C. R. Acad. Sci. Paris, t. ???, Série I, p. 1–??, 2003 - PXMA????.TEX -
Contrôle optimal/*Optimal control*
(Sous-rubrique/*Sub-Heading*)

Propriétés génériques des trajectoires singulières

Y. Chitour [a], F. Jean [b], E. Trélat [c]

[a] **Univ. Paris-Sud, Labo. AN-EDP, Math., UMR 8628, Bat. 425, 91405 Orsay cedex.**
Courriel : yacine.chitour@math.u-psud.fr
[b] **ENSTA, UMA, 32 bd Victor, 75015 Paris.**
Courriel : fjean@ensta.fr
[c] **Univ. Paris-Sud, Labo. AN-EDP, Math., UMR 8628, Bat. 425, 91405 Orsay cedex.**
Courriel : emmanuel.trelat@math.u-psud.fr

(Reçu le jour mois année, accepté après révision le jour mois année)

Résumé. Nous énonçons des résultats de généricité des trajectoires singulières en géométrie sous-riemannienne : génériquement (au sens de la topologie de Whitney) toute trajectoire singulière est d'ordre minimal et de corang 1, et en particulier n'est pas de Goh si le rang de la distribution est supérieur ou égal à 3. Nous étendons ces résultats aux systèmes affines en le contrôle. © 2003 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Generic properties of singular trajectories

Abstract. *We give genericity results for singular trajectories in sub-Riemannian geometry: generically (in the sense of the Whitney topology), every singular trajectory is of minimal order and of corank 1 and in particular is not of Goh type if the rank of the distribution is greater or equal to 3. We extend these results to control-affine systems.* © 2003 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

1. Introduction

Soient M une variété lisse de dimension n, x_0 un point de M, et $T>0$ un réel. Dans les définitions à suivre, notre point de vue est local, et quitte à se placer dans une carte on peut considérer, pour simplifier l'exposé, que $M=\mathbb{R}^n$. Considérons alors le système de contrôle général $\dot{x}(t)=f(x(t),u(t)),\ x(0)=x_0$, où $f:\mathbb{R}^n\times\mathcal{U}\to\mathbb{R}^n$ est une application lisse et où l'ensemble des contrôles admissibles $\mathcal{U}$ est un ouvert de $L^\infty([0,T],\mathbb{R}^m)$. On définit sur $\mathcal{U}$ l'*application entrée-sortie* $E_{x_0,T}:u\mapsto x(T,x_0,u)$, où $x(t,x_0,u)$ est la solution du système associée à $u\in\mathcal{U}$ et partant de x_0 en $t=0$.

DÉFINITION 1.1. – *Un contrôle u est dit singulier sur $[0,T]$ si c'est un point critique de l'application entrée-sortie $E_{x_0,T}$. Une trajectoire $x(t,x_0,u)$ est dite singulière sur $[0,T]$ si u est singulier. Elle est dite de corang 1 si la singularité est de codimension 1 dans $\mathbb{R}^n$.*

Note présentée par Prénom NOM

S0764-4442(00)0????-?/FLA

Soit $x \in \mathbb{R}^n$. Considérons maintenant le problème de contrôle optimal suivant : parmi toutes les trajectoires solutions du système reliant x_0 à x, déterminer une trajectoire minimisant le coût $C_T(u) = \int_0^T f^0(x,u)dt$, où $f^0 : \mathbb{R}^n \times \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ est une fonction lisse. La *fonction valeur* S_T au point x est alors définie comme la borne inférieure des coûts des trajectoires reliant x_0 à x en temps T. Le principe du maximum de Pontryagin (voir [13]) affirme que si la trajectoire $x(.)$ associée au contrôle $u \in \mathcal{U}$ est optimale sur $[0,T]$, alors il existe une application $p(.) : [0,T] \to \mathbb{R}^n$ absolument continue, appelée vecteur adjoint, et un réel $p^0 \leqslant 0$, tels que le couple $(p(.),p^0)$ est non trivial, et tels que les équations suivantes sont vérifiées pour presque tout $t \in [0,T]$:

$$\dot{x}(t) = \frac{\partial H}{\partial p}(x(t),p(t),p^0,u(t)),\ \dot{p}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}(x(t),p(t),p^0,u(t)),\ \frac{\partial H}{\partial u}(x,p,p^0,u) = 0,$$

où $H(x,p,p^0,u) = \langle p, f(x,u)\rangle + p^0 f^0(x,u)$ est le Hamiltonien du système.

Une *extrémale* est par définition un quadruplet $(x(.),p(.),p^0,u(.))$ solution du système précédent. Si $p^0 \neq 0$, l'extrémale est dite *normale*, et si $p^0 = 0$ elle est dite *anormale*.

En particulier toute trajectoire singulière est la projection d'une extrémale anormale, et réciproquement.

Une trajectoire singulière qui n'est pas la projection d'une extrémale normale est dite *stricte*.

Dans cette note nous énonçons des résultats de généricité des trajectoires singulières, en géométrie sous-riemannienne tout d'abord, puis pour des systèmes affines. Nous généralisons ceux de [6], resp. [11], qui concernent les systèmes affines mono-entrée, resp. sous-riemanniens de rang 2, et améliorons aussi certains résultats de [2]. Notons que dans le preprint [9] l'auteur a tenté de démontrer des propriétés semblables, cependant les énoncés, ainsi que leur preuve, sont erronés. Dans un article à venir, nous démontrerons en détail tous ces résultats.

2. Trajectoires singulières en géométrie sous-riemannienne

Soit M une variété lisse de dimension n. Une *distribution* D sur la variété M est par définition un sous-fibré du fibré tangent TM. Elle est dite de rang m si en tout point x de M on a dim $D(x) = m$. Une courbe $x(.)$ sur M, définie sur $[0,1]$ et absolument continue, est dite *D-horizontale* si pour presque tout $t \in [0,1]$ on a $\dot{x}(t) \in D(x(t))$. Les sections du sous-fibré D sont des champs de vecteurs lisses sur M.

Pour toute courbe *D-horizontale* $x(.)$ sur M et pour tout $t \in [0,1]$, il existe une carte en $x(t)$ dans laquelle on peut définir localement la distribution D par m champs de vecteurs $f_1,\ldots,f_m$, de sorte que, au voisinage de t, la courbe $x(.)$ est une trajectoire du système de contrôle $\dot{x} = \sum_{i=1}^m u_i f_i(x)$.

Notons que l'ensemble des courbes D-horizontales n'est pas en général une variété : ses singularités correspondent aux trajectoires singulières, qui sont intrinsèques à la distribution D.

D'après le principe du maximum toute trajectoire singulière est la projection d'une extrémale anormale ; soit donc $p(.)$ un vecteur adjoint associé. Posons alors, pour tous $i,j \in \{1,\ldots,m\}$: $h_i(t) = \langle p(t), f_i(x(t))\rangle$, et $h_{ij}(t) = \langle p(t), [f_i,f_j](x(t))\rangle$, où $[\ ,\ ]$ est le crochet de Lie de champs de vecteurs. Le long de cette extrémale anormale on a les relations $h_i(t) = 0$, pour $i = 1,\ldots,m$. Par dérivation on obtient $\sum_{j=1}^m h_{ij}(t)u_j(t) = 0$, pour tout $i = 1,\ldots,m$.

Le long de l'extrémale anormale $(x(.),p(.),u(.))$, on appelle *matrice de Goh* au temps t la matrice carrée antisymétrique $G(t) = (h_{ij}(t))_{1\leqslant i,j\leqslant m}$. Son rang $r(t)$ est pair et ne dépend pas de la base $(f_1,\ldots,f_m)$ choisie dans la carte. Si de plus m est pair, det $G(t) = (P(t))^2 = 0$, où $P(t)$ est un polynôme en les $h_{ij}(t)$ de degré $m/2$, le *Pfaffien*. Par dérivation $\sum_{i=1}^m u_j(t)\{h_j,P\}(t) = 0$. Soit alors $\widetilde{G}(t)$ la $(m+1)\times m$ matrice, égale à la matrice $G(t)$ augmentée de la ligne $(\{h_j,P\}(t))_{1\leqslant j\leqslant m}$. Le rang $\tilde{r}(t)$ de $\widetilde{G}(t)$ ne dépend pas de la base choisie dans la carte. Tout contrôle singulier $u = (u_1,\ldots,u_m)$ est dans le noyau de la matrice de Goh le long de l'extrémale anormale correspondante. Si m est impair et $r(t) = m-1$ (resp. si m est pair et $\tilde{r}(t) = m-1$), alors on en déduit $u(t)$ au signe près, ainsi que la direction singulière correspondante. Ceci justifie la définition suivante (voir [6]).

DÉFINITION 2.1. – *Si m est impair (resp. pair), une trajectoire singulière est dite d'ordre minimal si elle admet un relèvement anormal le long duquel l'ensemble des $t \in [0,1]$ tels que $r(t) = m-1$ (resp.*

$\tilde{r}(t) = m-1$*) est dense dans* $[0,1]$.

A l'opposé, et pour m quelconque, une trajectoire singulière est dite *de Goh* si elle admet un relèvement extrémal anormal tel que $r(t)$ est identiquement nul.

THÉORÈME 2.2. – *Soient* m *un entier tel que* $2 \leqslant m < n$*, et* $\mathcal{D}_m$ *l'ensemble des distributions de rang* m *de la variété* M *muni de la topologie* C^∞ *de Whitney. Il existe un ouvert* O_m *dense dans* $\mathcal{D}_m$ *tel que, pour toute distribution* $D \in O_m$*, toute trajectoire singulière non triviale de* D *est d'ordre minimal et de corang 1. De plus le complémentaire de* O_m *est de codimension infinie.*

Remarque 1. – *En particulier, si* $m \geqslant 3$*, toute distribution de* O_m *n'admet aucune trajectoire singulière de Goh non triviale, ce qui améliore [2, Th. 8] où l'existence d'un ensemble dense seulement est montrée.*

Remarque 2. – *Si* m *est impair, il existe de plus un ouvert dense de* M *tel que par tout point de cet ouvert passe une trajectoire singulière non triviale (voir aussi [12]).*

Enonçons maintenant des conséquences en géométrie sous-riemannienne. Une *variété sous-riemannienne* (M, D, g) est constituée d'une variété M de dimension finie, d'une distribution D sur M, et d'une métrique g sur D. Elle est dite analytique si tous les objets sont analytiques. La *distance sous-riemannienne* $d_{SR}(x_0, x_1)$ entre deux points x_0 et x_1 de M est la borne inférieure des longueurs (au sens de la métrique g) des courbes horizontales joignant x_0 à x_1 en temps 1. Une telle courbe horizontale, de longueur égale à $d_{SR}(x_0, x_1)$, est dite *minimisante*. La *sphère sous-riemannienne* $S(x_0, r)$ centrée en x_0, de rayon r, est l'ensemble des points x de M tels que $d_{SR}(x_0, x) = r$.

L'étude des courbes minimisantes peut s'effectuer dans le cadre du contrôle optimal. On peut comme précédemment supposer que $M = \mathbb{R}^n$ et que la distribution D est engendrée par m champs de vecteurs $f_1, \ldots, f_m$. On se ramène alors au problème de *contrôle optimal* pour le système (cf [4]) $\dot{x} = \sum_{i=1}^m u_i f_i(x)$, et pour le coût $\int_0^1 g(\dot{x}(t), \dot{x}(t))^{1/2} dt$. Le résultat suivant est dû à [5].

PROPOSITION 2.3. – *Soit* $m \leqslant n$*, et soit* $\mathcal{G}_m$ *l'ensemble des couples* (D, g) *où* D *est une distribution de rang* m *sur* M *et* g *une métrique sous-riemannienne, muni de la topologie* C^∞ *de Withney. Il existe un ouvert dense de* $\mathcal{G}_m$ *tel que toute trajectoire singulière non triviale d'un couple de cet ensemble est stricte.*

L'existence de trajectoires singulières minimisantes est liée à la régularité de la distance sous-riemannienne (voir [1, 2, 15], et voir [8, 10] pour une définition générale de la sous-analyticité). En combinant la proposition 2.3 et la remarque 1, on obtient le corollaire suivant, qui améliore [2, Th. 9].

COROLLAIRE 2.4. – *Si* $3 \leqslant m < n$*, il existe un ouvert dense de* $\mathcal{G}_m$ *tel que tout couple de cet ensemble n'admet aucune trajectoire singulière minimisante. De plus, dans le cadre analytique, ceci implique que les sphères sous-riemanniennes de petit rayon associées sont sous-analytiques.*

3. Trajectoires singulières des systèmes de contrôle affines

Soient M une variété lisse de dimension n et $(f_0, \ldots, f_m)$ un $(m+1)$-uplet de champs de vecteurs lisses sur M. Fixons un réel $T > 0$. Considérons le système de contrôle affine $\dot{x} = f_0(x) + \sum_{i=1}^m u_i f_i(x)$, où l'ensemble des contrôles admissibles $u = (u_1, \ldots, u_m)$ est un ouvert de $L^\infty([0,T], \mathbb{R}^m)$.

Comme dans la section précédente, toute trajectoire singulière est la projection d'une extrémale anormale $(x(.), p(.))$, et on définit de la même façon, pour tout $t \in [0, T]$ et $i, j \in \{0, \ldots, m\}$, les fonctions $h_i(t)$ et $h_{ij}(t)$. Le long de cette extrémale anormale on a les relations $h_0(t) = \text{Cste}$, et $h_i(t) = 0$ pour $i = 1, \ldots, m$. Par dérivation on obtient $h_{i0}(t) + \sum_{j=1}^m h_{ij}(t) u_j(t) = 0$, pour $i = 0, \ldots, m$.

Le long de l'extrémale anormale $(x(.), p(.), u(.))$, on appelle *matrice de Goh* (resp. *matrice de Goh augmentée*) au temps t la matrice carrée antisymétrique $G(t) = (h_{ij}(t))_{1 \leqslant i,j \leqslant m}$ (resp. $\bar{G}(t) = (h_{ij}(t))_{0 \leqslant i,j \leqslant m}$). Si de plus m est impair, det $\bar{G}(t) = \bar{P}(t) = 0$, où $\bar{P}(t)$ est un polynôme en les $h_{ij}(t)$, le *Pfaffien*. Par dérivation $\{h_0, \bar{P}\}(t) + \sum_{i=1}^m u_j(t)\{h_j, \bar{P}\}(t) = 0$. Soit $\widetilde{G}(t)$ la $(m+2) \times (m+1)$ matrice, égale à la matrice $\bar{G}(t)$ augmentée de la ligne $(\{h_j, \bar{P}\}(t))_{0 \leqslant j \leqslant m}$. Si m est pair et rg $G(t) = m$ (resp. si m est impair et rg $\widetilde{G}(t) = m$), alors on en déduit l'expression de $u(t)$. Ceci motive la définition suivante.

DÉFINITION 3.1. – *Si m est pair (resp. impair), une trajectoire singulière est dite d'ordre minimal si elle admet un relèvement anormal le long duquel l'ensemble des $t \in [0,1]$ tels que rg $G(t) = m$ (resp. rg $\widetilde{G}(t) = m$) est dense dans* $[0,1]$.

A l'oppos´e, et pour m quelconque, une trajectoire singuli`ere est dite *de Goh* si elle admet un rel`evement extr´emal anormal tel que la matrice de Goh associ´ee est identiquement nulle.

THÉORÈME 3.2. – *Soient m un entier tel que $1 \leqslant m < n$, et $\mathcal{F}_m$ l'ensemble des $(m+1)$-uplets de champs de vecteurs linéairement indépendants $(f_0, \dots, f_m)$ muni de la topologie C^∞ de Whitney. Il existe un ouvert O_m dense dans $\mathcal{F}_m$ tel que pour tout $(m+1)$-uplet de O_m, toute trajectoire singulière non triviale du système de contrôle affine $\dot{x} = f_0(x) + \sum_{i=1}^m u_i f_i(x)$ est d'ordre minimal et de corang 1. De plus le complémentaire de O_m est de codimension infinie.*

Remarque 3. – *En particulier si $m \geqslant 2$ tout système affine associé à un $(m+1)$-uplet de O_m n'admet aucune trajectoire singulière de Goh non triviale, et donc aucune trajectoire rigide non triviale (pour une définition de la rigidité, voir [3, 7]).*

Avec les notations de la premi`ere section, consid´erons le probl`eme de contrôle optimal associ´e `a un syst`eme affi ne avec le coût quadratique $C_T(u) = \int_0^T \sum_{i=1}^m u_i(t)^2 dt$. La r´egularit´e de la fonction valeur S_T associ´ee a ´et´e ´etudi´ee dans [14]. Tout d'abord on a le r´esultat suivant analogue `a la proposition 2.3.

PROPOSITION 3.3. – *Si $m < n$, il existe un ouvert dense de $\mathcal{F}_m$ tel que toute trajectoire singulière non triviale d'un système affine formé avec un $(m+1)$-uplet de cet ensemble est stricte.*

COROLLAIRE 3.4. – *Si $2 \leqslant m < n$, il existe un ouvert dense de $\mathcal{F}_m$ tel que tout système affine associé à un $(m+1)$-uplet de cet ensemble n'admet aucune trajectoire singulière minimisante. Par conséquent dans le cadre analytique la fonction valeur S_T est continue et sous-analytique sur son ensemble de définition.*

Références bibliographiques

[1] A. Agrachev, Compactness for SR minimizers and subanalyticity, Rend. Semin. Mat. Torino 56, 1998.

[2] A. Agrachev, J. P. Gauthier, On subanalyticity of Carnot-Carathéodory distances, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 18, no. 3, 2001.

[3] A. Agrachev, A. Sarychev, Abnormal sub-Riemannian geodesics : Morse index and rigidity, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 13, 1996.

[4] A. Bellaïche, Tangent space in sub-Riemannian geometry, Sub-Riemannian geometry, Birkhäuser, 1996.

[5] B. Bonnard, H. Heutte, La propriété de stricte anormalité est générique, Preprint Univ. Bourgogne 77, 1995.

[6] B. Bonnard, I. Kupka, Generic properties of singular trajectories, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 14, no. 2, 1997.

[7] R. L. Bryant, L. Hsu, Rigidity of integral curves of rank 2 distributions, Invent. Math. 114, 1993.

[8] R.M. Hardt, Stratification of real analytic mappings and images, Invent. Math., 28, 1975.

[9] H. Heutte, Propriétés génériques des extrémales singulières dans le cas multi-entrées, Preprint Univ. Bourgogne 67, 1995.

[10] H. Hironaka, Subanalytic sets, Number theory, algebraic geometry and commutative algebra, in honor of Y. Akizuki, Tokyo, 1973.

[11] W. S. Liu, H. J. Sussmann, Shortest paths for sub-Riemannian metrics of rank two distributions, Memoirs AMS 564, 118, 1995.

[12] R. Montgomery, A survey of singular curves in sub-Riemannian geometry, J. Dyn. Cont. Syst. 1, no. 1, 1995.

[13] L. Pontryagin et al., Théorie mathématique des processus optimaux, Eds Mir, Moscou, 1974.

[14] E. Trélat, Some properties of the value function and its level sets for affine control systems with quadratic cost, J. Dyn. Cont. Syst. 6, no. 4, 2000.

[15] E. Trélat, Etude asymptotique et transcendance de la fonction valeur en contrôle optimal ; catégorie log-exp en géométrie sous-riemannienne dans le cas Martinet. Thèse, Univ. de Bourgogne, 2000.