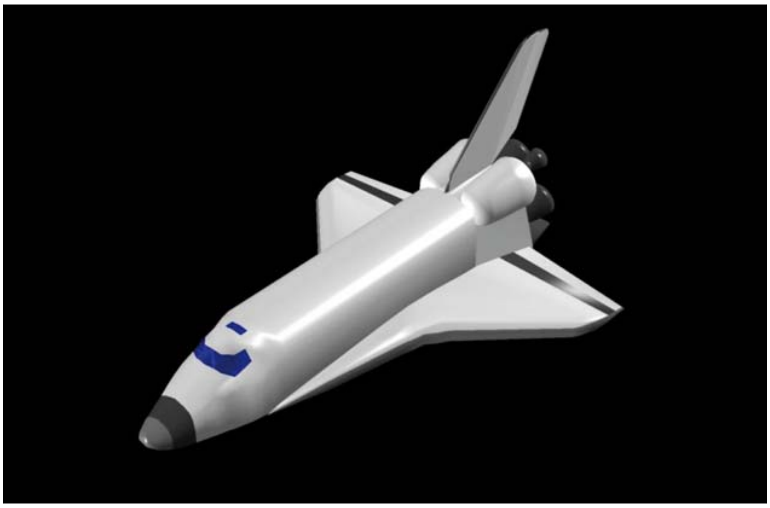
Théorie du contrôle :
contrôle optimal et stabilisation

Tout le monde sait maintenir en équilibre un balai sur son doigt (problème du pendule inversé). En revanche il est beaucoup plus difficile de maintenir en équilibre sur son doigt un double pendule inversé, c'est-à-dire un système composé de deux balais l'un sur l'autre, surtout si l'on ferme les yeux. La théorie du contrôle permet de le faire, à condition bien sûr de disposer d'un bon modèle mathématique.



La navette spatiale

Un système de contrôle est un système dynamique sur lequel on peut agir au moyen d'une commande ou contrôle. Un ordinateur dont les éléments interconnectés permettent à un utilisateur d'effectuer une série de commandes élémentaires, un écosystème sur lequel on agit en favorisant telle ou telle espèce pour parvenir à un équilibre, les tissus nerveux formant un réseau contrôlé par le cerveau réalisant la transformation de stimuli provenant de l'extérieur et ayant un effet sur l'organisme, un robot devant effectuer une tâche bien précise, une voiture sur laquelle on agit avec les pédales d'accélérateur et de frein et que l'on guide avec le volant, un satellite ou une navette spatiale, une réaction chimique commandée en température, sont autant d'exemples de systèmes de contrôle, pouvant être modélisés et traités par cette théorie. Le langage mathématique permet de définir précisément le concept de système de contrôle.

La théorie du contrôle

Elle analyse les propriétés de ce système dans le but de l'amener d'un état initial donné à un certain état final, en respectant éventuellement certains critères. Les systèmes abordés sont multiples et leurs origines très diverses (mécanique, électricité, électronique, biologie, chimie, économie...). L'objectif peut être aussi de stabiliser le système pour le rendre insensible à certaines perturbations (**stabilisation**), ou encore de déterminer des solutions optimales pour un certain critère d'optimisation (**contrôle optimal**). Pour le modéliser, on peut avoir recours à des équations différentielles, intégrales, fonctionnelles, aux différences finies, aux dérivées partielles, etc. Pour cette raison la théorie du contrôle, l'Automatique, sont à l'interconnexion de nombreux domaines mathématiques.

Dans les industries modernes où la notion de rendement est prépondérante, le rôle de l'automaticien est de concevoir, de réaliser et d'optimiser, tout au moins d'améliorer les méthodes existantes. Ainsi les domaines d'application de l'automatique sont multiples. Les industries concernées sont : aérospatiale, automobile, robotique, aéronautique, internet et les communications en général, mais aussi le secteur médical, chimique, génie des procédés...

La contrôlabilité

Elle consiste à faire passer le système d'un certain état initial à un état final prescrit. Une fois le problème de contrôlabilité résolu, on peut vouloir passer de l'état initial à l'état final en minimisant un certain critère ; on parle alors d'un problème de **contrôle optimal**. Par exemple, un conducteur effectuant le trajet Bordeaux-Strasbourg peut vouloir voya-

Le robot $2k\pi$ (CAS Fontainebleau, Ecole des Mines de Paris) ger en temps minimal, auquel cas il va prendre l'autoroute et donc dépenser plus d'argent et d'essence, ou bien il peut choisir comme critère de dépenser le moins d'argent possible, et dans ce cas il empruntera les axes secondaires, non payants, et mettra beaucoup plus de temps pour arriver à sa destination.

En mathématiques, la théorie du contrôle optimal, apparue après la seconde guerre mondiale, pour répondre à des problèmes de guidage notamment en aéronautique, prolonge le calcul des variations, en particulier les principes variationnels de la mécanique (principe de Fermat, de Huygens, équations d'Euler-Lagrange). Le point clé de cette théorie est le Principe du Maximum de Pontryagin, découvert en 1956.

Dans le domaine de l'aérospatiale, la théorie du contrôle a une grande importance dans les techniques d'aérocapture : problèmes de guidage, transferts d'orbites aéroassistés, développement de lanceurs de satellites récupérables (l'enjeu financier est très important), problèmes de rentrée atmosphérique tels que le fameux projet Mars Sample Return développé par le CNES, qui consiste à envoyer une navette spatiale habitée vers la planète Mars, dans le but de ramener sur Terre des échantillons martiens.

Pour ce problème, au cours de la traversée de l'atmosphère, il faut réduire suffisamment par frottement l'énergie cinétique, amener l'engin spatial d'une position initiale précise à une cible donnée, et de plus il faut prendre en compte des contraintes sur le flux thermique (car il y a des gens à l'intérieur de la navette !), sur l'accélération normale (confort de vol), et sur la pression dynamique (contrainte technique de structure). Enfin, on cherche de plus à minimiser un critère d'optimisation : le flux thermique total de la navette, qui est un facteur d'usure. Le contrôle est la configuration aérodynamique de la navette. Durant cette phase, la navette se comporte comme un planeur, c'est-à-dire que les moteurs sont coupés : il n'y a pas de force de poussée. L'engin est donc soumis uniquement à la force de gravité et aux forces aérodynamiques. Le contrôle est l'angle de gîte qui représente l'angle entre les ailes et un plan contenant la navette.

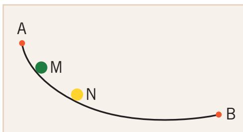
Sonde en phase de rentrée atmosphérique.

Par ailleurs, une fois la trajectoire optimale déterminée, il faut ensuite stabiliser la navette autour de cette trajectoire, de façon à prendre en compte de possibles perturbations (atmosphériques par exemple). C'est un problème général de **stabilisation** qu'on appelle problème de poursuite. Pour expliquer plus simplement ce qu'est la stabilisation, considérons le cas où la trajectoire poursuivie se réduit à un point d'équilibre du système. Cet équilibre peut être instable en l'absence du contrôle et on cherche à le stabiliser. Un exemple très concret est celui du balai que l'on essaie de faire tenir en équilibre sur son doigt. Si on ne part pas de l'équilibre on peut amener le balai à cet équilibre et ensuite, si on arrête de bouger le doigt, le balai devrait, en théorie, rester dans cette même position. Comme on le voit expérimentalement, on n'y arrive pas dans la pratique : si on arrête de bouger le doigt, le balai tombe. On bouge le doigt en fonction de la position du balai (et de sa vitesse) de façon à l'empêcher de tomber : on applique un "feedback", c'est-à-dire un contrôle dépendant de l'état, stabilisant la position d'équilibre.

La théorie du contrôle n'est pas enseignée dans tous les masters, en revanche elle est enseignée dans de nombreuses écoles d'ingénieurs, mais à des étudiants non mathématiciens. C'est donc une spécificité de l'université d'Orléans que de proposer une formation "théorie du contrôle", version mathématique. Ainsi conçue, elle est unique en France. Cette spécificité assure d'ailleurs son succès et les très nombreux débouchés possibles pour les étudiants. ■

Contact : Emmanuel TRELAT
Emmanuel.Trelat@univ-orleans.fr
Laboratoire de mathématiques, applications et physique mathématique d'Orléans (MAPMO – UMR 6628 – CNRS/Université d'Orléans)

LE PLUS COURT CHEMIN ENTRE DEUX POINTS N'EST PAS FORCÉMENT LA LIGNE DROITE !



Courbe cycloïde (toboggan optimal).

En 1638, Galilée étudie le problème suivant : déterminer la courbe sur laquelle une bille roule, sans vitesse initiale, d'un point A à un point B, avec un temps de parcours minimal, sous l'action de la pesanteur (toboggan optimal). C'est *le problème de la brachistochrone* (du grec *brakhistos*, « le plus court », et *chronos*, « temps »). Galilée pense (à tort) que la courbe cherchée est l'arc de cercle, mais il a déjà remarqué que la ligne droite n'est pas le plus court chemin en temps. En 1696, Jean Bernouilli pose ce problème comme un défi aux mathématiciens de son époque. Il trouve lui-même la solution, ainsi que son frère Jacques Bernouilli, Newton, Leibniz et le marquis de l'Hospital. La solution est un arc de cycloïde commençant par une tangente verticale. Il est notable que la demi-arche de *cycloïde* est aussi tautochrone, c'est-à-dire que sur cet arc, les billes lâchées simultanément en des points différents M et N arrivent en même temps au point le plus bas de la trajectoire.