

# Contrôle optimal appliqué au problème de rentrée atmosphérique

Emmanuel TRÉLAT<sup>1</sup><sup>1</sup>Laboratoire AN-EDP

Math., UMR 8628, Bat. 425, 91405 Orsay Cedex, France.

emmanuel.trelat@math.u-psud.fr

<http://www.math.u-psud.fr/~trelat>

**Résumé**— On s'intéresse au problème de contrôle optimal d'une navette spatiale en phase de rentrée atmosphérique, où le contrôle est l'angle de gîte, et le coût est le flux thermique total (facteur d'usure de la navette). L'objectif est de déterminer une trajectoire optimale jusqu'à une cible donnée, sachant que la navette est de plus soumise à des contraintes sur l'état, à savoir sur le flux thermique, l'accélération normale, et la pression dynamique. Ce problème a été complètement résolu dans une série d'articles [3], [1], [2].

**Mots-clés**— trajectoire optimale, principe du maximum, méthode de tir.

## I. MODÉLISATION DU PROBLÈME DE RENTRÉE ATMOSPHÉRIQUE

### A. Présentation du projet

Ce projet a été posé par le CNES, et est motivé par l'importance croissante de la théorie du contrôle, et du contrôle optimal, dans les techniques d'aérocapture :

- problèmes de guidage, transferts d'orbites aéroassistés,
- développement de lanceurs de satellites *recupérables* (l'enjeu financier très important),
- problèmes de rentrée atmosphérique : c'est l'objet du fameux projet *Mars Sample Return* développé par le CNES, qui consiste à envoyer une navette spatiale habitée vers la planète Mars, dans le but de ramener sur Terre des échantillons martiens.

En gros, le rôle de l'arc atmosphérique est :

- de réduire suffisamment l'énergie cinétique, par frottement dans l'atmosphère,
- d'amener l'engin spatial d'une position initiale précise à une cible donnée,
- de plus il faut prendre en compte certaines contraintes sur l'état : contrainte sur le flux thermique (car il y a des gens à l'intérieur de la navette!), sur l'accélération normale (confort de vol), et sur la pression dynamique (contrainte technique de structure),
- enfin, on cherche de plus à minimiser un critère d'optimisation : le flux thermique total de la navette.

Le contrôle est la configuration aérodynamique de la navette. La première question qui se pose est la suivante : les forces aérodynamiques peuvent-elles contribuer à freiner la navette de manière adéquate? En fait si l'altitude

est trop élevée (supérieure à 120 km), alors la densité atmosphérique est trop faible, et il est physiquement impossible de générer des forces aérodynamiques suffisamment intenses. Au contraire, si l'altitude est trop basse (moins de 20 km), la densité atmosphérique est trop grande, et le seul emploi des forces aérodynamiques conduirait à un dépassement du seuil autorisé pour le flux thermique ou la pression dynamique. En effet la rentrée atmosphérique s'effectue à des vitesses très élevées. En revanche si l'altitude est comprise entre 20 et 120 km, on peut trouver un compromis. C'est ce qu'on appelle la *phase atmosphérique*.

Durant cette phase atmosphérique, la navette se comporte comme un *planeur*, c'est-à-dire que les moteurs sont coupés : il n'y a pas de force de poussée. L'engin est donc soumis uniquement à la force de gravité et aux forces aérodynamiques. Le contrôle est l'angle de gîte qui représente l'angle entre les ailes et un plan contenant la navette. Enfin, on choisit comme critère d'optimisation le flux thermique total de la navette.

### B. Modélisation du problème

La modélisation précise du problème a été effectuée dans [3], [5]. On utilise les lois de la mécanique classique, un modèle de densité atmosphérique et un modèle pour les forces s'exerçant sur la navette, la force gravitationnelle et la force aérodynamique qui se décompose en une composante dite de *traînée* et une composante dite de *portance*. Le système est mono-entrée et le contrôle est la *gîte cinématique* (l'angle d'attaque est fixé).

On donne un modèle général tenant compte de la rotation (uniforme) de la Terre autour de l'axe  $K = NS$ , à vitesse angulaire de module  $\Omega$ . On note  $E = (e_1, e_2, e_3)$  un repère galiléen dont l'origine est le centre  $O$  de la Terre,  $R_1 = (I, J, K)$  un repère d'origine  $O$  en rotation à la vitesse  $\Omega$  autour de l'axe  $K$ , et  $I$  l'intersection avec le méridien de Greenwich.

Soit  $R$  le rayon de la Terre et  $G$  le centre de masse de la navette. On note  $R'_1 = (e_r, e_l, e_L)$  le repère associé aux coordonnées sphériques de  $G = (r, l, L)$ ,  $r \geq R$  étant la distance  $OG$ ,  $l$  la longitude et  $L$  la latitude.

Le système de coordonnées sphériques présente une sin-

gularité au pôle Nord et au pôle Sud. Pour écrire la dynamique sous forme plus simple on introduit le repère mobile  $R_2 = (i, j, k)$  dont l'origine est  $G$  de la manière suivante. Soit  $\zeta : t \mapsto (x(t), y(t), z(t))$  la trajectoire de  $G$  mesurée dans le repère  $R_1$  et  $\vec{v}$  la vitesse relative  $\vec{v} = \dot{x}I + \dot{y}J + \dot{z}K$ . Pour définir  $i$  on pose :  $\vec{v} = |v|i$ . Le vecteur  $j$  est un vecteur unitaire du plan  $(i, e_r)$  perpendiculaire à  $i$  et orienté par  $j \cdot e_r > 0$ . On pose  $k = i \wedge j$ . La direction de la vitesse est paramétrisée dans le repère  $R'_1 = (e_r, e_l, e_L)$  par deux angles :

- la pente  $\gamma$ , aussi appelée *angle de vol*, qui représente l'angle entre un plan horizontal et un plan contenant la navette,
- l'azimut  $\chi$ , qui est l'angle entre la projection de  $\vec{v}$  dans un plan horizontal et le vecteur  $e_L$ .

L'équation fondamentale de la mécanique, qui est une équation différentielle du second ordre sur  $\mathbb{R}^3$ , se traduit par un système dans les coordonnées  $(r, l, L, v, \gamma, \chi)$ .

Par ailleurs, on suppose d'une part que la navette est un planeur, c'est-à-dire que la *poussée de la navette est nulle*, et d'autre part on suppose que la vitesse de l'atmosphère est la vitesse de la Terre; la vitesse relative de la navette par rapport à la Terre est donc la vitesse relative  $\vec{v}$ .

Les forces agissant sur la navette sont la force de gravité et la force aérodynamique, qui se décompose en une composante dite de *traînée* (opposée à la vitesse), et une force dite de *portance* (perpendiculaire à la vitesse). On note  $\mu$  est l'angle de gîte,  $\rho(r)$  la densité de l'atmosphère, et  $C_D, C_L$  les coefficients de traînée et de portance. Ces coefficients dépendent de l'angle d'attaque, i.e. l'angle entre l'axe du planeur et le vecteur vitesse; c'est a priori un contrôle mais on suppose que durant l'arc atmosphérique il est fixé. Notre seul contrôle est donc l'angle de gîte  $\mu$  dont l'effet est double : modifier l'altitude mais aussi tourner à droite ou à gauche. On choisit pour la densité atmosphérique un modèle exponentiel  $\rho(r) = \rho_0 e^{-\beta r}$ , et par ailleurs on suppose que  $g(r) = \frac{g_0}{r^2}$ . Le repère n'étant pas absolu, la navette est également soumise à la force de Coriolis et à la force d'entraînement.

Finalement, l'arc atmosphérique est décrit par le système suivant :

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= v \sin \gamma \\ \frac{dv}{dt} &= -g \sin \gamma - \frac{1}{2} \rho \frac{S C_D}{m} v^2 \\ &\quad + \Omega^2 r \cos L (\sin \gamma \cos L - \cos \gamma \sin L \cos \chi) \\ \frac{d\gamma}{dt} &= \cos \gamma \left( -\frac{g}{v} + \frac{g}{r} \right) + \frac{1}{2} \rho \frac{S C_L}{m} v \cos \mu + 2\Omega \cos L \sin \chi \\ &\quad + \Omega^2 \frac{r}{v} \cos L (\cos \gamma \cos L + \sin \gamma \sin L \cos \chi) \\ \frac{dL}{dt} &= \frac{v}{r} \cos \gamma \cos \chi \\ \frac{dl}{dt} &= -\frac{v}{r} \frac{\cos \gamma \sin \chi}{\cos L} \\ \frac{d\chi}{dt} &= \frac{1}{2} \rho \frac{S C_L}{m} \frac{v}{\cos \gamma} \sin \mu + \frac{v}{r} \cos \gamma \tan L \sin \chi \\ &\quad + 2\Omega (\sin L - \tan \gamma \cos L \cos \chi) + \Omega^2 \frac{r}{v} \frac{\sin L \cos L \sin \chi}{\cos \gamma} \end{aligned} \quad (1)$$

Pour les données numériques utilisées, on se réfère aux articles précités.

### C. Le problème de contrôle optimal

Le problème est d'amener l'engin spatial d'une variété initiale  $M_0$  à une variété finale  $M_1$ , où le temps terminal  $t_f$  est libre, et les conditions aux limites sont données dans la table I.

	Conditions initiales	Conditions finales
altitude ( $h$ )	119.82 km	15 km
vitesse ( $v$ )	7404.95 m/s	445 m/s
angle de vol ( $\gamma$ )	-1.84 deg	libre
latitude ( $L$ )	0	10.99 deg
longitude ( $l$ )	libre ou fixée à 116.59 deg	166.48 deg
azimut ( $\chi$ )	libre	libre

TABLE I  
CONDITIONS AUX LIMITES

La navette est, au cours de la phase de rentrée atmosphérique, soumise à trois contraintes :

- Contrainte sur le *flux thermique* :

$$\varphi = C_q \sqrt{\rho} v^3 \leq \varphi^{max}, \quad (2)$$

- Contrainte sur l'*accélération normale* :

$$\gamma_n = \gamma_{n0}(\alpha) \rho v^2 \leq \gamma_n^{max}, \quad (3)$$

- Contrainte sur la *pression dynamique* :

$$\frac{1}{2} \rho v^2 \leq P^{max}. \quad (4)$$

Elles sont représentées sur la fig. 1 dans le domaine de vol, en fonction de l'accélération  $d = \frac{1}{2} \frac{S C_D}{m} \rho v^2$  et de  $v$ .

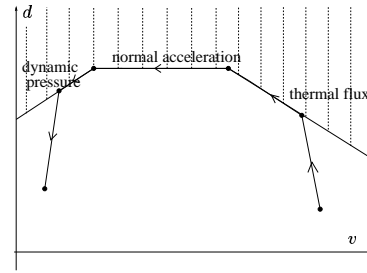


Fig. 1. Contraintes sur l'état, et stratégie de Harpold/Graves

Le problème de contrôle optimal est de minimiser le flux thermique total :

$$C(\mu) = \int_0^{t_f} C_q \sqrt{\rho} v^3 dt. \quad (5)$$

Concernant ce critère d'optimisation, plusieurs choix sont en fait possibles et les critères à prendre en compte sont le facteur d'usure lié à l'intégrale du flux thermique et le confort de vol lié à l'intégrale de l'accélération normale. On choisit le premier critère, le temps final  $t_f$  étant libre.

### D. Stratégie d'Harpold et Graves

Si on fait l'approximation  $\dot{v} \simeq -d$ , le coût peut être écrit :

$$C(\mu) = K \int_{v_0}^{v_f} \frac{v^2}{\sqrt{d}} dv, \quad K > 0,$$

et la stratégie optimale consiste alors à maximiser l'accélération  $d$  pendant toute la durée du vol. C'est la politique décrite dans [7], qui réduit le problème à trouver

une trajectoire suivant le bord du domaine d'états autorisés, dans l'ordre suivant : flux thermique maximal, puis accélération normale maximale, puis pression dynamique maximale, voir fig. 1.

L'avantage de cette méthode est que le long d'un arc frontière le contrôle s'exprime sous forme de *boucle fermée*, c'est-à-dire en fonction de l'état. Cette forme est bien adaptée aux problèmes en temps réel, et se prête bien aux problèmes de stabilisation.

Cependant cette méthode *n'est pas optimale* pour notre critère, et notre but est de chercher une trajectoire optimale.

## II. RÉSULTATS ET SIMULATIONS NUMÉRIQUES

### A. Stratégie quasi-optimale

On rappelle le résultat suivant, montré dans [2] grâce à une analyse géométrique fine des extrémals données par le principe du maximum avec contraintes sur l'état.

*Proposition II.1:* Selon les deux problèmes envisagés (voir table I), on a :

1. Si la longitude initiale est libre, la stratégie optimale est, avec une bonne approximation,  $q_-q_+q_{flux}q_+q_{acc}q_+$ , où  $q_+$  (resp.  $q_-$ ) est un arc correspondant au contrôle  $\mu = 0$  (resp.  $\mu = \pi$ ), et  $q_{flux}$  (resp.  $q_{acc}$ ) est un arc frontière correspondant à la contrainte sur le flux thermique (resp. sur l'accélération normale).

2. Si la longitude initiale est fixée, la stratégie optimale est, avec une bonne approximation,  $q_-q_+q_{flux}q_+q_-$ .

Les contrôles correspondant à un arc frontière sont calculés formellement par dérivation.

Ce résultat d'approximation n'est pas facile à montrer. Pour en donner une idée, remarquons que le système (1) décrivant l'arc atmosphérique est de la forme

$$\dot{q} = X(q) + u_1Y_1(q) + u_2Y_2(q),$$

avec  $u_1 = \cos \mu$ ,  $u_2 = \sin \mu$  et  $q = (r, v, \gamma, L, l, \chi)$ . En posant  $q_1 = (r, v, \gamma)$  et  $q_2 = (L, l, \chi)$ , on peut décomposer le système de la manière suivante :

$$\dot{q}_1 = f_1(q_1, u_1) + O(\Omega), \quad \dot{q}_2 = f_2(q, u_2).$$

Le premier sous-système représente la *partie cinématique*, i.e. le *mouvement longitudinal* de la navette, tandis que le second sous-système représente la *partie dynamique*, i.e. le *mouvement latéral*. Il s'avère que le premier sous-système constitue une bonne approximation du système complet, et en première analyse il faut se concentrer sur lui. C'est un système affine mono-entrée de  $\mathbb{R}^3$ , de la forme :

$$\dot{x} = X(x) + uY(x), \quad |u| \leq 1.$$

Or, dans des conditions génériques, le bord de l'ensemble accessible en temps petit est constitué des surfaces formées par les arcs  $x_+x_-$  et  $x_-x_+$ , et de plus tout point à l'intérieur de l'ensemble accessible peut être atteint par une trajectoire de la forme  $x_-x_+x_-$  ou  $x_+x_-x_+$  (cf [9]). Bien sûr ce résultat ne tient pas compte d'éventuelles contraintes sur l'état.

Il faut donc ensuite établir ce genre de résultats lorsqu'il existe des contraintes sur l'état. Dans [1], il a été établi

que, sous certaines conditions, la synthèse temps-minimale pour le système précédent est de la forme  $x_-x_+^T x_b x_+^T x_-$ , où  $x_+^T$  est un arc tangent à l'arc frontière  $x_b$ .

Finalement, dans [2] il est expliqué comment ce résultat permet d'établir la proposition ci-dessus pour le système complet.

### B. Algorithme de tir multiple

Cet algorithme est standard, et une référence classique est [11]. Nous rappelons brièvement le principe de la méthode. Considérons un problème de contrôle optimal général, où l'état peut être soumis à des contraintes. L'application du principe du maximum réduit le problème à un *problème aux valeurs limites* du type :

$$\dot{z}(t) = F(z(t), t) = \begin{cases} F_0(t, z(t)) & \text{si } t_0 \leq t < t_1 \\ F_1(t, z(t)) & \text{si } t_1 \leq t < t_2 \\ \vdots & \\ F_s(t, z(t)) & \text{si } t_s \leq t \leq t_f \end{cases} \quad (6)$$

où  $t_1, t_2, \dots, t_s \in [t_0, t_f]$  peuvent être des temps de commutation, de jonction ou de contact avec un arc frontière. On a de plus des conditions (de continuité, de saut, etc) en ces temps, des conditions aux limites et des conditions de transversalité.

A priori le temps final  $t_f$  est inconnu. Par ailleurs dans la méthode de tir multiple le nombre  $s$  de commutations doit être fixé; on le détermine lorsque c'est possible par une analyse géométrique du problème.

La méthode de tir multiple consiste à subdiviser l'intervalle  $[t_0, t_f]$  en  $N$  sous-intervalles, la valeur de  $z(t)$  au début de chaque sous-intervalle étant inconnue. Plus précisément, soit  $t_0 < \sigma_1 < \dots < \sigma_k < t_f$  une subdivision *fixée* de l'intervalle  $[t_0, t_f]$ . En tout point  $\sigma_j$  la fonction  $z$  est *continue*. On peut considérer  $\sigma_j$  comme un point de commutation fixe, en lequel on a :

$$\begin{cases} z(\sigma_j^+) = z(\sigma_j^-), \\ \sigma_j = \sigma_j^* \text{ fixé.} \end{cases}$$

On définit maintenant les *noeuds* :

$$\{x_1, \dots, x_m\} = \{t_0, t_f\} \cup \{\sigma_1, \dots, \sigma_k\} \cup \{t_1, \dots, t_s\}. \quad (7)$$

Finalement on est conduit au *problème aux valeurs limites* :

$$\begin{aligned} \bullet \dot{z}(t) = F(t, z(t)) &= \begin{cases} F_1(t, z(t)) & \text{si } x_1 \leq t < x_2 \\ F_2(t, z(t)) & \text{si } x_2 \leq t < x_3 \\ \vdots & \\ F_{m-1}(t, z(t)) & \text{si } x_{m-1} \leq t \leq x_m \end{cases} \\ \bullet \forall j \in \{2, \dots, m-1\} & r_j(x_j, z(x_j^-), z(x_j^+)) = 0 \\ \bullet r_m(x_m, z(x_1), z(x_m)) &= 0 \end{aligned} \quad (8)$$

où  $x_1 = t_0$  est fixé,  $x_m = t_f$ , et les  $r_j$  représentent les conditions intérieures ou limites précédentes.

On améliore la stabilité de la méthode en augmentant le nombre de noeuds. C'est là en effet le principe de la méthode de tir multiple, par opposition à la méthode de tir simple où les erreurs par rapport à la condition initiale évoluent exponentiellement en fonction de  $t_f - t_0$ , voir [11].

Posons  $z_j^+ = z(x_j^+)$ , et soit  $z(t, x_{j-1}, z_{j-1}^+)$  la solution du problème de Cauchy :

$$\dot{z}(t) = F(t, z(t)), \quad z(x_{j-1}) = z_{j-1}^+.$$

On a  $z(x_j^-) = z(x_j^-, x_{j-1}, z_{j-1}^+)$ . Les conditions intérieures et frontières s'écrivent :

$$\begin{aligned} \forall j \in \{2, \dots, m-1\} \quad r_j(x_j, z(x_j^-, x_{j-1}, z_{j-1}^+), z_j^+) &= 0, \\ r_m(x_m, z_1^+, z(x_m^-, x_{m-1}, z_{m-1}^+), z_{m-1}^+) &= 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Posons maintenant :

$$Z = (z_1^+, x_m, z_2^+, x_2, \dots, z_{m-1}^+, x_{m-1})^T \in \mathbb{R}^{(n+1)(m-1)}$$

(où  $z \in \mathbb{R}^n$ ). Alors les conditions (9) sont vérifiées si :

$$G(Z) = \begin{pmatrix} r_m(x_m, z_1^+, z(x_m^-, x_{m-1}, z_{m-1}^+)) \\ r_2(x_2, z(x_2^-, x_1, z_1^+), z_2^+) \\ \vdots \\ r_{m-1}(x_m, z(x_{m-1}^-, x_{m-2}, z_{m-2}^+), z_{m-1}^+) \end{pmatrix} = 0. \quad (10)$$

On s'est donc ramené à déterminer un zéro de la fonction  $G$ , qui est définie sur un espace vectoriel dont la dimension est proportionnelle au nombre de points de commutation et de points de la subdivision. L'équation  $G = 0$  peut alors être résolue itérativement par une méthode de type Newton.

### C. Problème 1 : longitude initiale libre

Les temps de commutation et les valeurs initiales de la longitude et de l'azimut sont calculés avec la méthode de tir multiple. Plus précisément :

- Le premier temps de commutation, de  $q_-$  à  $q_+$ , permet d'ajuster l'entrée dans la phase iso-flux, qui est caractérisée par  $\varphi = \varphi^{\max}$ ,  $\dot{\varphi} = 0$ .
- Le troisième temps de commutation, de  $q_{\text{flux}}$  à  $q_+$ , est utilisé pour régler l'entrée dans la phase iso-accelération normale.
- Le cinquième temps de commutation, de  $q_{\text{acc}}$  à  $q_+$ , permet d'ajuster la vitesse finale  $v(t_f)$ .
- L'azimut initial  $\chi(0)$  sert à régler la latitude finale  $L(t_f)$ .

Par ailleurs le temps final est déterminé par l'altitude finale.

Les résultats numériques sont sur les figures 2 et 3.

### D. Problème 2 : longitude initiale fixée

Les temps de commutation et la valeur initiale de l'azimut sont calculés avec la méthode de tir multiple. Plus précisément :

- Le premier temps de commutation, from  $q_-$  to  $q_+$ , permet d'ajuster l'entrée dans la phase iso-flux.
- Le troisième temps de commutation, de  $q_{\text{flux}}$  à  $q_+$ , permet de régler la vitesse finale  $v(t_f)$ .
- Le quatrième temps de commutation, de  $q_+$  à  $q_-$ , est utilisé pour régler la longitude finale  $l(t_f)$ .
- L'azimut initial  $\chi(0)$  permet d'ajuster la latitude finale  $L(t_f)$ .

Les résultats numériques sont sur les figures 4 et 5.

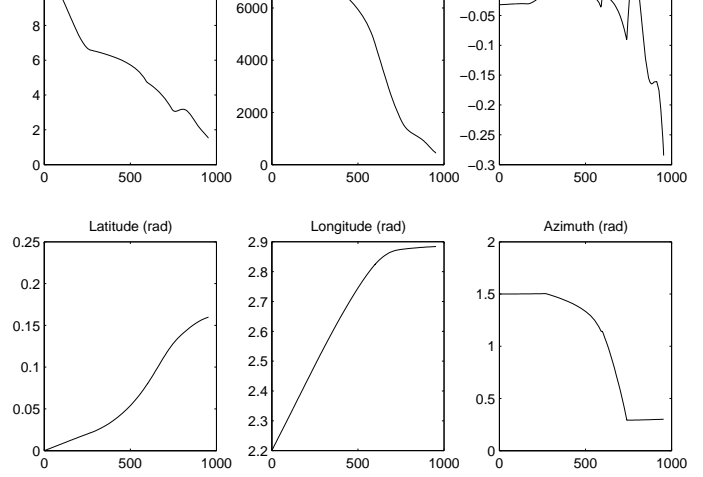


Fig. 2. Coordonnées d'état pour le problème 1.

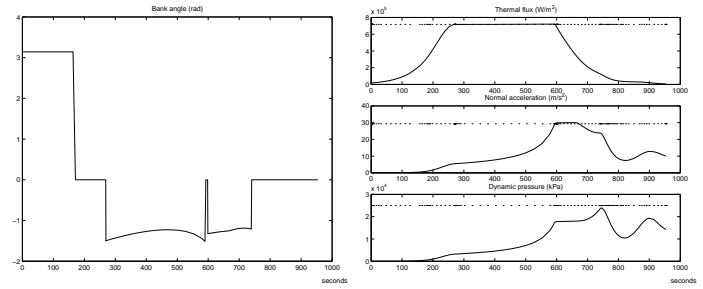


Fig. 3. Angle de gîte (contrôle), et contraintes sur l'état, pour le problème 1.

## RÉFÉRENCES

- [1] B. Bonnard, L. Faubourg, G. Launay and E. Trélat, « Optimal control with state constraints, and the space shuttle re-entry problem », *J. Dyn. Cont. Syst.*, Vol. 9, No. 2, pp. 155–199, 2003.
- [2] B. Bonnard, L. Faubourg and E. Trélat, « Optimal control of the atmospheric arc of a space shuttle and numerical simulations by multiple-shooting technique », to appear in M3AS.
- [3] B. Bonnard and E. Trélat, « Une approche géométrique du contrôle optimal de l'arc atmosphérique de la navette spatiale », *ESAIM :COCV*, Vol. 7, pp. 179–222, 2002.
- [4] R. Bulirsch, *Die Mehrzielmethode zur numerischen Lösung von nichtlinearen Randwertproblemen und Aufgaben der optimalen Steuerung* Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt (DLR), Oberpfaffenhofen, Germany, Report of the Carl-Cranz-Gesellschaft, 1971.
- [5] CNES, *Mécanique spatiale*, Cepadues Eds, 1993.
- [6] J.M. Coron, L. Praly, *Guidage en rentrée atmosphérique*, Rapport 415 CNES, 2000.
- [7] J. Harpold and C. Graves, « Shuttle entry guidance », *J. Astronautical Sciences*, Vol. 27, pp. 239–268, 1979.
- [8] P. Hiltmann, *Numerische Lösung von Mehrpunkt-Randwertproblemen und Aufgaben der optimalen Steuerung mit Steuerfunktionen ber endlichdimensionalen Räumen*, Dissertation, Fakultät für Mathematik und Informatik, Technische Universität München, 1990.
- [9] A. J. Krener and H. Schättler, « The structure of small-time reachable sets in low dimensions », *SIAM J. Cont. Optim.* (27), 1, pp. 120–147, 1989.
- [10] L. Pontriaguine, V. Boltianski, R. Gamkrelidze, and E. Michtchenko, *Théorie mathématique des processus optimaux*, Editions Mir, Moscou, 1974.
- [11] J. Stoer, R. Bulirsch, *Introduction to numerical analysis*, Springer-Verlag, Berlin, 1980.

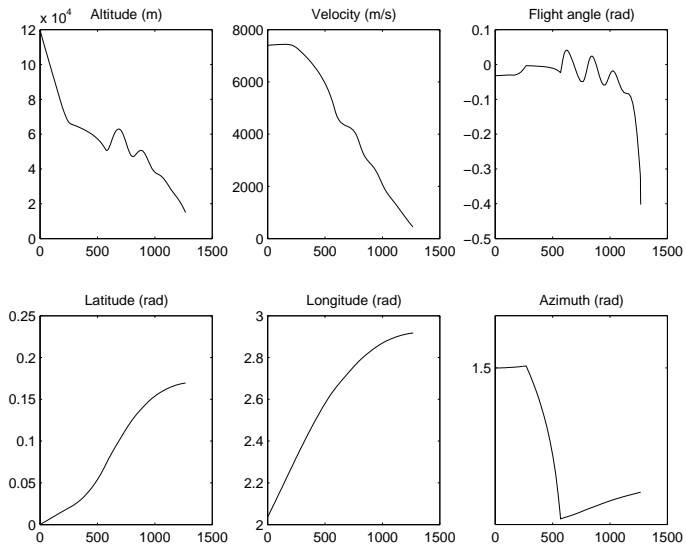


Fig. 4. Coordonnées d'état pour le problème 2.

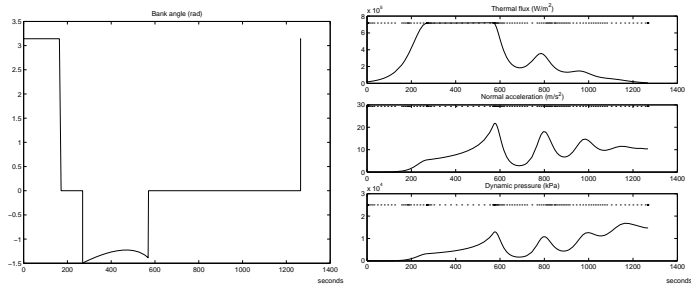


Fig. 5. Angle de gîte (contrôle) et contraintes sur l'état pour le problème 2.