

# Introduction au contrôle optimal

Emmanuel Trélat

Université Paris-Sud, Laboratoire ANEDP,  
Mathématiques, UMR 8628 Bat. 425, 91405 Orsay cedex  
Emmanuel.Trelat@math.u-psud.fr  
<http://www.math.u-psud.fr/~trelat>

Pour expliquer et motiver la théorie nous allons partir d'un problème concret simple : le contrôle optimal d'un ressort. Cet exemple sera notre fil conducteur, et sera résolu complètement, de manière théorique puis numérique.

Dans une première partie, nous nous placerons dans le cas linéaire : c'est le problème de l'oscillateur harmonique (traité en totalité dans [7]), et nous développerons la théorie du contrôle optimal linéaire. Cette partie est rédigée de manière à être accessible avec des connaissances de DEUG ou de classes préparatoires.

Dans une deuxième partie nous traitons le cas de l'oscillateur non linéaire et introduisons des outils généraux de théorie du contrôle optimal. Les applications numériques sont effectuées à l'aide du logiciel Maple.

## 1 Contrôle optimal d'un ressort

### 1.1 Présentation du problème

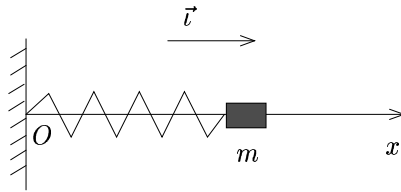


Figure 1: Le ressort

Considérons une masse ponctuelle  $m$ , astreinte à se déplacer *le long d'un axe* ( $Ox$ ), attachée à un ressort de raideur  $k$ , voir figure 1. La masse ponctuelle est alors attirée vers l'origine par une force que l'on suppose égale à  $-k_1(x-l) - k_2(x-l)^3$ , où  $l$  est la longueur du ressort au repos. On applique à cette masse ponctuelle une force extérieure horizontale  $u(t)\vec{e}$ . Les lois de la physique nous donnent l'équation du mouvement :

$$m\ddot{x}(t) + k_1(x(t) - l) + k_2(x(t) - l)^3 = u(t) \quad (1)$$

De plus on impose une *contrainte* à la force extérieure :

$$\forall t \quad |u(t)| \leq 1$$

Cela signifie qu'on ne peut pas appliquer n'importe quelle force extérieure horizontale à la masse ponctuelle : le module de cette force est borné, ce qui traduit le fait que notre puissance d'action est limitée et rend ainsi compte des limitations techniques de l'expérience.

Supposons que la position et la vitesse initiales de l'objet sont :  $x(0) = x_0$ ,  $\dot{x}(0) = y_0$ . Le problème est d'amener la masse ponctuelle à la position d'équilibre  $x = l$  en un *temps minimal* en *contrôlant la force externe*  $u(t)$  appliquée à cet objet, et en tenant compte de la *contrainte* :  $|u(t)| \leq 1$ . La fonction  $u$  est appelée le *contrôle*.

Des conditions initiales étant données, le but est donc de trouver une fonction  $u(t)$  qui permet d'amener la masse ponctuelle à sa position d'équilibre en un temps minimal.

## 1.2 Modélisation mathématique

Pour la simplicité de l'exposé, nous supposons :  $m = 1 \text{ kg}$ ,  $k_1 = 1 \text{ N.m}^{-1}$ ,  $l = 0 \text{ m}$  (on se ramène à  $l = 0$  par translation). Dans la première partie sur le contrôle linéaire, nous supposons  $k_2 = 0$ , et dans la deuxième partie sur le contrôle non linéaire, nous prendrons  $k_2 = 2$ .

Dans *l'espace des phases* le système différentiel correspondant à l'équation du mouvement est :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = y(t) \\ \dot{y}(t) = -x(t) - k_2 x(t)^3 + u(t) \end{cases}$$

$$x(0) = x_0, \dot{x}(0) = y_0$$

Posons :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}, f(X) = \begin{pmatrix} 0 \\ -k_2 x^3 \end{pmatrix}$$

On obtient :

$$\boxed{\dot{X} = AX + f(X) + Bu, \quad X(0) = X_0}$$

Il s'agit d'un *système différentiel contrôlé*. C'est un *système linéaire* dans le cas où  $k_2 = 0$ .

## 1.3 Quelques remarques sur l'équation

Faisons quelques remarques sur l'équation (1) dans le cas non linéaire, c'est-à-dire  $k_2 = 2$ .

### 1.3.1 Le ressort libre

Dans ce paragraphe on suppose que  $u(t) = 0$ , c'est-à-dire qu'aucune force n'est appliquée au ressort. L'équation (1) se réduit alors à :

$$\ddot{x} + x + 2x^3 = 0$$

qui s'appelle l'équation de *Duffing*. Il est très facile de vérifier que toute solution de cette équation vérifie :

$$x(t)^2 + x(t)^4 + \dot{x}(t)^2 = \text{Cste}$$

Dans le plan de phase tout solution appartient à une courbe algébrique et est périodique. Ci-dessous nous utilisons Maple pour tracer dans le plan de phase  $(x, \dot{x})$  plusieurs trajectoires solutions et le champ de vecteurs associé, ainsi que les courbes  $x(t)$  en fonction de  $t$ .

Les commandes suivantes donnent la figure 2.

```
> with(DEtools):
> eq1 := D(x)(t)=y(t) :
  eq2 := D(y)(t)=-x(t)-2*x(t)^3 :
  sys := eq1,eq2 :
  ic := [x(0)=1,y(0)=0],[x(0)=2,y(0)=0] :
> DEplot([sys],[x(t),y(t)],t=0..6,[ic],stepsize=0.05,
        scene=[x(t),y(t)],linecolor=[blue,red]);
> DEplot([sys],[x(t),y(t)],t=0..6,[ic],stepsize=0.05,
        scene=[t,x(t)],linecolor=[blue,red]);
```

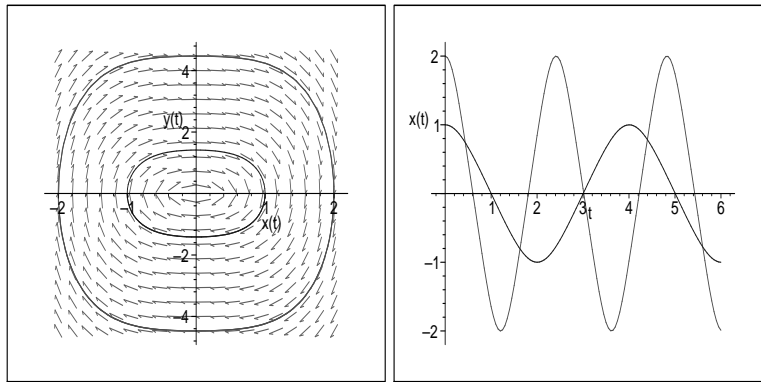


Figure 2:

### 1.3.2 Le ressort amorti

Dans ce paragraphe on suppose que  $u(t) = -\dot{x}(t)$ . L'équation (1) devient :

$$\ddot{x} + x + 2x^3 + \dot{x} = 0$$

A l'aide de Maple, traçons dans le plan de phase  $(x, \dot{x})$  plusieurs trajectoires solutions et le champ de vecteurs associé.

```
> eq1 := D(x)(t)=y(t) :
  eq2 := D(y)(t)=-x(t)-2*x(t)^3-y(t) :
  sys := eq1,eq2 :
  ic := [x(0)=1,y(0)=0],[x(0)=2,y(0)=0] :
  DEplot([sys],[x(t),y(t)],t=0..15,[ic],stepsize=0.05,
```

```

scene=[x(t),y(t)],linecolor=[blue,red]);
DEplot([sys],[x(t),y(t)],t=0..15,[ic],stepsize=0.05,
scene=[t,x(t)],linecolor=[blue,red]);

```

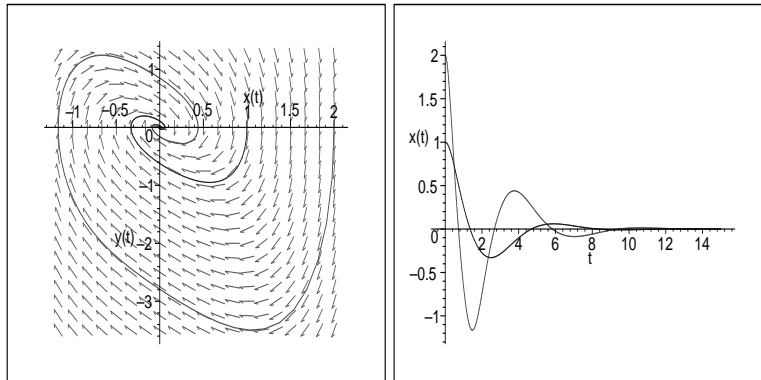


Figure 3:

On observe un *amortissement* : les solutions tendent vers l'origine (voir figure 3. En fait il est aisé, à l'aide de la théorie de Lyapunov, de montrer que l'origine est globalement asymptotiquement stable. Notons cependant ce contrôle  $u(t)$  ne résout pas notre problème, car le temps pour amener le ressort à sa position d'équilibre est infini !

### 1.3.3 Le ressort entretenu

Dans ce paragraphe on suppose que

$$u(t) = -(x(t)^2 - 1)\dot{x}(t)$$

L'équation (1) devient :

$$\ddot{x} + x + 2x^3 + (x^2 - 1)\dot{x} = 0$$

C'est une équation de type *Van der Pol*.

À l'aide de Maple, traçons dans le plan de phase  $(x, \dot{x})$  plusieurs trajectoires solutions et le champ de vecteurs associé, ainsi que les courbes  $x(t)$  en fonction de  $t$ .

```

> eq1 := D(x)(t)=y(t) :
eq2 := D(y)(t)=-x(t)-2*x(t)^3-(x(t)^2-1)*y(t) :
sys := eq1,eq2 :
ic := [x(0)=1,y(0)=0], [x(0)=4,y(0)=0] :
DEplot([sys],[x(t),y(t)],t=0..10,[ic],stepsize=0.05,
scene=[x(t),y(t)],linecolor=[blue,red]);
DEplot([sys],[x(t),y(t)],t=0..10,[ic],stepsize=0.05,
scene=[t,x(t)],linecolor=[blue,red]);

```

Numériquement on constate l'existence d'une solution périodique qui semble "attirer" toutes les autres solutions, voir figure 4. En fait on peut montrer

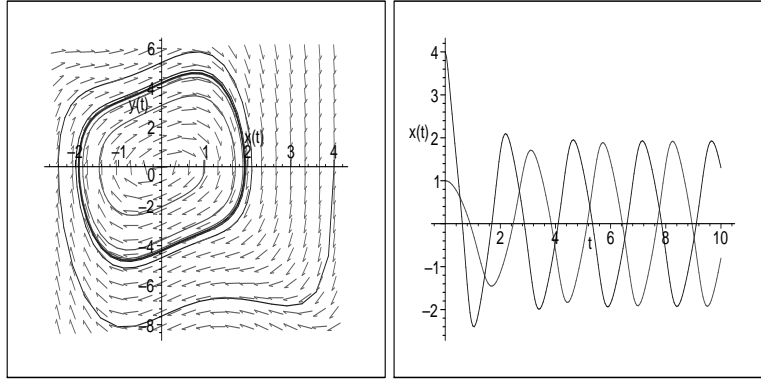


Figure 4:

rigoureusement, toujours à l'aide de la théorie de Lyapunov, que cette solution périodique existe et est *attractive*.

Qualitativement on peut comprendre le comportement d'un tel oscillateur en discutant le signe de  $x^2 - 1$ . En effet si  $x$  est grand il y a un amortissement et le rayon polaire des solutions dans le plan de phase a tendance à décroître. Au contraire si  $x$  est petit alors le terme  $(x^2 - 1)\dot{x}$  apporte de l'énergie et le rayon a tendance à augmenter. On retrouve bien ce comportement sur la figure.

L'équation de Van der Pol est en fait le modèle d'une *horloge*.

## Part I

# Contrôle optimal de systèmes linéaires

Dans cette partie nous supposons que  $k_2 = 0$ . Nous introduisons d'abord des outils de contrôle optimal dans le cas linéaire, puis nous résolvons le cas de l'oscillateur harmonique. Pour plus de détails, voir [7].

## 2 Théorie du contrôle optimal linéaire

### 2.1 Position du problème

Soient  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et  $B, X_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^n$ . Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ . Soit  $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction  $\mathcal{C}^1$  par morceaux telle que :  $\forall t \ u(t) \in I$ . Les théorèmes d'existence de solutions d'équations différentielles nous assurent l'existence d'une unique application :  $\mathbb{R} \ni t \mapsto X(t) \in \mathbb{R}^n$   $\mathcal{C}^1$  par morceaux telle que :

$$\begin{aligned} \forall t \quad \dot{X}(t) &= AX(t) + Bu(t) \\ X(0) &= X_0 \end{aligned} \tag{2}$$

Cette application dépend de  $u$ . Donc si on change la fonction  $u$ , on obtient une autre trajectoire  $t \mapsto X(t)$  dans  $\mathbb{R}^n$ , voir figure 5.

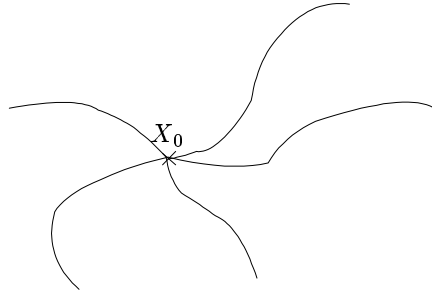


Figure 5:

Deux questions se posent alors naturellement :

- Etant donné un point  $X_1 \in \mathbb{R}^n$ , existe-t-il un contrôle  $u$  tel que la trajectoire associée à ce contrôle joigne  $X_0$  et  $X_1$  en un temps fini  $T$  ? (voir figure 6)

**C'est le problème de contrôlabilité.**

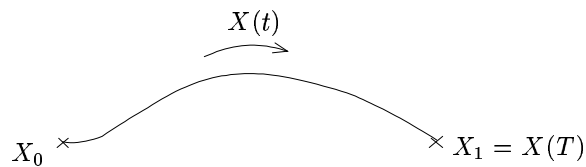


Figure 6: Problème de contrôlabilité

- Si la condition précédente est remplie, existe-t-il un contrôle qui de plus *minimise le temps de parcours* de  $X_0$  à  $X_1$  ? (voir figure 7)

**C'est le problème de contrôle optimal.**

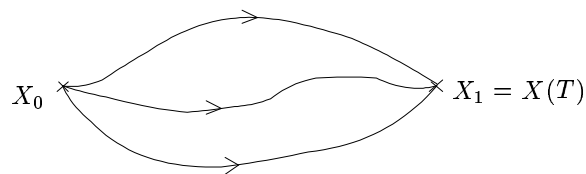


Figure 7: Problème de contrôle optimal

Les théorèmes suivants vont répondre à ces questions, et permettre de résoudre le problème de l'oscillateur harmonique.

## 2.2 Contrôlabilité : l'ensemble d'accessibilité

Considérons le système contrôlé (2).

**Définition 2.1** L'ensemble des points accessibles à partir de  $X_0$  en un temps  $T > 0$  est :

$$A(X_0, T) = \{X_1 \in \mathbb{R}^n \mid \exists u \in C^0_{\text{morceaux}}([0, T], I), \\ \exists X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ } C^1 \text{ par morceaux t.q. } X(0) = X_0, \\ \forall t \in [0, T] \quad \dot{X}(t) = AX(t) + Bu(t), \quad X(T) = X_1\}$$

Autrement dit  $A(X_0, T)$  est l'ensemble des extrémités des solutions de (2) au temps  $T$ , lorsqu'on fait varier le contrôle  $u$ , voir figure 8.

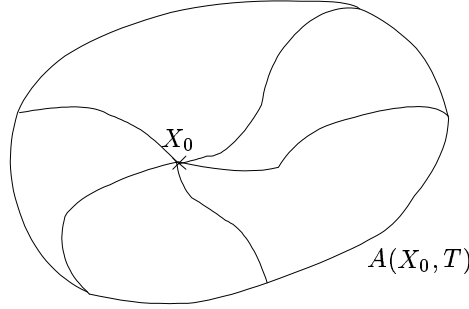


Figure 8: Ensemble d'accessibilité

**Théorème 2.2** Soient  $T > 0$  et  $X_0 \in \mathbb{R}^n$ . Alors pour tout  $t \in [0, T]$ ,  $A(X_0, t)$  est compact, convexe, et varie continûment avec  $t$  sur  $[0, T]$ .

*Démonstration :*

- Convexité : Soient  $X_1, X_2 \in A(X_0, t)$ , et  $\lambda \in [0, 1]$ . On veut montrer que :  $\lambda X_1 + (1 - \lambda)X_2 \in A(X_0, t)$ .

Par définition, pour  $i = 1, 2$ , il existe un contrôle  $u_i : [0, t] \rightarrow I$  tel que la trajectoire  $X_i(s)$  associée à  $u_i$  vérifie :

$$X_i(0) = X_0, \quad X_i(t) = X_i, \quad \frac{dX_i}{ds}(s) = AX_i(s) + Bu(s)$$

D'après la méthode de la variation de la constante :

$$X_i = X_i(t) = e^{tA}X_0 + e^{tA} \int_0^t e^{-sA} Bu_i(s) ds$$

Posons :  $\forall s \in [0, t] \quad u(s) = \lambda u_0(s) + (1 - \lambda)u_1(s)$

$u$  est  $C^0$  par morceaux, à valeurs dans  $I$  car  $I$  est convexe ( $I$  est un intervalle). Soit  $X(s)$  la trajectoire associée à  $u$ . Alors, par définition de  $A(X_0, t)$  :

$$X(t) = e^{tA}X_0 + e^{tA} \int_0^t e^{-sA} Bu(s) ds \in A(t)$$

Or :

$$\begin{aligned}\lambda X_1 + (1 - \lambda)X_2 &= e^{tA}X_0 + (1 - \lambda)e^{tA}X_0 \\ &\quad + e^{tA} \int_0^t e^{-sA} B(\lambda u_0(s) + (1 - \lambda)u_1(s)) ds \\ &= X(t)\end{aligned}$$

donc  $\lambda X_1 + (1 - \lambda)X_2 \in A(t)$ , ce qui prouve la convexité de  $A(t)$ .

- Compacité : admise (elle résulte de résultats de convergence faible, voir [7]).
- Continuité : Soit  $\varepsilon > 0$ . On va chercher  $\delta > 0$  tel que :

$$\forall t_1, t_2 \in [0, T] \quad |t_1 - t_2| \leq \delta \Rightarrow d(A(t_1), A(t_2)) \leq \varepsilon$$

(on note  $A(t) = A(X_0, t)$ )

$$\text{où : } d(A(t_1), A(t_2)) = \sup \left( \sup_{y \in A(t_2)} d(y, A(t_1)), \sup_{y \in A(t_1)} d(y, A(t_2)) \right)$$

Par la suite, on suppose  $0 \leq t_1 < t_2 \leq T$ .

Il suffit de montrer que :

1.  $\forall y \in A(t_2) \quad d(y, A(t_1)) \leq \varepsilon$
2.  $\forall y \in A(t_1) \quad d(y, A(t_2)) \leq \varepsilon$

Montrons 1. (2. étant similaire) :

Soit  $y \in A(t_2)$ . Il suffit de montrer que :

$$\exists z \in A(t_1) \quad / \quad d(y, z) \leq \varepsilon$$

Par définition de  $A(t_2)$ , il existe un contrôle  $u \in C_{\text{morceaux}}^0([0, T])$  tel que la trajectoire associée à  $u$ , partant de  $X_0$ , vérifie :  $x(t_2) = y$ , voir figure 9.

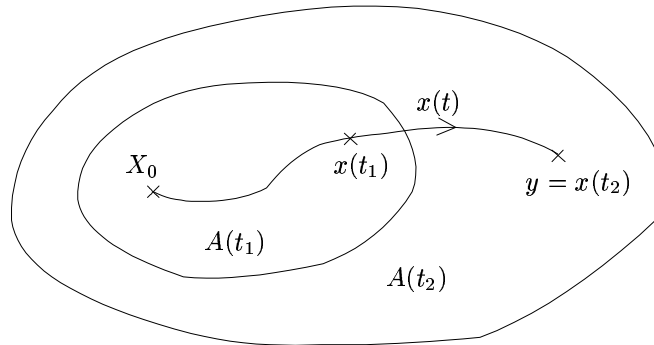


Figure 9:



On va voir que  $z = x(t_1)$  convient. En effet on a :

$$\begin{aligned} x(t_2) - x(t_1) &= e^{t_2 A} X_0 + e^{t_2 A} \int_0^{t_2} e^{-sA} B u(s) ds \\ &\quad - \left( e^{t_1 A} X_0 + e^{t_1 A} \int_0^{t_1} e^{-sA} B u(s) ds \right) \\ &= e^{t_2 A} \int_{t_1}^{t_2} e^{-sA} B u(s) ds \\ &\quad + (e^{t_2 A} - e^{t_1 A}) \left( X_0 + \int_0^{t_1} e^{-sA} B u(s) ds \right) \end{aligned}$$

Si  $|t_1 - t_2|$  est petit, le premier terme de cette somme est petit par continuité de l'intégrale ; le deuxième terme est petit par continuité de  $t \mapsto e^{tA}$ . Plus précisément :

1.  $\begin{array}{l} t \mapsto e^{tA} \\ [0, T] \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \end{array}$  est continue sur le compact  $[0, T]$ , donc :

$$\exists C_1 > 0 / \forall t \in [0, T] \quad \|e^{tA}\| \leq C_1$$

(où  $\|\cdot\|$  représente la norme d'application linéaire :  $\|f\| = \sup_x \frac{\|f(x)\|}{\|x\|}$ )

2.  $\begin{array}{l} t \mapsto u(t) \\ [0, T] \rightarrow \mathbb{R} \end{array}$  est continue sur le compact  $[0, T]$ , donc :

$$\exists A > 0 / \forall t \in [0, T] \quad |u(t)| \leq A$$

3.  $\begin{array}{l} s \mapsto e^{-sA} B u(s) \\ [0, T] \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \end{array}$  est continue, donc  $\begin{array}{l} t \mapsto \int_0^t e^{-sA} B u(s) ds \\ [0, T] \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \end{array}$  est continue sur le compact  $[0, T]$ , donc uniformément continue d'après le théorème de Heine. Ainsi :

$$\exists \delta_1 > 0 / \forall t_1, t_2 \in [0, T] \quad |t_1 - t_2| \leq \delta_1 \implies \left\| \int_{t_1}^{t_2} e^{-sA} B u(s) ds \right\| \leq \frac{\varepsilon}{2C_1}$$

4.  $\begin{array}{l} t \mapsto e^{tA} \\ [0, T] \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \end{array}$  est continue sur  $[0, T]$ , donc uniformément continue :

$$\exists \delta_2 > 0 / \forall t_1, t_2 \in [0, T] \quad |t_1 - t_2| \leq \delta_2 \implies \|e^{t_1 A} - e^{t_2 A}\| \leq \frac{\varepsilon}{2C_2}$$

Posons :  $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ . Alors :

$$\forall t_1, t_2 \in [0, T] \quad |t_1 - t_2| \leq \delta \implies \|x(t_2) - x(t_1)\| \leq C_1 \frac{\varepsilon}{2C_1} + C_2 \frac{\varepsilon}{2C_2} = \varepsilon$$

□

**Remarque 2.3** La solution de  $\begin{cases} \dot{X} &= AX + Bu \\ X(0) &= X_0 \end{cases}$  est :

$$X(t) = e^{tA} X_0 + e^{tA} \int_0^t e^{-sA} B u(s) ds$$

C'est la somme de deux termes. On constate que si  $X_0 = 0$ , i.e. si on part de l'origine, alors l'expression de  $X(t)$  est simplifiée :  $X(t) = e^{tA} \int_0^t e^{-sA} Bu(s) ds$ , et est linéaire en  $u$ .

Cette remarque nous mène à la proposition suivante :

**Proposition 2.4** *On suppose  $X_0 = 0$  et  $I = \mathbb{R}$ . Alors :*

1.  $\forall T > 0$   $A(0, T)$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^n$ . De plus :
2.  $0 < T_1 < T_2 \implies A(0, T_1) \subset A(0, T_2)$ .

*Démonstration :*

1. Soient  $X_1, X_2 \in \mathbb{R}^n$ ,  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ .

Pour  $i = 1, 2$  :  $X_i \in A(0, T)$ , donc, par définition, il existe un contrôle  $u_i : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^m$  par morceaux tel que la trajectoire associée  $X_i(t)$  vérifie  $X_i(T) = X_i$ . D'où :

$$X_i = e^{TA} \int_0^T e^{-sA} Bu_i(s) ds$$

Posons :  $\forall s \in [0, T]$   $u(s) = \lambda u_1(s) + \mu u_2(s)$ . Alors :

$$\lambda X_1 + \mu X_2 = X(t) = e^{TA} \int_0^T e^{-sA} Bu(s) ds$$

Si  $X(t)$  est la trajectoire associée au contrôle  $u(t)$ , alors :

$$\lambda X_1 + \mu X_2 = X(T)$$

Donc :  $\lambda X_1 + \mu X_2 \in A(0, T)$ .

2. Soit  $X_1 \in A(0, T_1)$ . Par définition, il existe un contrôle  $u_1 : [0, T_1] \rightarrow \mathbb{R}^m$  par morceaux tel que la trajectoire associée  $X_1(t)$  vérifie  $X_1(T_1) = X_1$ . D'où :

$$X_1 = e^{T_1 A} \int_0^{T_1} e^{-sA} Bu_1(s) ds$$

Définissons  $u_2$  sur  $[0, T_2]$  par :

$$\begin{cases} u_2(t) = 0 & \text{si } 0 \leq t \leq T_2 - T_1 \\ u_2(t) = u_1(T_1 - T_2 + t) & \text{si } T_2 - T_1 \leq t \leq T_2 \end{cases}$$

Soit  $X_2(t)$  la trajectoire associée à  $u_2$  sur  $[0, T_2]$ . Alors :

$$\begin{aligned} X_2(T_2) &= e^{T_2 A} \int_0^{T_2} e^{-tA} Bu_2(t) dt \\ &= e^{T_2 A} \int_{T_2 - T_1}^{T_2} e^{-tA} Bu_2(t) dt \quad \text{car } u_2|_{[0, T_2 - T_1]} = 0 \\ &= e^{T_2 A} \int_0^{T_1} e^{-T_2 A} e^{T_1 A} e^{-sA} Bu_2(T_2 - T_1 + s) ds \quad \text{si } s = T_1 - T_2 + t \\ &= e^{T_1 A} \int_0^{T_1} e^{-sA} Bu_1(s) ds \\ &= X_1 \end{aligned}$$

Ainsi :  $X_1 \in A(0, T_2)$ . □

**Définition 2.5**  $A(0) = \bigcup_{t \geq 0} A(0, T)$  est l'ensemble des points accessibles (en un temps quelconque).

**Corollaire 2.6**  $A(0)$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^n$ .

*Démonstration* :  $A(0)$  est une union croissante de sous-espaces vectoriels, donc est un sous-espace vectoriel.  $\square$

### 2.3 Condition nécessaire et suffisante de contrôlabilité

**Définition 2.7** Le système contrôlé  $\dot{X} = AX + Bu$  est dit contrôlable si pour tous  $X_0, X_1 \in \mathbb{R}^n$ , il existe un contrôle  $u$  tel que la trajectoire associée relie  $X_0$  et  $X_1$  en un temps fini  $T$  (voir figure 10), i.e. :

$$\forall X_0, X_1 \in \mathbb{R}^n \quad \exists T > 0 \quad \exists u : [0, T] \rightarrow I \quad C^0 \text{ par morceaux}$$

$$\exists X : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n \quad / \quad \begin{cases} \dot{X} &= AX + Bu \\ X(0) &= X_0 \\ X(T) &= X_1 \end{cases}$$



Figure 10: Contrôlabilité

**Remarque 2.8** On va supposer que  $X_0 = 0$ , ce qui simplifie la situation puisque dans ce cas le corollaire précédent montre que  $A(0)$  est un sous-espace vectoriel. Dans le cas général ce n'est plus vrai mais cependant le résultat suivant de contrôlabilité reste valable : il suffit de raisonner sur la dimension d'un convexe plutôt que sur la dimension d'un sous-espace vectoriel, voir [7].

Le théorème suivant nous donne une condition nécessaire et suffisante de contrôlabilité en 0 :

**Théorème 2.9** Le système  $\dot{X} = AX + Bu$  est contrôlable en 0 si et seulement si la matrice  $C = \begin{pmatrix} B & | & AB & | & \dots & | & A^{n-1}B \end{pmatrix}$  est de rang  $n$ .

*Démonstration* :

$\Rightarrow$  Raisonnons par contraposée : supposons que  $\text{rg } C < n$ . Alors  $\text{rg } {}^t C < n$ . Donc, si on considère  ${}^t C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  comme un endomorphisme :  ${}^t C$  est non surjective, donc non injective :

$$\begin{aligned} \exists V \in \mathbb{R}^n \quad / \quad {}^t C V &= 0 \\ \Rightarrow {}^t V C &= 0 \\ \Rightarrow {}^t V B = {}^t V AB = \dots = {}^t V A^{n-1} B &= 0 \end{aligned}$$

Or d'après le théorème d'Hamilton-Cayley :

$$\exists a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \quad / \quad A^n = a_0 I + \dots + a_{n-1} A^{n-1}$$

D'où :  ${}^t V A^n B = 0$

Puis, par récurrence :  $\forall k \in \mathbb{N} \quad {}^t V A^k B = 0$

On en déduit :  $\forall t \in \mathbb{R} \quad {}^t V e^{tA} B = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} {}^t V A^k B = 0$

Soit  $u$  un contrôle quelconque. La trajectoire associée, partant de O, est :

$$X(t) = e^{tA} \int_0^t e^{-sA} B u(s) ds = \int_0^t e^{(t-s)A} B u(s) ds$$

Donc :

$$\langle V, X(t) \rangle = {}^t V X(t) = \int_0^t \underbrace{{}^t V e^{(t-s)A} B}_{=0} u(s) ds = 0$$

Ce qui signifie que, lorsque  $u$  varie, les trajectoires associées partant de O restent dans un hyperplan contenant O et orthogonal au vecteur  $V$ . Donc tout point en dehors de ce plan ne peut être atteint. Ceci établit la non-contrôlabilité du système.

$\Leftarrow$  Raisonnons par contraposée : supposons que le système n'est pas contrôlable en O. On a vu précédemment (cf cor. 2.6) que l'ensemble des points accessibles (en un temps quelconque) à partir de O,  $A(0)$ , est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^n$ . Si le système n'est pas contrôlable, alors  $A(0)$  est un sous-espace vectoriel *strict* de  $\mathbb{R}^n$  (car sinon :  $A(0) = \mathbb{R}^n \Rightarrow$  système contrôlable !). Donc  $A(0)$  est inclus dans un hyperplan. Appelons  $V$  un vecteur orthogonal à cet hyperplan. Alors :

$$\forall W \in A(0) \quad \langle V, W \rangle = {}^t V W = 0$$

Donc, par définition de  $A(0)$  :

$$\forall T > 0 \quad \forall u \in \mathcal{C}_{\text{morceaux}}^0([0, T], I) \quad {}^t V \int_0^T e^{(T-s)A} B u(s) ds = 0$$

Posons alors :  $\forall s \in [0, T] \quad u(s) = \lambda {}^t V e^{(T-s)A} B$ , où  $\lambda$  est choisi assez petit pour que  $u$  soit bien à valeurs dans  $I$  (c'est possible par compacité et continuité de l'application exponentielle).

On en déduit :  $\int_0^T u(s)^2 ds = 0$

D'où :  $u = 0$  (car  $u$  est  $\mathcal{C}^0$  par morceaux)

i.e. :  $\forall s \in [0, T] \quad {}^t V e^{(T-s)A} B = 0$

- si  $s = T$  :  ${}^t V B = 0$
- on dérive par rapport à  $s$  :  $-{}^t V A e^{(T-s)A} B = 0$   
et on remplace  $s = T$  :  ${}^t V A B = 0$ .
- d'où, par dérivations successives :

$${}^t V B = {}^t V A B = \dots = {}^t V A^{n-1} B = 0$$

donc  ${}^tVC = 0$ , puis en transposant :

$${}^tCV = 0$$

$\Rightarrow {}^tC$  non injective

$$\Rightarrow \text{rg } C < n$$

□

## 2.4 Contrôle optimal, principe du maximum

### 2.4.1 Temps minimal

Il faut formaliser, à l'aide de  $A(X_0, t)$ , la notion de temps minimal.

Soient  $X_0, X_1 \in \mathbb{R}^n$ . On suppose que  $X_1$  est accessible à partir de  $X_0$ , i.e. il existe au moins une trajectoire reliant  $X_0$  à  $X_1$ . Parmi toutes les trajectoires reliant  $X_0$  à  $X_1$  on aimerait caractériser celle qui le fait en temps minimal  $T$ , voir figure 11.

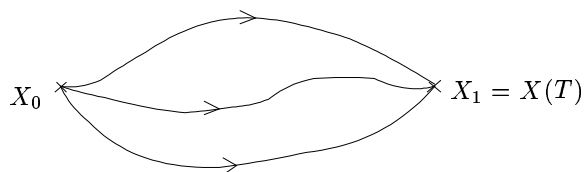


Figure 11:

Si  $T$  est le temps minimal, alors pour tout  $t < T$ ,  $X_1 \notin A(X_0, T)$  (en effet sinon  $X_1$  serait accessible à partir de  $X_0$  en un temps  $< T$ ). Par conséquent :

$$T = \inf\{t > 0 / X_1 \in A(X_0, t)\}$$

$T$  est bien défini car, d'après le théorème 2.2,  $A(X_0, t)$  varie continûment avec  $t$ , donc  $\{t > 0 / X_1 \in A(X_0, t)\}$  est fermé dans  $\mathbb{R}$ . En particulier cette borne inférieure est un minimum.

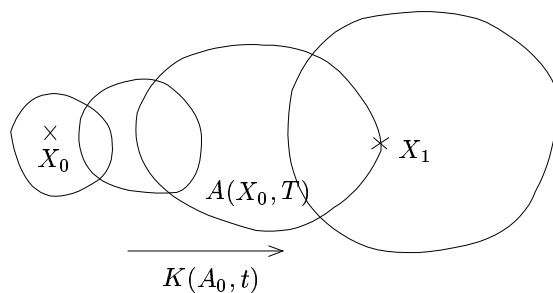


Figure 12: Temps minimal

Le temps  $t = T$  est le premier temps pour lequel  $A(X_0, t)$  contient  $X_1$  (voir figure 12).

D'autre part, on a nécessairement :

$$X_1 \in \text{Fr } A(X_0, T) = A(X_0, T) \setminus A^0(X_0, T)$$

En effet, si  $X_1$  appartenait à l'intérieur de  $A(X_0, T)$ , alors pour  $t < T$  proche de  $T$ ,  $X_1$  appartiendrait encore à  $A(X_0, t)$  car  $A(X_0, t)$  varie continûment avec  $t$ . Mais ceci contredit le fait que  $T$  est le temps minimal.

Ces remarques donnent une vision géométrique de la notion de temps minimal, et conduisent à la définition suivante :

**Définition 2.10** Soit  $u \in \mathcal{C}_{\text{morceaux}}^0([0, T], I)$  un contrôle pour le système (2) ;  $u$  est dit optimal si la trajectoire associée à  $u$  vérifie :  $X(T) \in \text{Fr } A(X_0, T)$ .

Dire que  $u$  est optimal, c'est dire que la trajectoire associée à  $u$  est exactement la trajectoire qui relie  $X_0$  et  $X_1$  en un temps minimal. Le but est donc de calculer les contrôles optimaux. C'est l'objet du paragraphe suivant.

#### 2.4.2 Principe du Maximum de Pontryagin dans le cas linéaire

**Théorème 2.11** Considérons le système contrôlé : 
$$\begin{cases} \dot{X} &= AX + Bu \\ X(0) &= X_0 \end{cases}$$
 Soit  $T > 0$ . Le contrôle  $u \in \mathcal{C}_{\text{morceaux}}^0([0, T], I = [-1, 1])$  est optimal si et seulement si  $u(t) = \text{signe } \langle \eta(t), B \rangle$  où  $\eta(t) \in \mathbb{R}^n$  est solution de l'équation :  ${}^t \dot{\eta} = -{}^t \eta A$ .

**Remarque 2.12** La condition initiale  $\eta(0)$  dépend en fait de  $X_1$ , comme on le voit dans la démonstration. Comme elle n'est pas directement connue, l'usage de ce théorème sera plutôt indirect, comme on le verra sur l'exemple.

*Démonstration :*

$\Rightarrow$  Soit  $X$  la trajectoire associée à  $u$ .  
 $u$  est optimal si et seulement si  $X(T) \in \text{Fr } A(X_0, T)$ . Or  $A(X_0, T)$  est convexe, donc d'après le théorème du convexe, il existe un hyperplan séparant au sens large  $X(T)$  et  $A(X_0, T)$ . Soit  $\eta_T$  un vecteur normal à cet hyperplan, voir figure 13.

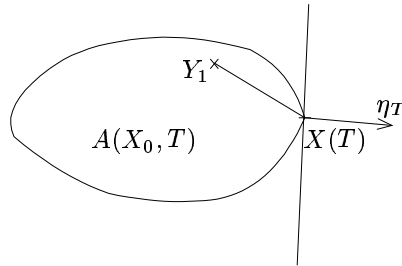


Figure 13:

D'après le théorème du convexe :

$$\forall Y_1 \in A(X_0, T) \quad \langle \eta_T, Y_1 - X(T) \rangle \leq 0 \quad (3)$$

Par définition de  $A(X_0, T)$ , il existe un contrôle  $v$  tel que la trajectoire associée  $Y(t)$  vérifie :  $Y_1 = Y(T)$ . L'inégalité (3) se réécrit :

$${}^t\eta_T X(T) \geq {}^t\eta_T Y(T)$$

D'où :

$${}^t\eta_T e^{TA} X_0 + {}^t\eta_T e^{TA} \int_0^T e^{-sA} B u(s) ds \geq {}^t\eta_T e^{TA} X_0 + {}^t\eta_T e^{TA} \int_0^T e^{-sA} B v(s) ds$$

et :

$$\int_0^T {}^t\eta_T e^{(T-s)A} B u(s) ds \geq \int_0^T {}^t\eta_T e^{(T-s)A} B v(s) ds$$

ceci pour tout contrôle  $v$ .

Appelons  $\eta(t)$  la solution sur  $[0, T]$  de  ${}^t\dot{\eta} = -{}^t\eta A$ , telle que  $\eta(T) = \eta_T$ . Alors il est clair que :  ${}^t\eta(t) = {}^t\eta(0)e^{-tA}$  et  ${}^t\eta_T = {}^t\eta(T) = {}^t\eta(0)e^{-TA}$ .

D'où :

$$\forall s \quad {}^t\eta_T e^{(T-s)A} = {}^t\eta(0)e^{-sA} = {}^t\eta(s)$$

et donc :

$$\forall v \quad \int_0^T {}^t\eta(s) B v(s) ds \leq \int_0^T {}^t\eta(s) B u(s) ds \quad (4)$$

Rappelons que  $u, v$  sont à valeurs dans  $I = [-1, 1]$ , donc :

$$\left| \int_0^T \langle \eta(s), B \rangle u(s) ds \right| \leq \left| \int_0^T \langle \eta(s), B \rangle ds \right|$$

Posons  $v(s) = \text{signe } \langle \eta(s), B \rangle$ . Alors, d'après (4) et la remarque ci-dessus :

$$\int_0^T \left( |\langle \eta(s), B \rangle| - \langle \eta(s), B \rangle u(s) \right) ds = 0$$

La quantité intégrée étant positive et continue, elle est donc nulle, d'où la conclusion souhaitée.

$\Leftarrow$  Si  $u(s) = \text{signe } \langle \eta(s), B \rangle$ , on voit facilement en remontant le raisonnement précédent que :

$$\forall Y_1 \in A(X_0, T) \quad \langle \eta(T), Y_1 - X(T) \rangle \leq 0 \quad (5)$$

Raisonnons par l'absurde : supposons que  $X(T) \in \text{Int } A(X_0, T)$ . Alors il existe un point  $Y_1$  de  $A(X_0, T)$  qui est sur la demi-droite d'origine  $X(T)$  et de direction  $\eta(T)$ , voir figure 14.

Mais alors :  $\langle \eta(T), Y_1 - X(T) \rangle > 0$ , ce qui contredit (5).

Donc  $X(T) \in \text{Fr } A(X_0, T)$ , et donc  $u$  est optimal.

□

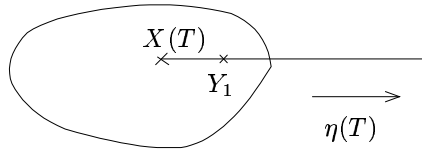


Figure 14:

### 3 Synthèse optimale pour le problème de l'oscillateur harmonique

Nous allons maintenant appliquer la théorie précédente à l'exemple de l'oscillateur harmonique présenté en première partie, et répondre aux deux questions suivantes :

1. Pour toute condition initiale  $x(0) = x_0, \dot{x}(0) = y_0$ , existe-t-il une force extérieure horizontale (un contrôle) qui permette d'amener la masse ponctuelle à sa position d'équilibre  $x(T) = 0, \dot{x}(T) = 0$  en un temps fini  $T$  ?
2. Si la première condition est satisfaite, peut-on de plus déterminer cette force de manière à minimiser le temps ?

Enfin, ces deux problèmes résolus, nous représenterons dans le plan de phase la trajectoire optimale obtenue.

#### 3.1 Contrôlabilité du système

Le système s'écrit : 
$$\begin{cases} \dot{X} &= AX + Bu \\ X(0) &= X_0 \end{cases} \quad \text{avec } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On a :  $\text{rg}(B | AB) = \text{rg} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 2$

Donc d'après le théorème (2.9), le système est contrôlable (si  $u \in \mathbb{R}$ ). Ceci signifie qu'il existe des contrôles tels que les trajectoires associées relient  $X_0$  à 0, et répond à la première question. On admet que le système est encore contrôlable avec des contrôles vérifiant la contrainte  $|u| \leq 1$  (ce sera en fait vérifié a posteriori).

#### Interprétation physique :

- Si on n'applique aucune force extérieure :  $u = 0$ . L'équation du mouvement est :  $\ddot{x} + x = 0$ . La masse ponctuelle oscille, et ne s'arrête jamais, donc ne parvient pas à sa position d'équilibre en un temps fini.
- Si on applique certaines forces extérieures, on a tendance à amortir les oscillations. La théorie prévoit qu'on parvient à stopper l'objet en un temps fini.



### 3.2 Calcul du contrôle optimal

D'après le paragraphe précédent, il existe des contrôles permettant de relier  $X_0$  à 0. On cherche maintenant à le faire en temps minimal. Pour cela, on applique le théorème (2.11) :

$$u(t) = \text{signe } \langle \eta(t), B \rangle$$

où  $\eta(t) \in \mathbb{R}^2$  est solution de :  ${}^t\dot{\eta} = -{}^t\eta A$ . Posons  $\eta(t) = \begin{pmatrix} \eta_1(t) \\ \eta_2(t) \end{pmatrix}$ . Alors :  $u(t) = \text{signe } \eta_2(t)$ , et :  $\dot{\eta}_1 = \eta_2, \dot{\eta}_2 = -\eta_1 \Rightarrow \ddot{\eta}_2 + \eta_2 = 0$ . Donc  $\eta_2(t) = \lambda \cos t + \mu \sin t$ . En particulier, la durée entre deux zéros consécutifs de  $\eta_2(t)$  est exactement  $\pi$ . Par conséquent le contrôle optimal est constant par morceaux sur des intervalles de longueur  $\pi$ , et prend alternativement les valeurs  $\pm 1$ .

- Si  $u = -1$ , on obtient le système différentiel :

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x - 1 \end{cases} \quad (6)$$

- Si  $u = +1$  :

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x + 1 \end{cases} \quad (7)$$

La trajectoire optimale finale, reliant  $X_0$  à 0, sera constituée de morceaux de solutions de (6) et (7), recollés.

#### Solutions de (6) :

$$\begin{aligned} \dot{x} = y, \dot{y} = -x - 1 &\Rightarrow \frac{d}{dt} ((x+1)^2 + y^2) = 0 \\ &\Rightarrow (x+1)^2 + y^2 = \text{cste} = R^2 \end{aligned}$$

Les courbes solutions de (6) sont des cercles centrés en  $x = -1, y = 0$ , et de période  $2\pi$ . (en fait :  $x(t) = -1 + R \cos t, y(t) = R \sin t$ )

#### Solutions de (7) :

On obtient :  $x(t) = 1 + R \cos t, y(t) = R \sin t$ .

Les solutions sont des cercles centrés en  $x = 1, y = 0$ , de période  $2\pi$ .

La trajectoire optimale de  $X_0$  à 0 doit donc suivre alternativement un arc de cercle centré en  $x = -1, y = 0$ , et un arc de cercle centré en  $x = 1, y = 0$ .

Quitte à changer  $t$  en  $-t$ , nous allons raisonner à l'envers, et construire la trajectoire optimale menant de 0 à  $X_0$ . Pour cela, nous allons considérer toutes les trajectoires optimales partant de 0, et nous sélectionnerons celle qui passe par  $X_0$ .

C'est en faisant varier  $\eta(0)$  que l'on change de trajectoire optimale : en effet,  $\eta(0)$  détermine  $\eta(t)$  pour tout  $t$  d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, ce qui détermine un contrôle optimal  $u(t)$ , et donc une trajectoire optimale.

Prenons des exemples pour commencer à représenter l'allure des trajectoires optimales possibles :

- si  $\eta_1(0) = 1, \eta_2(0) = 0$  : alors  $\eta_2(t) = -\sin t$ , donc sur  $]0, \pi[$  on a  $u(t) = \text{signe } \eta_2(t) = -1$ . La trajectoire optimale correspondante, partant de 0, suit donc pendant un temps  $\pi$  l'arc de cercle  $\Gamma_-$  solution de (6), passant par 0, voir figure 15.

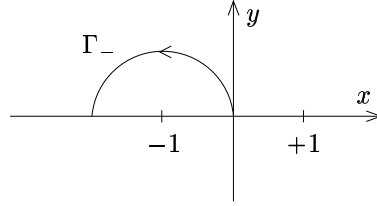


Figure 15:

- si  $\eta_1(0) = -1, \eta_2(0) = 0$  : alors  $\eta_2(t) = \sin t$ , donc sur  $]0, \pi[$  on a  $u(t) = \text{signe } \eta_2(t) = +1$ . La trajectoire optimale correspondante, partant de 0, suit donc pendant un temps  $\pi$  l'arc de cercle  $\Gamma_+$  solution de (7), passant par 0, voir figure 16.

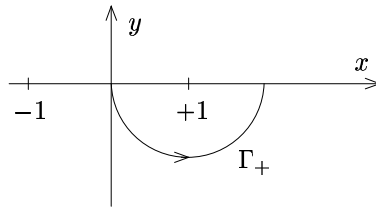


Figure 16:

- Pour tout autre choix de  $\eta(0)$  tel que  $\eta_2(0) > 0$ , la trajectoire optimale correspondante part de l'origine en suivant  $\Gamma_+$  jusqu'à ce que  $\eta_2(t) = 0$ . Au-delà de ce point,  $\eta_2(t)$  change de signe, donc le contrôle *commute* et prend la valeur  $-1$ , pendant une durée  $\pi$  (i.e. jusqu'à ce que  $\eta_2(t)$  change à nouveau de signe). La trajectoire optimale doit alors être solution de (6), en partant de ce point de commutation  $M$ , et doit donc suivre un arc de cercle centré en  $x = -1, y = 0$ , pendant un temps  $\pi$  (c'est donc un demi-cercle, vu la paramétrisation des courbes de (6)), voir figure 17.

La trajectoire optimale rencontre un deuxième point de commutation  $N$  lorsque à nouveau  $\eta_2(t)$  change de signe. On remarque que  $M$  et  $N$  sont symétriques par rapport au point  $x = -1, y = 0$  (en effet ce sont les extrémités d'un demi-cercle centré en ce point). Le point  $M$  appartenant au demi-cercle  $\Gamma_+$ , le point  $N$  appartient au demi-cercle image de  $\Gamma_+$  par la symétrie par rapport au point  $x = -1, y = 0$  qui est aussi, comme on le voit facilement, le translaté à gauche de  $\Gamma_-$  par la translation de vecteur  $(-2, 0)$ .

Poursuivons alors notre raisonnement : on se rend compte que les points de commutation de cette trajectoire optimale partant de 0 sont situés sur la courbe

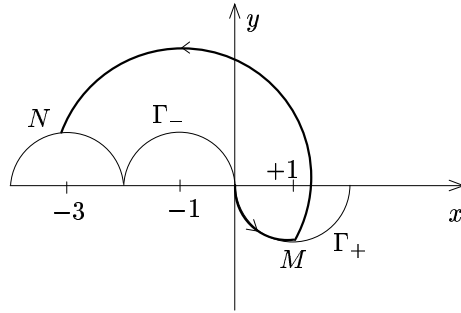


Figure 17:

$W$  construite de la manière suivante :  $W$  est l'union de tous les translatés à gauche de  $\Gamma_-$  par la translation précédente, et aussi de tous les translatés à droite de  $\Gamma_+$ , voir figure 18.

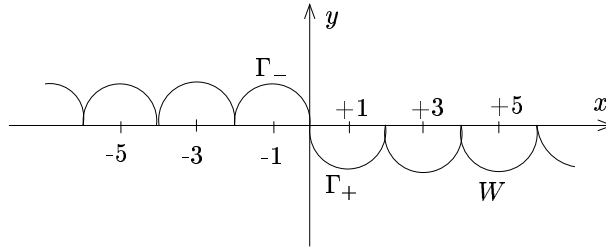


Figure 18: Ensemble  $W$

Les trajectoires optimales sont alors construites de la manière suivante : on part de 0 et on suit un morceau de  $\Gamma_+$  ou  $\Gamma_-$ , jusqu'à un premier point de commutation. Si par exemple on était sur  $\Gamma_+$ , alors partant de ce point on suit un arc de cercle centré en  $x = -1, y = 0$ , au-dessus de  $W$ , jusqu'à ce qu'on rencontre  $W$ . De ce deuxième point de commutation, on suit un arc de cercle centré en  $x = +1, y = 0$  jusqu'à rencontrer  $W$  en un troisième point de commutation, etc, voir figure 19.

On est maintenant en mesure de répondre à la deuxième question, du moins graphiquement : le but est de relier 0 et  $X_0$  par une trajectoire optimale. La théorie prévoit qu'on peut effectivement le faire. Une trajectoire partant de 0 est, comme on vient de le voir ci-dessus, déterminée par deux choix :

1. partant de 0, on peut suivre un morceau de  $\Gamma_+$  ou de  $\Gamma_-$ .
2. il faut choisir le premier point de commutation.

Si maintenant on se donne un point  $X_0 = (x_0, y_0)$  du plan de phase, on peut déterminer graphiquement ces deux choix, et obtenir un tracé de la trajectoire optimale, voir figure 20. Dans la pratique il suffit d'inverser le temps, i.e. de partir du point final et d'atteindre le point initial.

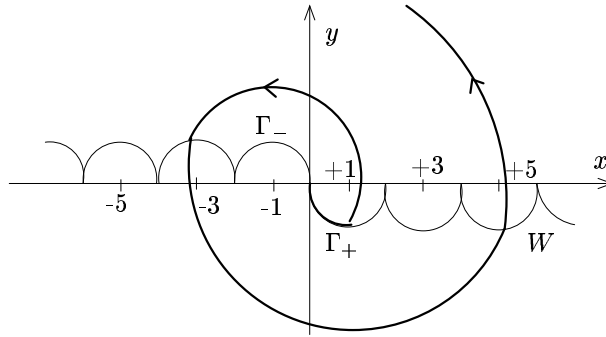


Figure 19:

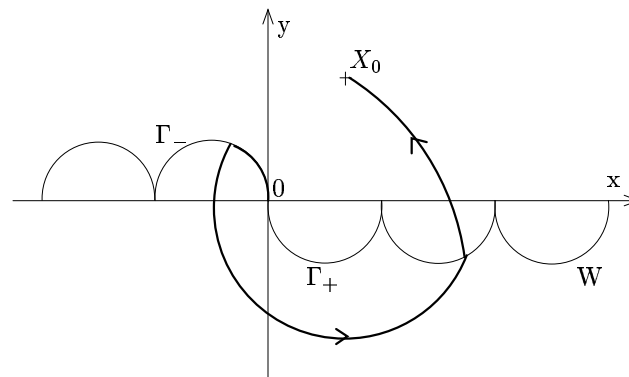


Figure 20: Synthèse optimale

**Remarque 3.1** *L'implémentation numérique de cet exemple est très facile à faire. Nous la ferons plutôt dans le cas non linéaire où elle est plus intéressante.*

## Part II

# Théorie du contrôle optimal non linéaire

L'objectif de cette partie est de présenter des techniques géométriques pour l'analyse de problèmes de contrôle optimal non linéaires. On introduit des concepts de théorie des systèmes et le Principe du Maximum de Pontryagin. L'exemple du ressort non linéaire est toujours notre fil conducteur et sera traité comme exemple d'application, avec implémentation numérique.

## 4 Introduction

### 4.1 Problématique générale

D'un point de vue global, le problème doit se formuler sur une variété  $M$ , mais notre point de vue est *local* et on travaille sur un ouvert  $V$  assez petit de  $\mathbb{R}^n$ . Tous les objets manipulés sont, sauf mention particulière,  $C^\infty$ . La problématique générale du contrôle optimal est la suivante. Considérons un système sur  $V$

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \quad (8)$$

où  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  est lisse et l'ensemble des contrôles admissibles  $\mathcal{U}$  est composé des applications mesurables bornées  $u : [0, T(u)] \rightarrow \Omega \subset \mathbb{R}^m$ . Soit l'application  $f^0 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ , on note  $C(u) = \int_0^{T(u)} f^0(x(t), u(t)) dt$  le coût d'une trajectoire  $x : t \mapsto x(t)$ , associée à  $u(\cdot)$  et définie sur  $[0, T'(u)]$ ,  $T'(u) \leq T(u)$ . Soient  $N_0$  et  $N_1$  deux sous-variétés régulières de  $V$ . Le problème de contrôle optimal est de trouver parmi toutes les trajectoires  $x(\cdot)$  joignant  $N_0$  à  $N_1$ , celles dont le coût est minimal. Ici nous nous restreignons au cas où  $N_0$  et  $N_1$  sont des points  $x_0$  et  $x_1$  de  $V$ . Notre point de vue étant local, on peut toujours supposer que  $x_0 = 0$ .

### 4.2 Outils de géométrie différentielle

Soit  $M$  une variété différentiable  $C^\infty$  de dimension  $n$ . On note  $\mathcal{V}(M)$  l'ensemble des champs de vecteurs sur  $M$ .

#### 4.2.1 Crochet de deux champs de vecteurs

**Définition 4.1** Soit  $X \in \mathcal{V}(M)$ . Notons  $x(t, x_0)$  la solution de l'équation différentielle  $\dot{x}(t) = X(x(t))$  issue en  $t = 0$  de  $x_0$ . Cette solution est définie sur un intervalle maximal  $J$  ouvert et non vide. On note  $\{\exp tX\}$  le groupe local à un paramètre associé au champ  $X$  (ou flot du champ  $X$ ), c'est-à-dire

$$\exp(tX)(x_0) = x(t, x_0)$$

Soient  $X$  et  $Y$  deux champs de vecteurs sur une variété  $M$  et notons  $G_t$  et  $H_s$  leurs flots respectifs. A-t-on, au moins localement :

$$\forall s, t \in \mathbb{R} \quad G_t \circ H_s = H_s \circ G_t \quad ?$$

En général *non*, et il n'y a aucune raison pour cela. La réponse est liée au crochet  $[X, Y]$  des deux champs  $X, Y$ , défini de la façon suivante :

$$[X, Y](x) = \frac{\partial Y}{\partial x} X(x) - \frac{\partial X}{\partial x} Y(x)$$

où  $\frac{\partial X}{\partial x}(x)$  est la différentielle de  $X$  en  $x$ .

Fixons  $x \in M$  et considérons la courbe d'origine  $x$  définie, pour  $t$  assez petit, par :

$$t \mapsto c(t) = (H_{-t} \circ G_{-t} \circ H_t \circ G_t)(x)$$

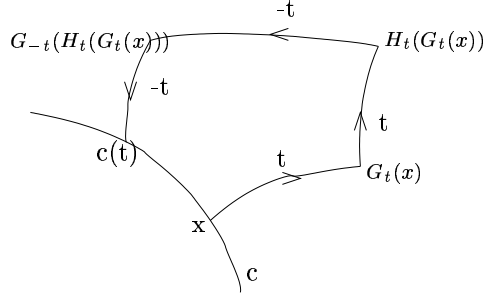


Figure 21:

La courbe  $c$  mesure le défaut de commutation de  $X, Y$  (voir figure 21) et on a le développement limité, quand  $t \rightarrow 0$  :

$$c(t) = x + \frac{t^2}{2}([X, Y](x)) + o(t^2)$$

(voir par exemple [6, 8] pour d'autres propriétés).

#### 4.2.2 Formule de Campbell-Hausdorff

La formule suivante sera utile (voir [6, 8]) :

**Proposition 4.2** *Pour  $s$  et  $t$  assez petits, on a :*

$$\exp tX \exp sY = \exp(tX + sY + \frac{st}{2}[X, Y] + \dots)$$

## 5 Application entrée/sortie

### 5.1 Définition

Considérons pour le système (8) le problème de *contrôle* suivant : étant donné un point  $x_1 \in \mathbb{R}^n$ , trouver un temps  $T$  et un contrôle  $u$  sur  $[0, T]$  tel que la trajectoire  $x_u$  associée à  $u$ , solution de (8), vérifie :

$$x_u(0) = 0, \quad x_u(T) = x_1.$$

Ceci nous conduit à définir :

**Définition 5.1** *Soit  $T > 0$ . L'application entrée/sortie en temps  $T$  du système contrôlé (8) initialisé à 0 est l'application :*

$$E_T : \begin{array}{l} \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ u \longmapsto x_u(T) \end{array}$$

où  $\mathcal{U}$  est l'ensemble des contrôles admissibles.

Autrement dit, l'application entrée/sortie en temps  $T$  associe à un contrôle  $u$  le point final de la trajectoire associée à  $u$ . Une question importante en théorie du contrôle est d'étudier cette application en décrivant son image, ses singularités, etc.

## 5.2 Régularité de l'application entrée/sortie

La régularité de  $E_T$  dépend bien entendu de l'espace de départ et de la forme du système.

### 5.2.1 Pour un système général

En toute généralité on a le résultat suivant, voir par exemple [2, 5, 11] :

**Proposition 5.2** *Considérons le système (8) où  $f$  est lisse et  $\mathcal{U} \subset L^\infty([0, T])$ . Alors  $E_T$  est lisse au sens  $L^\infty$ .*

Soit  $u \in \mathcal{U}$  un contrôle de référence. Exprimons la différentielle de  $E_T$  au point  $u$  (au sens de Fréchet) : elle est donnée par le système linéarisé en  $u$  de la manière suivante. Posons :

$$A(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_u(t), u(t)) , \quad B(t) = \frac{\partial f}{\partial u}(x_u(t), u(t))$$

Le système :

$$\begin{aligned} \dot{y}_v(t) &= A(t)y_v(t) + B(t)v(t) \\ y_v(0) &= 0 \end{aligned}$$

est appelé *système linéarisé* le long de  $(x_u, u)$ . Alors la différentielle de Fréchet de  $E_T$  en  $u$  est l'application :

$$dE_T(u).v = y_v(T) = \int_0^T M(T)M^{-1}(s)B(s)v(s)ds \quad (9)$$

où  $M$  est la solution matricielle de :  $\dot{M} = AM, M(0) = \text{Id}$ .

*Démonstration* : Par hypothèse  $u(\cdot)$  et sa trajectoire associée  $x(\cdot, x_0, u)$  sont définis sur  $[0, T]$ . L'ensemble des contrôles étant les applications mesurables et bornées muni de la norme  $L^\infty$ , l'application  $E_T$  est continue sur un voisinage de  $u(\cdot)$ . Montrons qu'elle est différentiable au sens de Fréchet. Soit  $v(\cdot)$  un contrôle fixé, on note  $x(\cdot) + \delta x(\cdot)$  la trajectoire associée à  $u(\cdot) + v(\cdot)$ , issue en  $t = 0$  de  $x_0$ . Par un développement de Taylor, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(x + \delta x)(t) &= f(x(t) + \delta x(t), u(t) + v(t)) \\ &= f(x(t), u(t)) + \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), u(t))\delta x(t) + \frac{\partial f}{\partial u}(x(t), u(t))v(t) \\ &\quad + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial u}(x(t), u(t))(\delta x(t), v(t)) + \dots \end{aligned}$$

Par ailleurs,  $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$ , donc :

$$\frac{d}{dt}(\delta x)(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), u(t))\delta x(t) + \frac{\partial f}{\partial u}(x(t), u(t))v(t) + \dots$$

En écrivant  $\delta x = \delta_1 x + \delta_2 x + \dots$  où  $\delta_1 x$  est la partie linéaire en  $v$ ,  $\delta_2 x$  la partie quadratique, etc, et en identifiant, il vient :

$$\frac{d}{dt}(\delta_1 x)(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), u(t))\delta_1 x(t) + \frac{\partial f}{\partial u}(x(t), u(t))v(t) = A(t)\delta_1 x(t) + B(t)v(t)$$

Or  $x(0) + \delta x(0) = x_0 = x(0)$ , donc  $\delta x(0) = 0$  et la condition initiale de cette équation différentielle est  $\delta_1 x(0) = 0$ . En intégrant, on obtient :

$$\delta_1 x(T) = M(T) \int_0^T M^{-1}(s) B(s) v(s) ds$$

où  $M$  est la résolvante du système homogène  $\frac{d}{dt}(\delta_1 x)(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), u(t)) \delta_1 x(t)$ , c'est-à-dire  $\dot{M}(t) = A(t)M(t)$  avec  $A(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), u(t))$  et  $M(0) = I_n$ . On observe que  $\delta_1 x(T)$  est linéaire et continu par rapport à  $v(\cdot)$ . C'est donc la différentielle en  $u(\cdot)$  de  $E_T$ .  $\square$

### 5.2.2 Pour un système affine

**Définition 5.3** On appelle système affine contrôlé un système de la forme :

$$\dot{x} = f_0(x) + \sum_{i=1}^m u_i f_i(x)$$

où les  $f_i$  sont des champs de vecteurs.

Pour un système affine on peut améliorer le résultat précédent, voir [11] :

**Proposition 5.4** *Considérons un système affine lisse et supposons que  $\mathcal{U}$  est un ouvert de  $L^2([0, T])$ . Alors l'application entrée/sortie  $E_T$  est lisse au sens  $L^2$ , et est analytique si les champs de vecteurs sont analytiques.*

Il est très intéressant de considérer  $L^2$  comme espace de contrôles. En effet dans cet espace on bénéficie d'une structure hilbertienne qui permet de faire une *théorie spectrale* de l'application entrée/sortie, et on bénéficie d'autre part de bonnes propriétés de *compacité faible*, voir [12].

### 5.3 Contrôles singuliers

**Définition 5.5** *Soit  $u$  un contrôle défini sur  $[0, T]$  tel que sa trajectoire associée  $x_u$  issue de  $x(0) = x_0$  est définie sur tout  $[0, T]$ . On dit que le contrôle  $u$  (ou la trajectoire  $x_u$ ) est singulier sur  $[0, T]$  si la différentielle de Fréchet  $dE_T(u)$  de l'application entrée-sortie au point  $u$  n'est pas surjective. Sinon on dit qu'il est régulier.*

**Proposition 5.6** *Soient  $x_0$  et  $T$  fixés. Si  $u$  est un contrôle régulier, alors  $E_T$  est ouverte dans un voisinage de  $u$ .*

*Démonstration :* Par hypothèse, il existe  $n$  contrôles  $v_i$  tels que  $dE_T(u).v_i = e_i$  où  $(e_1, \dots, e_n)$  est la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ . On considère l'application :

$$(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n \longmapsto E_T(u + \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i)$$

Par construction, c'est un difféomorphisme local. D'où le résultat.  $\square$



## 5.4 Contrôlabilité

On veut répondre à la question suivante : étant donné le système (8), où peut-on aller en temps  $T$  en faisant varier le contrôle  $u$  ? On est amené à définir la notion d'ensemble accessible.

**Définition 5.7** *L'ensemble accessible en temps  $T$  pour le système (8), noté  $A(T)$ , est l'ensemble des extrémités au temps  $T$  des solutions du système partant de 0. Autrement dit, c'est l'image de l'application entrée/sortie en temps  $T$ .*

**Définition 5.8** *Le système (8) est dit contrôlable si :*

$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{T \geq 0} A(T)$$

Par des arguments du type théorème des fonctions implicites, l'étude de la contrôlabilité du système linéarisé (qui est plus simple), permet de déduire des résultats de *contrôlabilité locale* du système de départ, voir [2, 7]. Par exemple on déduit du théorème de contrôlabilité dans le cas linéaire la proposition suivante :

**Proposition 5.9** *Considérons le système (8) où  $f(0,0) = 0$ . Notons  $A = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$  et  $B = \frac{\partial f}{\partial u}(0,0)$ . On suppose que :*

$$\text{rg} (B|AB| \dots |A^{n-1}B) = n$$

*Alors le système est localement contrôlable en 0.*

Le théorème de Chow relie la contrôlabilité à des propriétés de crochets de Lie du système. On a par exemple la conséquence suivante sur les systèmes dits *sous-Riemanniens* :

**Proposition 5.10** *Considérons dans  $\mathbb{R}^n$  le système sous-Riemannien lisse :*

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^m u_i f_i(x), \quad x(0) = x_0$$

*On suppose que l'algèbre de Lie engendrée par les champs de vecteurs  $f_i$  est de dimension  $n$ . Alors le système est contrôlable.*

*Démonstration :* Pour simplifier, faisons la démonstration dans le cas  $m = 2$  et  $n = 3$ . On suppose que  $\text{rg}(f_1, f_2, [f_1, f_2])(x) = 3, \forall x \in \mathbb{R}^n$ . Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ . On considère l'application :

$$\begin{aligned} \varphi_\lambda : (t_1, t_2, t_3) &\longmapsto (\exp \lambda f_1 \exp t_3 f_2 \exp -\lambda f_1)(\exp t_2 f_2)(\exp t_1 f_1)(x_0), \\ \varphi_\lambda(0) &= x_0 \end{aligned}$$

Montrons que pour  $\lambda \neq 0$  assez petit,  $\varphi_\lambda$  est une immersion en 0 : En utilisant la formule de Campbell-Hausdorff, on obtient :

$$\varphi_\lambda(t_1, t_2, t_3) = \exp(t_1 f_1 + (t_2 + t_3) f_2 + \lambda t_3 [f_1, f_2] + \dots)$$

d'où :

$$\frac{\partial \varphi_\lambda}{\partial t_1}(0) = f_1(x_0), \quad \frac{\partial \varphi_\lambda}{\partial t_2}(0) = f_2(x_0), \quad \frac{\partial \varphi_\lambda}{\partial t_3}(0) = f_2(x_0) + \lambda [f_1, f_2](x_0) + o(\lambda)$$

Par hypothèse, les champs de vecteurs  $f_1, f_2, [f_1, f_2]$  sont linéairement indépendants, donc la jacobienne de  $\varphi_\lambda$  est de rang 3 en 0. Le théorème d'inversion locale et un argument de connexité nous permettent de conclure.  $\square$

**Remarque 5.11** *En général, le problème de contrôlabilité est difficile. Il est lié à la question de savoir quand un semi-groupe opère transitivement. Il existe cependant des techniques pour montrer, dans certains cas, la contrôlabilité globale. L'une d'entre elles, importante, s'appelle la technique d'élargissement, voir [2, 5].*

## 6 Fonction valeur et contrôles optimaux

### 6.1 Existence de contrôles optimaux

Maintenant, en plus d'un problème de contrôle, on se donne un problème de minimisation : parmi toutes les solutions du système (8) reliant 0 à  $x_1$ , trouver une trajectoire qui minimise une certaine fonction *coût*  $C(T, u)$ . Une telle trajectoire, si elle existe, est dite *optimale* pour ce coût. L'existence de trajectoires optimales dépend de la régularité du système et du coût ; pour un énoncé général, voir [2, 5, 7]. Il se peut aussi qu'un contrôle optimal n'existe pas dans la classe de contrôles considérés, mais existe dans un espace plus gros : c'est le phénomène de Lavrentiev, voir [10]. En particulier on a intérêt à travailler dans un espace de contrôles complet et qui ait de bonnes propriétés de compacité : voilà pourquoi à nouveau l'espace  $L^2$  est intéressant. On a par exemple pour les systèmes affines le résultat suivant :

**Proposition 6.1** *Considérons le système affine dans  $\mathbb{R}^n$  :*

$$\dot{x} = f_0(x) + \sum_{i=1}^m u_i f_i(x), \quad x(0) = x_0, x(T) = x_1 \quad (10)$$

avec le coût

$$C_T(u) = \int_0^T \sum_{i=1}^m u_i^2(t) dt \quad (11)$$

où  $T > 0$  est fixé et la classe  $\mathcal{U}$  des contrôles admissibles est le sous-ensemble de  $L^2([0, T], \mathbb{R}^m)$  tel que :

1.  $\forall u \in \mathcal{U}$   $x_u$  est bien définie sur  $[0, T]$ .
2.  $\exists B_T / \forall u \in \mathcal{U} \quad \forall t \in [0, T] \quad \|x_u(t)\| \leq B_T$

Si  $x_1$  est accessible depuis  $x_0$  en temps  $T$ , alors il existe un contrôle optimal reliant  $x_0$  à  $x_1$ .

*Démonstration :* Considérons une suite de contrôles  $(u_i^{(n)}(t))_{n \in \mathbb{N}}$  transférant  $x_0$  en  $x_1$ , telle que leur coût tend vers la borne inférieure des coûts des contrôles reliant  $x_0$  à  $x_1$ . Soit  $x^{(n)}$  la trajectoire associée au contrôle  $u^{(n)}$ , i.e.

$$x^{(n)}(t) = x_0 + \int_0^t \sum_{i=1}^m u_i^{(n)}(s) f_i(x^{(n)}(s)) ds$$

Les  $u_i^{(n)}$  sont bornés dans  $L^2([0, T])$ , et par compacité faible :

$$\exists (n_k)_{k \in \mathbb{N}} / u_i^{(n_k)} \rightharpoonup v_i \in L^2$$

Il est par ailleurs facile de voir que la suite  $\hat{x}^{(n_k)}$  est bornée dans  $L^2([0, T])$ , et par conséquent  $x^{(n_k)}$  est bornée dans  $H^1([0, T])$ , et par réflexivité :

$$\exists (n_{k_p})_{p \in \mathbb{N}} / x^{(n_{k_p})} \xrightarrow{H^1} x \in H^1([0, T_0])$$

Or  $H^1 \xrightarrow{c} C^0$ , donc  $x^{(n_{k_p})} \xrightarrow{\text{uniformément}} x$  sur  $[0, T]$  On conclut alors aisément par passage à la limite :

$$x(t) = x_0 + \int_0^t \sum_{i=1}^m v_i(t) f_i(x(t)) dt$$

et que  $x(T) = x_1$ . □

## 6.2 Définition de la fonction valeur

**Définition 6.2** Soit  $x \in \mathbb{R}^n$ . Définissons la fonction valeur  $S : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$  par :

- s'il n'existe aucune trajectoire du système reliant 0 à  $x$  en temps  $T$ , on pose :  $S(T, x) = +\infty$ .
- sinon on pose :  $S(T, x) = \inf \{C(T, u) / E_T(u) = x\}$ .

La fonction valeur est la généralisation du concept de distance. Par exemple en géométrie Riemannienne elle généralise le concept de distance Riemannienne. La fonction valeur vérifie l'équation d'Hamilton-Jacobi, voir par exemple [2, 7].

## 7 Principe du Maximum de Pontryagin

La présentation de cette section a été inspirée par [2, 3].

### 7.1 Système hamiltonien contraint

Montrons qu'une trajectoire singulière peut se paramétrer comme la projection d'une solution d'un système hamiltonien contraint. Soit le système :

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \tag{12}$$

**Définition 7.1** Le Hamiltonien du système (12) est la fonction :

$$H : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, p, u) \mapsto H(x, p, u) = (p, f(x, u))$$

où  $(,)$  est le produit scalaire usuel de  $\mathbb{R}^n$ .

**Proposition 7.2** Soient  $u$  un contrôle singulier et  $x$  la trajectoire singulière associée à ce contrôle sur  $[0, T]$ . Alors il existe un vecteur ligne continu  $p : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ , tel que les équations suivantes sont vérifiées pour presque tout  $t$  de  $[0, T]$  :

$$\dot{x}(t) = \frac{\partial H}{\partial p}(x(t), p(t), u(t)) \quad , \quad \dot{p}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}(x(t), p(t), u(t))$$

$$\frac{\partial H}{\partial u}(x(t), p(t), u(t)) = 0 \quad (\text{équation de contrainte})$$

où  $H$  est le hamiltonien du système.

*Démonstration* : Par définition, le couple  $(x, u)$  est singulier sur  $[0, T]$  si  $dE_T(u)$  n'est pas surjective. Donc il existe un vecteur ligne  $\bar{p} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  tel que :

$$\forall v(\cdot) \in L^\infty([0, T]) \quad (\bar{p}, dE_T(u).v) = \bar{p} \int_0^T M(T)M^{-1}(s)B(s)v(s)ds = 0$$

Par conséquent :

$$\bar{p}M(T)M^{-1}(s)B(s) = 0 \quad \text{p.p. sur } [0, T]$$

On pose :  $p(t) = \bar{p}M(T)M^{-1}(t)$  sur  $[0, T]$ . C'est un vecteur ligne de  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ , et  $p(T) = \bar{p}$ . On a par dérivation :

$$\dot{p}(t) = -p(t) \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), u(t))$$

En introduisant le Hamiltonien  $H(x, p, u) = (p, f(x, u))$ , on obtient :

$$f(x(t), u(t)) = \frac{\partial H}{\partial p}(x(t), p(t), u(t))$$

et

$$-p(t) \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), u(t)) = -\frac{\partial H}{\partial x}(x(t), p(t), u(t))$$

La dernière relation vient de  $p(t)B(t) = 0$  car  $B(t) = \frac{\partial f}{\partial u}(x(t), u(t))$ . □

**Définition 7.3** Le vecteur ligne  $p : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  de la proposition 7.2 s'appelle le vecteur adjoint du système (12).

**Remarque 7.4 (Calcul théorique du contrôle singulier)** On considère  $\Sigma = \left\{ (x, p, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \times \mathbb{R}^m / \frac{\partial H}{\partial u}(x, p, u) = 0 \right\}$ , l'ensemble des contraintes.

Soient  $z_0 = (x_0, p_0)$  et  $u_0$  tels que  $(z_0, u_0) \in \Sigma$ . Si la Hessienne  $\left( \frac{\partial^2 H}{\partial u_i \partial u_j} \right)_{i,j}$  est inversible en  $(z_0, u_0)$ , alors d'après le théorème des fonctions implicites en  $z_0$ , le contrôle singulier peut se calculer comme une fonction de  $(x, p)$ .

## 7.2 Principe du Maximum faible

### 7.2.1 Présentation du problème

On cherche des conditions nécessaires d'optimalité. Considérons le système :

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \quad (13)$$

Les contrôles  $u(\cdot) \in \mathcal{U}$  sont définis sur  $[0, T]$  et les trajectoires associées doivent vérifier  $x(0) = x_0$  et  $x(T) = x_1$ . Le problème est de minimiser un coût de la forme :

$$C(u) = \int_0^T f^0(x(t), u(t))dt \quad (14)$$

où  $f^0 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  est une application  $C^\infty$  et  $T$  est fixé.

Associons au système (13) le *système augmenté* suivant :

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(x(t), u(t)) \\ \dot{x}^0(t) &= f^0(x(t), u(t))\end{aligned}\quad (15)$$

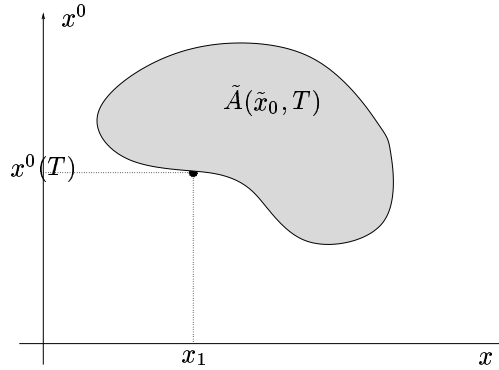
et notons  $\tilde{x} = (x, x^0)$ ,  $\tilde{f} = (f, f^0)$ . Le problème revient donc à chercher une trajectoire solution de (15) telle que  $\tilde{x}_0 = (x_0, 0)$ ,  $\tilde{x}_1 = (x_1, x^0(T))$  et minimisant la dernière coordonnée  $x^0(T)$ .

Soit  $\tilde{x}_0 = (x_0, 0)$  fixé. L'ensemble des états accessibles à partir de  $\tilde{x}_0$  pour le système (15) est  $\tilde{A}(\tilde{x}_0, T) = \bigcup_{u(\cdot)} \tilde{x}(T, \tilde{x}_0, u)$ .

### 7.2.2 Principe du maximum faible

Soit  $u^*$  un contrôle et  $\tilde{x}^*$  la trajectoire associée solution du système augmenté (15) et issue de  $\tilde{x}_0 = (x_0, 0)$ . Si  $u^*$  est optimal pour notre critère (14), alors le point  $\tilde{x}^*(T)$  appartient à la frontière de l'ensemble  $\tilde{A}(\tilde{x}_0, T)$ . En effet sinon, il existerait un voisinage du point  $\tilde{x}^*(T) = (x_1, x^0(T))$  dans  $\tilde{A}(\tilde{x}_0, T)$  contenant un point  $\tilde{y}^*(T)$  solution du système (15) et tel que l'on ait  $y^0(T) < x^0(T)$ , ce qui contredirait l'optimalité du contrôle  $u^*$ . Par conséquent, le contrôle  $\tilde{u}^*$  est un contrôle singulier pour le système augmenté (15) (d'après la proposition 5.6).

En appliquant la proposition 7.2, on obtient le théorème suivant :



**Théorème 7.5 (Principe du Maximum faible)** *Si  $u^*$  est un contrôle optimal, alors il existe une application  $\tilde{p}^* : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$  telle que  $(\tilde{x}^*, \tilde{p}^*, \tilde{u}^*)$  soit solution du système hamiltonien :*

$$\dot{\tilde{x}}^*(t) = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{p}}(\tilde{x}^*(t), \tilde{p}^*(t), u^*(t)) \quad , \quad \dot{\tilde{p}}^*(t) = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{x}}(\tilde{x}^*(t), \tilde{p}^*(t), u^*(t)) \quad (16)$$

$$\frac{\partial \tilde{H}}{\partial u}(\tilde{x}^*(t), \tilde{p}^*(t), u^*(t)) = 0 \quad (17)$$

où  $\tilde{H}(\tilde{x}, \tilde{p}, u) = (\tilde{p}, \tilde{f}(\tilde{x}, u))$ .

En écrivant  $\tilde{p}^* = (\tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_n, p_0) = (\tilde{p}, p_0) \in (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}) \setminus \{0\}$  où  $p_0$  est la variable duale du coût,  $\tilde{p}^*(t) = -\tilde{p}^*(t) \tilde{f}_x(\tilde{x}^*(t), u^*(t))$  s'écrit :

$$(\dot{\tilde{p}}, \dot{p}_0) = -(p, p_0) \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial f^0}{\partial x} & 0 \end{pmatrix}$$

Or on a :  $\tilde{H} = (\tilde{p}, \tilde{f}(x, u)) = pf + p_0 f$ , donc

$$\frac{\partial \tilde{H}}{\partial u} = 0 = p \frac{\partial f}{\partial u} + p_0 \frac{\partial f^0}{\partial u}$$

et donc  $\dot{p}_0(t) = 0$ , c'est-à-dire  $p_0(t)$  est constant sur  $[0, T]$ . Comme le vecteur  $p^*(t)$  est défini à un facteur près, on choisit  $p_0 \leq 0$ .

**Définition 7.6** Une extrémale du problème est un triplet  $(x, p, u)$  solution des équations (16) et (17). Si  $p_0 = 0$ , on dit que l'extrémale est anormale. Dans ce cas elle ne dépend pas du coût et  $(x(t), u(t))$  est une trajectoire singulière du système (13).

### 7.3 Principe du Maximum de Pontryagin

La version forte suivante, beaucoup plus difficile à montrer, du théorème précédent (voir [9] pour une démonstration, voir aussi [2, 7]), affirme que cet extremum est un maximum et prend en compte les contraintes sur le contrôle. On a l'énoncé général suivant.

#### 7.3.1 Énoncé du Principe du Maximum

**Théorème 7.7** On considère le système de contrôle dans  $\mathbb{R}^n$  :

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \quad (18)$$

où  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  est de classe  $C^1$  et où les contrôles sont des applications mesurables et bornées définies sur un intervalle  $[0, t(u)]$  de  $\mathbb{R}^+$  et à valeurs dans  $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ . Soient  $M_0$  et  $M_1$  deux sous-ensembles de  $\mathbb{R}^n$ . On note  $\mathcal{U}$  l'ensemble des contrôles admissibles dont les trajectoires associées relient un point initial de  $M_0$  à un point final de  $M_1$ . Pour un tel contrôle on définit le coût

$$C(u) = \int_0^{t(u)} f^0(x(t), u(t)) dt$$

où  $f^0 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  est  $C^1$  et  $x(\cdot)$  est la trajectoire solution de (18) associée au contrôle  $u$ .

Si le contrôle  $u \in \mathcal{U}$  est optimal sur  $[0, t_*]$ , alors il existe une application non triviale  $(p(\cdot), p^0) : [0, t_*] \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$  absolument continue appelée vecteur adjoint, où  $p^0$  est une constante négative ou nulle, telle que la trajectoire optimale  $x$  associée au contrôle  $u$  vérifie presque partout sur  $[0, t_*]$  le système :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial p}(x, p, u) \\ \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial x}(x, p, u) \end{aligned} \quad (19)$$

où  $H(x, p, p^0, u) = \langle p, f(x, u) \rangle + p^0 f^0(x, u)$  est le Hamiltonien du système, et on a la condition de maximisation presque partout sur  $[0, t_*]$  :

$$H(x(t), p(t), p^0, u(t)) = \max_{v \in \mathcal{U}} H(x(t), p(t), p^0, v). \quad (20)$$

De plus on a pour tout  $t \in [0, t_*]$  :

$$H(x(t), p(t), p^0, u(t)) = 0. \quad (21)$$

Si  $M_0$  et  $M_1$  (ou juste l'un des deux ensembles) sont des variétés de  $\mathbb{R}^n$  ayant des espaces tangents en  $x(0) \in M_0$  et  $x(t_*) \in M_1$ , alors le vecteur adjoint peut être construit de manière à satisfaire les conditions de transversalité aux deux extrémités (ou juste l'une des deux) :

$$p(0) \perp T_{x(0)} M_0 \quad \text{et} \quad p(t_*) \perp T_{x(t_*)} M_1.$$

**Remarque 7.8** Le problème du temps minimal correspond à  $f^0 = 1$ .

**Remarque 7.9** Dans le théorème précédent le temps final est libre. Si on impose un temps final fixe égal à  $T$ , c'est-à-dire qu'on cherche, partant de  $M_0$ , à atteindre la cible  $M_1$  en temps  $T$  et en minimisant le coût  $C(u)$  sur  $[0, T]$  (problème à temps final fixé), alors le théorème reste vrai, sauf la condition (21) qu'on remplace par :

$$\forall t \in [0, T] \quad H(x(t), p(t), p^0, u(t)) = Cste,$$

où cette constante n'est pas nécessairement égale à 0.

**Remarque 7.10** Si l'ensemble cible est égal à  $\mathbb{R}^n$  tout entier (problème à extrémité finale non fixée) alors la condition de transversalité finale impose  $p(t_*) = 0$ .

## 8 Application : contrôle optimal du ressort non linéaire

Reprenons l'exemple du ressort non linéaire, modélisé par le système de contrôle :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = y(t) \\ \dot{y}(t) = -x(t) - 2x(t)^3 + u(t) \end{cases}$$

où on autorise comme contrôles toutes les fonctions  $u(t)$  continues par morceaux telles que  $|u(t)| \leq 1$ . L'objectif est d'amener le ressort d'une position initiale quelconque  $(x_0, y_0 = \dot{x}_0)$  à sa position d'équilibre  $(0, 0)$  en temps minimal  $t_*$ .

### 8.1 Application du Principe du Maximum

Le Hamiltonien du système précédent s'écrit :

$$H(x, p, u) = p_x y + p_y (-x - 2x^3 + u) + p^0$$

et si  $(x, p, u)$  est une extrémale alors on doit avoir :

$$\dot{p}_x = -\frac{\partial H}{\partial x} = p_y(1 + 6x^2) \quad \text{et} \quad \dot{p}_y = -\frac{\partial H}{\partial y} = -p_x$$

Notons que puisque le vecteur adjoint  $(p_x, p_y, p^0)$  doit être non trivial,  $p_y$  ne peut s'annuler sur un intervalle (sinon on aurait également  $p_x = -\dot{p}_y = 0$ , et par annulation du Hamiltonien on aurait aussi  $p^0 = 0$ ). Par ailleurs la condition la condition de maximisation nous donne :

$$p_y u = \max_{|v| \leq 1} p_y v$$

Et comme  $p_y$  ne s'annule sur aucun intervalle, on en déduit que, presque partout :

$$u(t) = \text{signe } p_y(t)$$

En particulier les contrôles optimaux sont successivement égaux à  $\pm 1$ , c'est le principe *bang-bang* (voir [7]). Plus précisément, le vecteur adjoint au temps final  $t_*$  étant défini à scalaire multiplicatif près, on peut affirmer :

$$u(t) = \text{signe}(p_y(t)) \quad \text{où } p_y \text{ est la solution de } \begin{cases} \ddot{p}_y(t) + p_y(t)(1 + 6x(t)^2) = 0 \\ p_y(t_*) = \cos \alpha, \quad \dot{p}_y(t_*) = -\sin \alpha, \end{cases}$$

le paramètre  $\alpha \in [0, 2\pi[$  étant indéterminé.

En inversant le temps ( $t \mapsto -t$ ), il est clair que notre problème est équivalent au problème du temps minimal pour le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -y(t) \\ \dot{y}(t) = x(t) + 2x(t)^3 - \text{signe}(p_y(t)) \\ \dot{p}_y(t) = p_x(t) \\ \dot{p}_x(t) = -p_y(t)(1 + 6x(t)^2) \end{cases} \quad (22)$$

avec

$$x(0) = y(0) = 0, \quad x(t_*) = x_0, \quad y(t_*) = y_0, \quad p_y(0) = \cos \alpha, \quad p_x(0) = \sin \alpha$$

où  $\alpha \in [0, 2\pi[$  est à déterminer.

## 8.2 Résolution numérique à l'aide de Maple

On suppose désormais que  $x_0 = 0$  et  $\dot{x}_0 = 6$ .

Pour résoudre le problème on procède en 5 étapes.

**Première étape.** On saisit le système différentiel (22), puis on trace dans le plan de phase  $(x, y)$  les deux solutions respectivement associées à  $\alpha = 1$  et  $\alpha = 2.5$ , avec  $t \in [0, 10]$ , voir figure 22.

```
> eq1 := D(x)(t)=-y(t) :
eq2 := D(y)(t)=x(t)+2*x(t)^3-signum(z(t)) :
eq3 := D(z)(t)=w(t) :
eq4 := D(w)(t)=-z(t)*(1+6*x(t)^2) :
```



```

sys := eq1,eq2,eq3,eq4 :
> ic1 := [x(0)=0,y(0)=0,z(0)=cos(1),w(0)=sin(1)] :
ic2 := [x(0)=0,y(0)=0,z(0)=cos(2.5),w(0)=sin(2.5)] :
ic := ic1,ic2 :
> DEplot([sys], [x(t),y(t),z(t),w(t)], t=0..10, [ic],
        stepsize=0.05, scene=[x(t),y(t)], linecolor=[blue,red]);

```

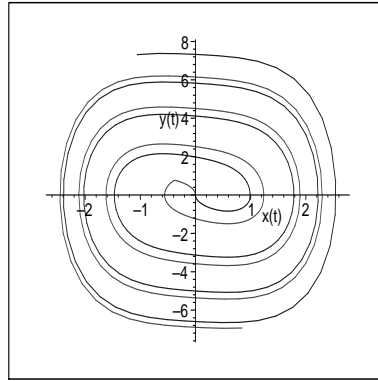


Figure 22:

**Deuxième étape.** On pose  $T = 10$ ,  $N = 100$ ,  $h = T/N$  et  $t_n = nh$ ,  $n = 0 \dots N$ . Pour  $\alpha = 1$ , puis pour  $\alpha = 2.5$ , on écrit une boucle qui calcule le plus petit entier  $k$  tel que

$$x(t_k)x(t_{k+1}) \leq 0 \quad \text{et} \quad |y(t_{k+1}) - 6| < 0.5.$$

On affiche alors les valeurs de la solution aux temps  $t_k$  et  $t_{k+1}$ .

```

> sol1 := dsolve({sys,x(0)=0,y(0)=0,z(0)=cos(1),w(0)=sin(1)},
                {x(t),y(t),z(t),w(t)}, type=numeric) :
T:=10.0 : N:=100 : h:=T/N :
xk:=0 :
for k from 1 to N do
  solk := sol1(k*h) :
  xknew := subs(solk,x(t)) :
  yknew := subs(solk,y(t)) :
  if xk*xknew<=0 and abs(yknew-6)<0.5 then break fi:
  xk := xknew :
od: sol1(k*h);

```

**Troisième étape.** On écrit une procédure  $temps:=proc(alpha,eps)$  qui calcule une approximation du temps  $t$  tel que  $x(t) = 0$  et  $|y(t) - 6| < 0.5$ . Pour cela on localise tout d'abord ce temps comme à l'étape précédente, puis on effectue une dichotomie sur  $t$  entre  $t_k$  et  $t_{k+1}$  pour calculer le temps où  $x(t)$  s'annule à  $eps$  près (c'est-à-dire  $|x(t)| < eps$ ).

```

> temps := proc(alpha,eps)
  local sol,solk,T,N,h,k,xk,xknew,yknew,t0,t1,tm,x0,x1,xm :

```

```

sol := dsolve({sys,x(0)=0,y(0)=0,z(0)=cos(alpha),
             w(0)=sin(alpha)}, {x(t),y(t),z(t),w(t)}, type=numeric) :
T:=10.0 : N:=100 : h:=T/N :
xk:=0 :
for k from 1 to N do
  solk:=sol(k*h) :
  xknew := subs(solk,x(t)) :
  yknew := subs(solk,y(t)) :
  if xk*xknew<=0 and abs(yknew-6)<0.5 then break fi:
  xk := xknew :
od:
t0:=(k-1)*h : t1:=k*h :
x0:=subs(sol(t0),x(t)) : x1:=subs(sol(t1),x(t)) :
# remarque : x0 et x1 sont forcement de signes contraires
while abs(x1-x0)>eps do
  tm:=(t0+t1)/2 :
  xm:=subs(sol(tm),x(t)) :
  if xm*x0<0 then x1:=xm : t1:=tm :
  else x0:=xm : t0:=tm :
  fi:
od:
RETURN(t0);
end :

```

**Quatrième étape.** On écrit une procédure *dicho=proc(eps)* qui calcule par dichotomie sur  $\alpha$ , entre  $\alpha = 1$  et  $\alpha = 2.5$ , une approximation du réel  $\alpha$  tel que la solution de (22) associée vérifie :

$$\exists t_* / x(t_*) = 0, y(t_*) = 6,$$

le réel *eps* étant la précision :  $|x(t_*)| < eps$ ,  $|y(t_*) - 6| < eps$ .  
Plus précisément, on cherche le réel  $\alpha$  par dichotomie de sorte que

$$|y(\alpha, temps(\alpha, eps)) - 6| < eps$$

où  $(x(\alpha, \cdot), y(\alpha, \cdot), z(\alpha, \cdot), w(\alpha, \cdot))$  est la solution de (22) (notons que la procédure *temps* assure déjà que  $|x(\alpha, temps(\alpha, eps))| < eps$ ).

```

> dicho := proc(eps)
local a,b,m,sola,solb,solm,ta,tb,tm,ya,yb,ym :
a:=1 : b:=2.5 :
sola := dsolve({sys,x(0)=0,y(0)=0,z(0)=cos(a),w(0)=sin(a)},
              {x(t),y(t),z(t),w(t)}, type=numeric) :
solb := dsolve({sys,x(0)=0,y(0)=0,z(0)=cos(b),w(0)=sin(b)},
              {x(t),y(t),z(t),w(t)}, type=numeric) :
ta:=temps(a,eps) : tb:=temps(b,eps) :
ya:=subs(sola(ta),y(t)) : yb:=subs(solb(tb),y(t)) :
while abs(yb-ya)>eps do
  m:=evalf((a+b)/2) :
  solm := dsolve({sys,x(0)=0,y(0)=0,z(0)=cos(m),w(0)=sin(m)},
                {x(t),y(t),z(t),w(t)}, type=numeric) :

```

```

tm:=temps(m,eps) :
ym := subs(solm(tm),y(t)) :
if (ym-6)*(ya-6)<0 then b:=m : yb:=ym :
      else a:=m : ya:=ym :
fi:
od:
RETURN(a);
end:

```

**Cinquième étape.** On calcule une approximation de  $\alpha$  pour  $eps = 0.01$ , et on trace dans le plan de phase la solution obtenue, voir figure 23.

```

> dichot(0.01);
2.136718750
> temps(2.136718750,0.01);
8.737500000
> DEplot([sys], [x(t),y(t),z(t),w(t)],t=0..8.7375,
[[x(0)=0,y(0)=0,z(0)=cos(2.136718750),w(0)=sin(2.136718750)]],
stepsize=0.05, scene=[x(t),y(t)],linecolor=[blue]);

```

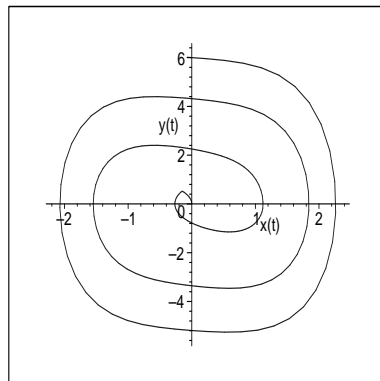


Figure 23:

Le temps minimal pour amener le ressort de la position  $(0, 6)$  à l'équilibre  $(0, 0)$  est donc de  $8.7375$  s.

**Remarque 8.1** *Considérons le contrôle suivant :*

$$u(t) = \text{signe}(y(t) - 0.1)/1.33$$

*On constate numériquement que la solution du système associée à ce contrôle passe bien par le point  $(0, 6)$  au temps  $t = 10.92$ . Le temps qu'il faut à cette trajectoire pour aller de  $(0, 0)$  au point  $(0, 6)$  est bien supérieur au temps minimal calculé.*

## References

- [1] *V.I. Arnold, Méthodes mathématiques pour la mécanique classique, Editions Mir, Moscou, 1976.*

- [2] *B. Bonnard, M. Chyba*, The role of singular trajectories in control theory, Math. Monograph, Springer-Verlag, à paraître.
- [3] *B. Bonnard, M. Chyba, H. Heutte*, Contrôle optimal géométrique appliqué, Preprint, Université de Bourgogne, 1995.
- [4] *A.E. Bryson, Y.C. Ho*, Applied optimal control, Hemisphere Publishing Corp. Washington, 1975.
- [5] *V. Jurdjevic*, Geometric control theory, Cambridge University Press, 1997.
- [6] *J. Lafontaine*, Introduction aux variétés différentielles, Presses universitaires (Grenoble), 1996.
- [7] *E.B. Lee, L. Markus*, Foundations of optimal control theory, John Wiley, New York, 1967.
- [8] *F. Pham*, Géométrie différentielle, 1992.
- [9] *L. Pontryagin et al.*, Théorie mathématique des processus optimaux, Eds Mir, Moscou, 1974.
- [10] *A.V. Sarychev*, First- and second-order integral functionals of the calculus of variations which exhibit the Lavrentiev phenomenon, J. of Dynamical and Control Systems, Vol. 3, No. 4, 1997, 565-588.
- [11] *E. D. Sontag*, Mathematical Control Theory, Deterministic Finite Dimensional Systems, Springer-Verlag, 2nd Edition, 1998.
- [12] *E. Trélat*, Etude asymptotique et transcendance de la fonction valeur en contrôle optimal ; catégorie log-exp en géométrie sous-Riemannienne dans le cas Martinet, thèse de doctorat, Université de Bourgogne, 2000.