à basse et moyenne altitude, une vitesse trop élevée provoque un échauffement excessif de l'engin, pouvant mener à la catastrophe. On peut en revanche trouver un compromis si l'altitude est comprise entre 20 et 120 km. C'est ce qu'on appelle la phase atmosphérique. Durant cette phase, la navette se comporte comme un planeur, c'est-à-dire que les moteurs sont coupés : il n'y a pas de force de poussée. L'engin est donc soumis uniquement à la force de gravité et aux forces aérodynamiques. Le contrôle est la gîte qui permet de modifier l'altitude, mais aussi de tourner à droite ou à gauche. Ce problème de contrôle optimal, hautement non linéaire, est difficile en raison des contraintes sur l'état. Par ailleurs, une fois la trajectoire optimale déterminée, il faut ensuite stabiliser la navette autour de cette trajectoire, de façon à prendre en compte de possi-

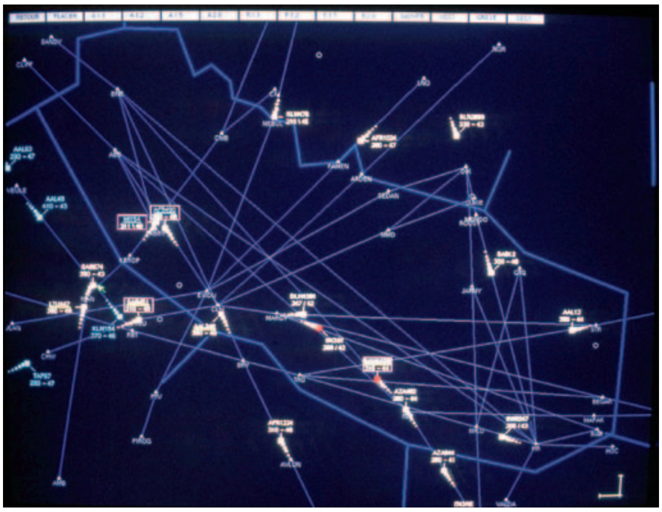
### 2 La cycloïde.

Par définition, la cycloïde est la courbe décrite par un point $M$ d'un cercle roulant sans glisser sur une droite. Par exemple, un point sur le pneu d'un vélo en mouvement décrit une telle courbe.
L'équation paramétrique de la cycloïde est :
$x(\theta)=R(\theta-\sin\theta), y(\theta)=R(1-\cos\theta)$
et son allure est représentée sur la figure ci-dessous.



© CNRS - PHOTOTHÈQUE

Montage du kit d'alimentation de la caméra embarquée sur un Cycab (véhicule électrique deux places).



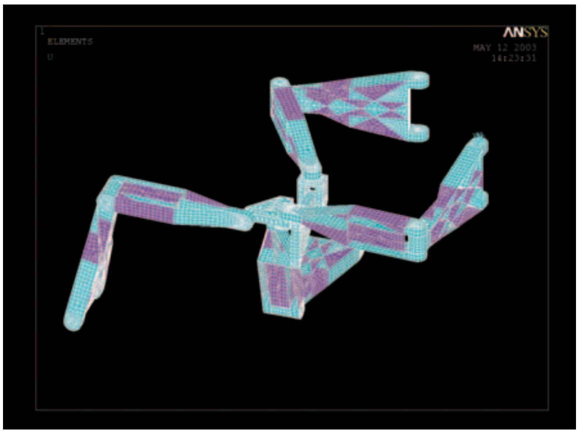
© CNRS - PHOTOTHÈQUE

Simulation de contrôle aérien pour conception des postes du futur.

bles perturbations (atmosphériques par exemple). C'est pourquoi la théorie de la stabilisation a un grand rôle en théorie du contrôle.

## Stabiliser ces systèmes

Dans l'exemple précédent de rentrée atmosphérique, nous avons cherché à stabiliser le système autour d'une certaine trajectoire. C'est un problème général de stabilisation qu'on appelle *problème de poursuite*. Pour expliquer plus simplement ce qu'est la stabilisation, considérons le cas où la trajectoire poursuivie se réduit à un point d'équilibre du système. Cet équilibre peut être instable en l'absence du contrôle et on cherche à le stabiliser. Un exemple très concret est celui du balai que l'on essaie de faire tenir en équilibre sur son doigt. Si on ne part pas de l'équilibre on peut amener le balai à cet équilibre et ensuite, si on arrête de bouger le doigt, le balai devrait, en théorie, rester dans cette même position. Comme on le voit expérimentalement, on n'y arrive pas dans la pratique : si on arrête de bouger le doigt, le balai tombe. On bouge le doigt en fonction de la position du balai (et de sa vitesse) de façon à l'empêcher de tomber : on applique un « feedback », c'est-à-dire un contrôle dépendant de l'état, stabilisant la position d'équilibre. Cette notion de feedback a une longue histoire dans les réalisations humaines.
C'est surtout au XX$^{e}$ siècle que les feedbacks ont connu un essor fantastique. Du point de vue théorique on a d'abord montré que tous les systèmes linéaires contrôlables peuvent être stabilisés par des feedbacks linéaires. Pour les systèmes non linéaires (les plus courants en fait), la contrôlabilité n'implique pas l'existence de feedbacks réguliers. La majorité des systèmes de contrôle rencontrés dans la pratique sont non linéaires. Toutefois, en faisant un développement limité au premier ordre au point d'équilibre, on peut souvent se ramener à un modèle linéaire (appelé *système linéarisé*) qui donne localement de bonnes performances. Par exemple un feedback linéaire stabilisant ce système linéarisé stabilise aussi localement le système non linéaire initial. Il arrive cependant que le système linéarisé ne puisse être stabilisé ainsi. Dans ce cas, deux autres sortes de feedbacks ont été proposées : les feedbacks discontinus, et les feedbacks instationnaires, c'est-à-dire dépendant non seulement de l'état mais aussi du temps (de façon périodique). Disons quelques mots sur ces derniers. Leur intérêt était déjà connu dès 1950 dans différentes situations. Une de ces situations est le « pendule de Kapitsa » que l'on peut réaliser expérimentalement de la façon suivante. On prend une scie sauteuse et on remplace la lame de scie par une petite barre de MECCANO. A cette barre on en visse une autre, plus grande, pouvant tourner librement autour de l'axe de la vis (utiliser deux écrous fortement serrés l'un contre l'autre mais ne serrant pas les deux barres). Maintenant on part de la position suivante : la grande barre est en haut, dessous on a la petite barre et pour finir la scie, le tout sur la même verticale. Si on ne met pas en marche la scie, la grande barre tombe, comme pour le problème du balai. Par contre si on fait marcher la scie, la grande barre ne tombe plus : elle est stabilisée par la commande instationnaire (mettre la scie à sa puissance maximum pour avoir des oscillations très rapides ; pour le démarrage il est bien entendu fortement déconseillé de tenir la grande barre avec une main ; le mieux est de la laisser coulisser dans un tube de PVC, comme ceux utilisés en plomberie, tube que l'on peut ensuite enlever quand la scie marche). Les oscillations stabilisent donc la grande barre. Certes cette commande a différents inconvénients. En particulier les accélérations auxquelles sont soumises le système sont très grandes - de fait l'expérience n'est pas sans danger - . Mais cette commande a un intérêt remarquable : elle ne nécessite aucune mesure. Essayez de recommencer l'expérience du balai, mais, cette fois-ci, fermez les yeux ; vous aurez du mal à empêcher le balai de tomber ! Il est d'ailleurs remarquable que dans le cas du balai on regarde naturellement le haut du balai et non le bas du balai : on peut effectivement montrer que la






Robot T3R1 à l'architecture parallèle développé par le LaRAMA (Université Blaise-Pascal Clermont-Ferrand II) et le LASMEA.

meilleure information pour stabiliser se trouve bien en haut et non en bas. Il est vrai que le danger vient aussi du haut et c'est peut-être plus pour cette raison que l'on regarde le haut du balai. De nombreuses recherches récentes ont porté sur les feedbacks instationnaires pour traiter différentes situations où la contrôlabilité et/ou les mesures ne sont pas très bonnes. Par exemple, on a construit des feedbacks instationnaires stabilisant l'orientation d'un satellite ayant perdu un de ses moteurs.

## Les systèmes de dimension infinie

Pour les systèmes modélisés par des équations aux dérivées partielles, c'est-à-dire dont l'état a un nombre infini de composantes, on ne connaît pas de conditions nécessaires et suffisantes pour la contrôlabilité, même dans le cas des systèmes linéaires. Donnons un exemple concret d'un système de contrôle modélisé par des équations aux dérivées partielles. Considérons un bac avec de l'eau à l'intérieur **(figure 2)**. Le contrôle est la force que l'on applique au bac. L'état du système comprend la position du bac, sa vitesse, mais aussi des quantités, en nombre infini, relatives à l'eau, comme la vitesse de l'eau en chaque point ou la forme de la surface où l'eau est en contact avec l'air. Sur ce système très simple on peut se poser différentes questions très naturelles. Premièrement, est-il possible de déplacer un bac d'eau d'une position donnée à une autre, de sorte qu'au début comme à la fin du déplacement l'eau soit au repos (vitesse nulle, surface de contact air-eau horizontale) ? Deuxième question, supposons qu'au début il y ait des vagues dans le bac. Peut-on les faire disparaître en temps fini en appliquant une force (dépendant du temps) appropriée au bac ? Dans la question précédente, la force est recherchée en boucle ouverte : elle dépend de la configuration initiale du système (et du temps). Comme on l'a vu avec le balai, cette méthode est très peu robuste : la moindre erreur sur le modèle ou sur la condition initiale peut conduire à des résultats très différents de ceux désirés. La troisième question nous conduit donc à nous demander si on ne pourrait pas construire un feedback qui atténuerait rapidement les vagues. On aimerait aussi que ce feedback ne dépende que d'informations facilement accessibles, comme la hauteur de l'eau sur le bord du bac.

Toutes ces questions sont complètement ouvertes. Nous avons toutefois obtenu des résultats partiels dans le cas d'une modélisation du mouvement de l'eau par les équations dites de Saint-Venant. Dans ce modèle tous les points sur la même verticale sont supposés avoir des vitesses pratiquement égales. C'est un bon modèle quand la hauteur de l'eau est faible par rapport aux dimensions du bac. Il est d'ailleurs très utilisé pour modéliser l'écoulement de l'eau dans un canal. La vitesse commune des points sur la même verticale est notée v sur la **figure 2**. Dans cette modélisation, l'état du système est composé de deux variables en dimension finie, à savoir le déplacement du bac noté $D$, la vitesse du bac, et deux variables de dimension infinie, à savoir la vitesse v et la hauteur $H$ du fluide, qui sont, au temps considéré, des fonctions de $x$ (**voir la figure**). Nous avons alors une réponse positive aux deux premières questions ; pour la troisième, on a construit des feedbacks qui donnent une bonne atténuation des vagues en simulation numérique (mais on n'a pas la démonstration mathématique de cette atténuation des vagues). Mathématiquement, la difficulté est due au fait que l'on ne peut rien déduire de l'étude du système linéarisé autour d'un équilibre (vitesses du bac et de l'eau nulles, hauteur de l'eau dans le bac constante) : en effet pour ce système linéarisé les réponses aux questions 2 et 3 sont négatives et, bien que la réponse à la question 1 soit effectivement positive pour le système linéarisé, cela n'implique pas cependant une réponse positive à la question 1 pour les équations de Saint-Venant, qui sont hautement non linéaires. D'une certaine façon, la non linéarité aide à établir la contrôlabilité du système : l'idée est de chercher un déplacement du bac pour lequel le système linéarisé est contrôlable. Ce mouvement met en oeuvre la non linéarité dont on se sert pour établir la contrôlabilité. En bref, la stratégie générale consiste à aller à des endroits où on peut établir facilement un résultat de contrôlabilité, et en revenir. ■

**FIGURE 2**

L'état du système est composé de deux variables en dimension finie, à savoir le déplacement du bac noté $D$, la vitesse du bac, et deux variables de dimension infinie, à savoir la vitesse V et la hauteur H du fluide, qui sont, au temps considéré, des fonctions de $x$