Quadrature n° 110 (2018) 1-6

[Théorie du contrôle et Astronomie]

Points de Lagrange : un ticket gratuit vers les étoiles ?

par Emmanuel TRÉLAT*

On considère le problème de mécanique céleste appelé problème des trois corps restreint, dans lequel deux des trois corps sont très massifs (par exemple, le Soleil et la Terre) par rapport au troisième qui peut être un petit caillou, un astéroïde ou un engin spatial. Dans un repère tournant où les deux corps massifs sont fixes, les lois de Newton permettent de décrire l'évolution en temps du troisième corps (qui est de masse négligeable par rapport aux deux autres) par un système d'équations différentielles, ce corps étant soumis aux forces d'attraction des deux corps massifs et à la force centrifuge dans le repère tournant. On sait depuis longtemps que cette dynamique admet exactement cinq points d'équilibre qu'on appelle les points de Lagrange L1,. . . , L5 (voir figures 1 et 2), points en lesquels les trois forces se compensent exactement.

Historiquement, les points L1, L2 et L3 ont été découverts par Euler ; c'est la raison pour laquelle on les appelle parfois les points d'Euler. Lagrange a découvert les deux derniers (qu'on appelle aussi les points équilatéraux pour les raisons géométriques évidentes qu'on voit sur la figure 1).

Du point de vue mathématique et plus particulièrement de la théorie des systèmes dynamiques, les points d'équilibre sont intéressants car ils sont l'une des clés permettant de comprendre la dynamique globale du système.

Du point de vue pratique aussi, la propriété d'être un point d'équilibre est intéressante car elle offre la possibilité d'avoir une configuration fixe relativement à deux corps célestes et permet donc de concevoir des sites d'observation spatiale : en effet, si on place un objet exactement en un point de Lagrange, alors, en théorie du moins, il y reste.

On dit bien « en théorie », car alors se pose la question de la stabilité locale de ces points d'équilibre. Comme illustré sur la figure 1 où sont représentées des orbites (trajectoires possibles d'une pierre dans le système Soleil-Terre), il s'avère que les points L1, L2 et L3 sont naturellement instables alors que les points L4 et L5 sont stables. Cela veut dire que, en pratique, si on place un caillou au voisinage de l'un des points L4 ou L5, alors le caillou va se mettre à dériver mais va rester dans un tel voisinage. Au contraire, si on place un caillou juste à côté de l'un des points L1, L2 ou L3, alors le caillou ne reste pas au voisinage de ces points, comme on peut le voir sur la figure 1. Ces points sont dits instables. Bien sûr, en théorie, si le caillou est placé exactement au point L1 alors il ne bouge pas. Mais dans la pratique, la moindre perturbation (vent solaire, perturbations dues à d'autres corps célestes) le fera quitter le point L1, et donc dériver à plus ou moins long terme. La situation est similaire à celle d'un bâton que l'on poserait sur une table (ou au creux de sa main, sans bouger et sans tricher) : lorsque le bâton est exactement vertical, et en l'absence de perturbations, il reste vertical, mais cet équilibre est instable ; s'il y a

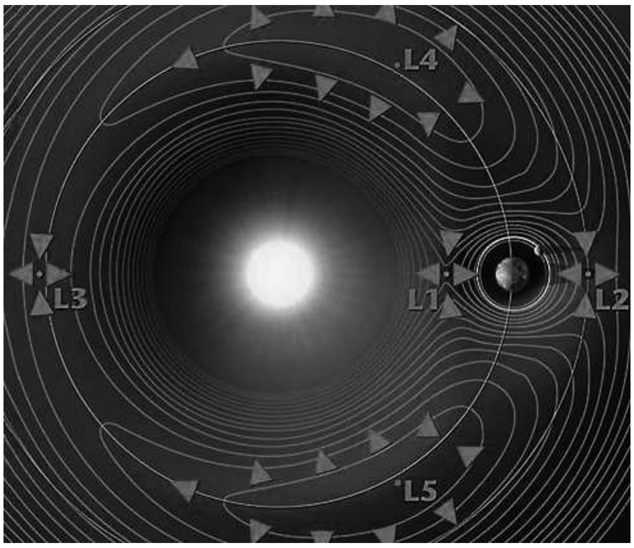

Figure 1. Les 5 points de Lagrange dans le système Soleil-Terre.

* Sorbonne Université, Laboratoire Jacques-Louis Lions

une quelconque perturbation, ou bien si le bâton n'est pas exactement vertical, alors il va tomber.

Ainsi, au premier abord, la propriété de stabilité autour de L4 et L5 peut sembler être une bonne nouvelle car si on place un engin spatial au voisinage de l'un de ces points alors il va y rester. Mais en fait elle ne l'est pas, et même loin de là : en effet, autour de ces points gravitent quantité de poussières ou de petits corps célestes qui se sont retrouvés « piégés » dans ce puits de potentiel qui, comme une cuvette, au fur et à mesure des hasards astronomiques, a retenu quantité de pierres et astéroïdes rendant ainsi impossible la présence d'un engin spatial dans cette zone à cause des inévitables chocs qui l'abîmeraient rapidement. Notons d'ailleurs que, dans le système Soleil-Jupiter, on observe de nombreux astéroïdes qui sont piégés autour des points L4 et L5 correspondants : ce sont les fameux *astéroïdes Troyens* (voir figure 2).

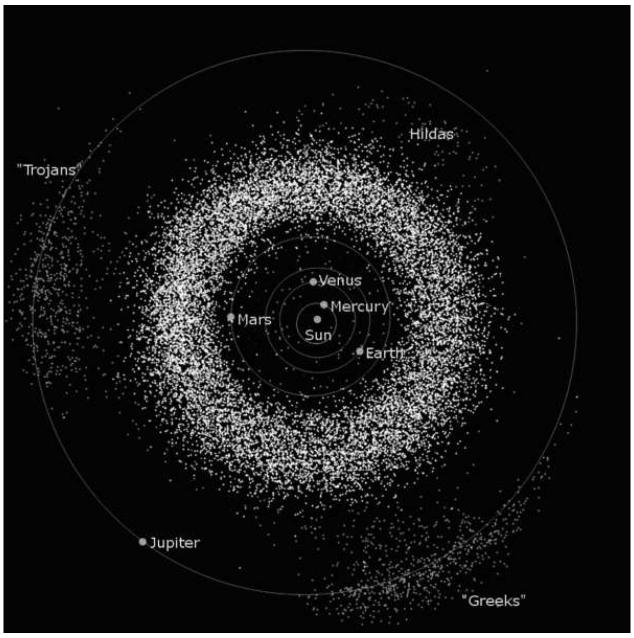

Figure 2. Astéroïdes troyens autour des points de Lagrange L4 et L5 dans le système Soleil-Jupiter.

L'instabilité des points L1, L2 et L3 est donc finalement une bonne nouvelle car ce sont des sites « naturellement propres » ! Comme on l'a vu, cette instabilité signifie toutefois que si un objet est placé juste à côté d'un tel point alors il ne va pas y rester. Il y a donc un (léger) prix à payer : pour garder l'objet au voisinage du point de Lagrange il faut faire appel à la théorie mathématique du contrôle et en particulier de la stabilisation. Pour l'expliquer, reprenons l'exemple du bâton qu'on essaie maintenant de maintenir en équilibre vertical sur un doigt ou au creux de sa main, quitte à devoir bouger un peu. L'équilibre vertical étant instable, la stabilisation consiste ici à s'autoriser à faire bouger légèrement sa main (on fait du contrôle) de manière à compenser de faibles variations autour de l'équilibre, et ainsi maintenir le bâton autour de son équilibre instable. Dans le cas d'un engin spatial au voisinage d'un point de Lagrange instable, l'idée est qu'une légère propulsion (fournie par exemple par des panneaux solaires) suffit à maintenir l'engin au voisinage d'un tel point. De manière générale, maintenir un engin au voisinage d'un point d'équilibre ne requiert en effet que peu d'énergie.

Les points de Lagrange L1 et L2 du système Soleil-Terre sont utilisés depuis longtemps par les agences spatiales [1] qui y placent de nombreux engins spatiaux.

Par exemple, autour du point L1 (qui se situe à environ 1.5 million de kilomètres de la Terre dans la direction du Soleil) gravite depuis 1996 le satellite SOHO [2] dont la mission est d'observer la surface du soleil, ses taches, les éruptions solaires, etc (voir figure 3).

Figure 3. Le satellite Soho (©ESA)

Autour du point L2 sera lancé (en principe en 2020) le successeur du télescope Hubble, appelé JWST [3] (James Webb Space Telescope, voir figure 4), dont la position sera idéale puisqu'il ne sera pas gêné par la lumière du soleil.

Et il y en a bien d'autres encore.

Dans le système Soleil-Terre, le point L3 n'est pas utilisé actuellement ; il se situe à l'opposé de la Terre par rapport au soleil, et nous est donc totalement invisible. Il est toutefois intéressant de noter que la série de science fiction « L'homme de la planète X » (voir figure 5), dans les années 60, avait imaginé qu'il existe au point L3 une planète (la planète X, qui nous est

1. Liste d'objets situés au voisinage d'un point de Lagrange : http://fr.wikipedia.org/wiki/Liste_d\%27objets_situés_à_un_point_de_Lagrange

2. Pour en savoir plus, voir http://www.educnet.education.fr/orbito/system/soho/soho00.htm

3. http://www.jwst.nasa.gov/

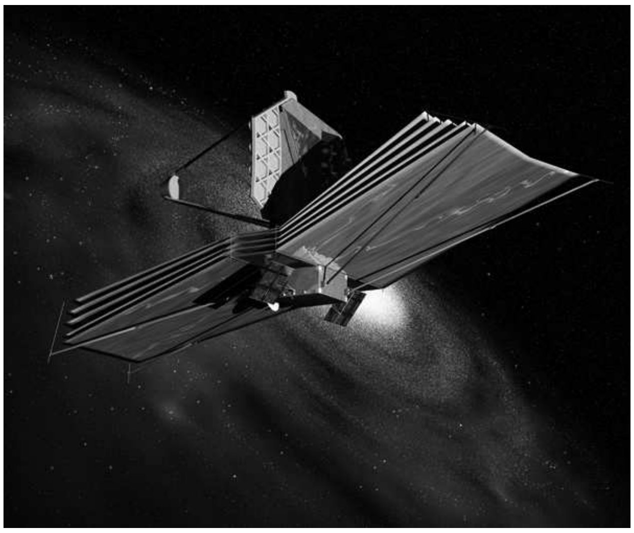

Figure 4. James Webb Space Telescope : représentation artistique. (Source : http://www.asc-csa.gc.ca/images/jwst-esa.jpg)

cachée), dont les habitants s’apprêteraient à nous envahir [4]

Figure 5. L’homme de la planète X.

Mentionnons maintenant une autre propriété fort intéressante autour des points de Lagrange. La théorie mathématique des systèmes dynamiques permet de démontrer qu’il existe, au voisinage de chacun des points de Lagrange, une multitude d’orbites périodiques et quasi-périodiques, les plus connues étant les orbites de halo (qui sont des déformations de cercles), mais on y trouve aussi toutes les orbites possibles de Lissajous : des orbites en huit, en triple huit, etc (voir figure 6). Ces propriétés surprenantes sont dues à la complexité du champ gravitationnel dans le problème à plusieurs corps. Il est tout à fait remarquable que, sans l’utilisation de mathématiques assez avancées, on serait incapable de détecter de telles orbites périodiques. Elles ouvrent un vaste champ de possibilités pour les missions spatiales.

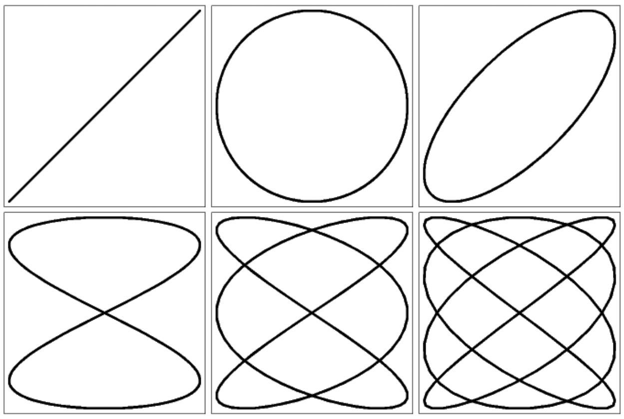

Figure 6. Courbes de Lissajous. (Source : simulation personnelle)

En fait, le satellite SOHO mentionné précédemment n’est pas placé trop près du point de Lagrange L1 dans le système Soleil-Terre, sinon l’alignement [Soleil – point L1 – Terre] engendrerait un intense bruit de fond solaire qui dégraderait les communications. Pour éviter cette zone d’interférences l’engin est en fait placé sur une orbite de halo (voir figure 7) : orbite périodique autour de L1 ayant une période d’environ 6 mois. Comme elle est instable sur le long terme, de temps en temps (environ tous les trois mois) de petites manoeuvres, peu coûteuses énergétiquement, sont nécessaires pour recaler Soho sur son orbite.

Il en a été de même pour le satellite WMAP, placé de 2001 à 2010 sur une orbite périodique autour du point L2 dans le système Soleil-Terre, et qui a été chargé d’étudier le fonds diffus cosmologique et de mesurer précisément le rayonnement fossile.

Il y a beaucoup d’autres engins spatiaux utilisant de telles orbites.

Les orbites périodiques au voisinage des points de Lagrange offrent en effet la possibilité à un engin spatial de se déplacer de manière gratuite, sans consommer de carburant. Elles permettent donc d’élaborer des lois de guidage globales à moindre coût : on peut fort bien utiliser au moins partiellement de telles trajectoires et ainsi économiser du carburant.

4. À ce sujet, voir http://www.objet-celeste.wikibis.com/anti-terre.php, voir aussi « L’homme de la planète X », http://us.imdb.com/title/tt0043778/

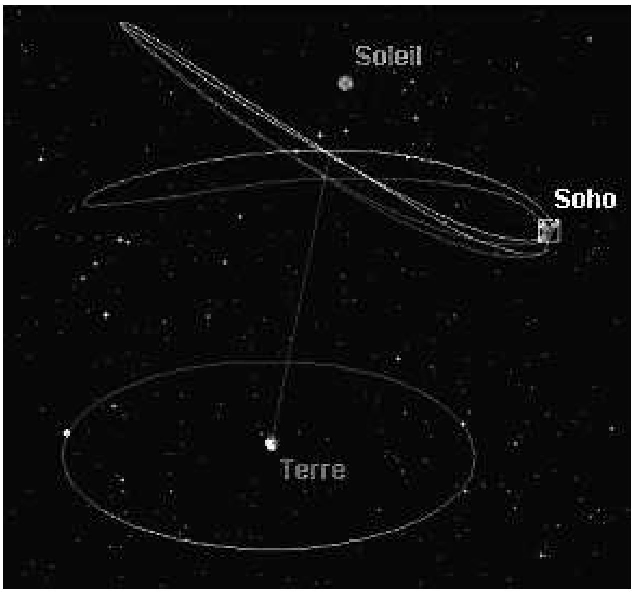

Figure 7. Orbite du satellite Soho (©ESA)

Les concepteurs de la mission Genesis ont utilisé ces propriétés pour propulser la sonde vers sa destination, et cela en utilisant un minimum de carburant : la sonde Genesis, lancée en 2001, avait pour objectif de collecter des particules de vent solaire. Elle a d'abord parcouru 1.5 million de kilomètres (en vert sur la figure 8), a ensuite été placée sur une orbite de halo autour du point de Lagrange L1 du système Terre-Soleil afin d'y collecter des particules de vent solaire pendant deux ans et demi. Elle est revenue sur Terre en septembre 2004 en transitant par le point de Lagrange L2 (trajectoire en bleu sur la figure 8), empruntant au passage ce que les dynamiciens appellent une « orbite hétérocline », effectuant ainsi, en tout, environ 30 millions de kilomètres avec une infime consommation énergétique.

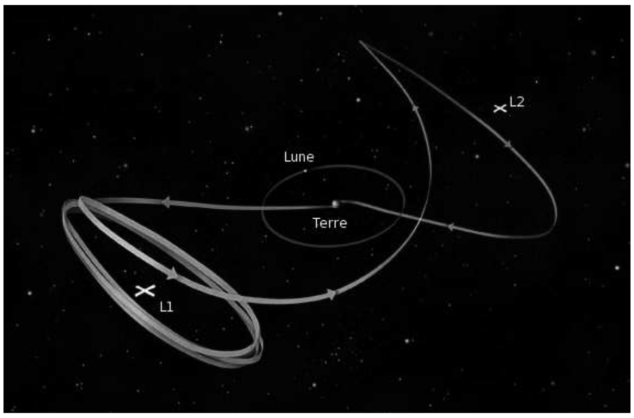

Figure 8. Trajectoire de la sonde Genesis (J. Cristiansen)

Venons-en au dernier point, peut-être le plus fascinant.

En utilisant la géométrie différentielle et la théorie des systèmes dynamiques, on découvre que, autour de chaque point de Lagrange, chacune des orbites périodiques engendre ce que les mathématiciens appellent des « variétés invariantes » (variétés stables et instables) : ce sont des genres de « tubes » engendrés par chacune des trajectoires périodiques (ou quasi-périodiques !) ayant la propriété que, si on y place un caillou, alors ce caillou reste dans le tube et y dérive selon un courant orienté, comme dans un tuyau de plomberie. Plus précisément, il se dirige « vers » la trajectoire périodique qui engendre le tube lorsque ce tube est une variété stable, et il s'éloigne de cette trajectoire périodique dans le cas d'une variété instable. Pour les mathématiciens qui connaissent la situation classique d'un « point-col », pour imaginer la situation on remplace ici le point d'équilibre par une trajectoire périodique.

Ces « tubes » se comportent en véritables « courants de gravité », similaires aux courants marins dans les océans : ils existent naturellement et on peut choisir de les utiliser (à condition de ne pas être pressé) pour économiser du carburant. Par exemple si on place une coquille de noix le long du Gulf-Stream, à l'ouest de l'Afrique, on sait qu'on va le retrouver quelques mois plus tard à l'ouest des côtes françaises. La même chose a lieu dans l'espace : notre « océan spatial » est strié par des courants engendrés par des effets gravitationnels, qu'on ne peut deviner que par des calculs mathématiques, et qui sont d'ailleurs bien mieux prédictibles et calculables que les courants marins puisqu'on est dans le vide et donc en quasi-absence de perturbations.

Figure 9. Les tubes invariants et courants de gravité [6]

Il existe ainsi dans notre système solaire tout un réseau de tubes invariants, de courants de gravité (voir figure 9) que, grâce à des calculs assez poussés mais tout à fait faisables, on est capable de cartographier, obtenant ainsi une véritable « carte de métro » du système solaire (voir figure 10).

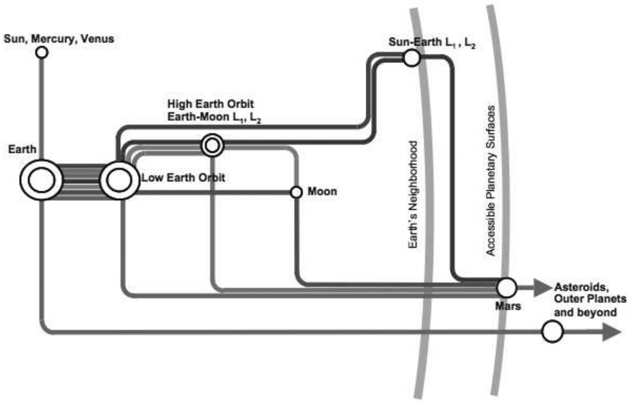

Figure 10. La carte de métro du système solaire.

Bien sûr, ces courants de gravité bougent sans arrêt et évoluent au fur et à mesure des éphémérides (notre soleil et ses planètes bougent en permanence !), mais cette structure « tournante » reste stable, calculable et prédictible.

Notons toutefois que, bien que ce métro soit totalement gratuit, il est très lent ! Pensons de nouveau à l'analogie avec les courants marins...

L'utilisation de tels courants est donc plutôt adaptée à des missions robotisées, ou alors il faut combiner leur effets d'entraînement à l'utilisation d'un moteur, de la même façon qu'on pourrait utiliser l'effet d'entraînement du Gulf-Stream en voilier ; mais si on dispose d'un bateau rapide à moteur et que la consommation d'énergie n'est pas un souci, on ne va certainement pas utiliser le courant...

Ainsi, en utilisant les points de Lagrange L1 et L2 du système Terre-Lune et les courants de gravité qu'ils engendrent, on sait aller de la Terre à la Lune de manière presque gratuite, à ceci près qu'il faut bien sûr au préalable s'arracher de l'attraction terrestre : inévitable dépense de carburant pour lancer un engin en orbite ; mais une fois l'engin placé dans un tube invariant, on sait l'emmener à proximité (environ 1500 km) de la surface de la Lune en 3 à 4 mois, sans aucune dépense de carburant. Bien sûr, on sait aller vers la Lune en 3 jours, mais cela se fait au prix d'une grande consommation énergétique, cela étant alors réservé aux missions humaines. Mais dans l'optique de futures « missions cargo », consistant à envoyer vers la Lune, avec l'assistance de robots, beaucoup de matériel pour construire une base lunaire, on peut fort bien utiliser les courants de gravité.

La conception de missions cargo vers la Lune a été l'objectif de la thèse de Maxime Chupin [7], en partenariat avec Ariane Group (les Mureaux). Nous avons utilisé les tubes invariants en forme de huit qui sont engendrés par des orbites de Lissajous en huit autour du point L1 du système Terre-Lune (voir figure 11). Ces tubes ont en effet la propriété remarquable de conserver cette structure en temps long, contrairement aux tubes engendrés par les orbites de halo qui deviennent rapidement chaotiques et donc inutilisables en temps long (figures 12 et 13).

7. https://www.ceremade.dauphine.fr/~chupin/

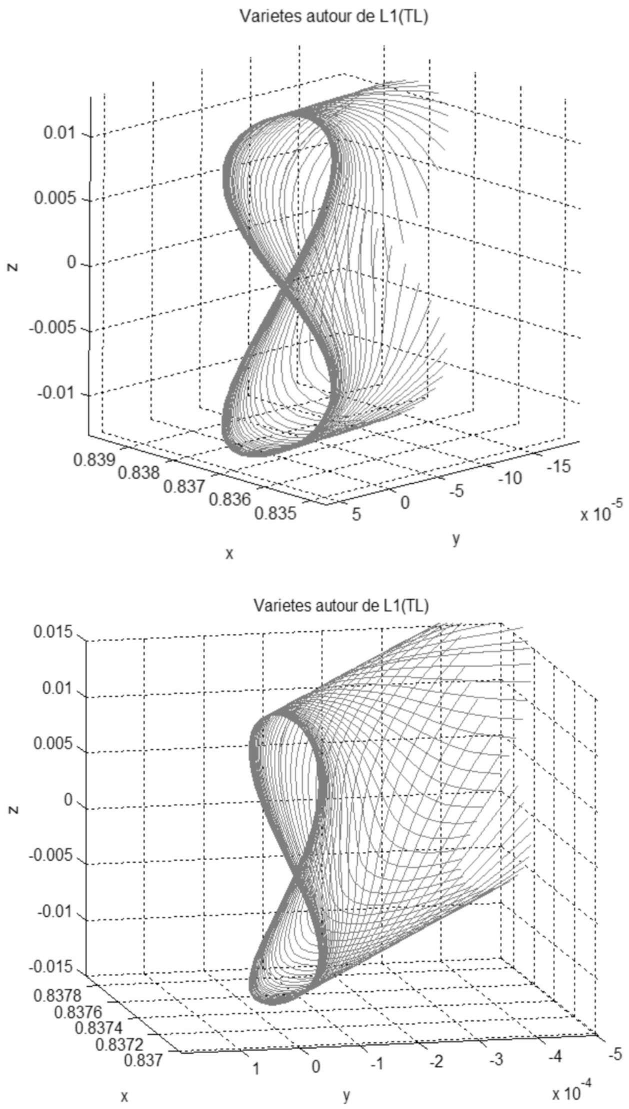

Figure 11. Orbites en forme de huit et leurs variétés invariantes (tubes en huit).

Il est probable que, dans un avenir proche, la communauté internationale s'accordera à construire une telle base lunaire (sans doute au pôle nord de la Lune), avec l'idée que cette base servira de point intermédiaire en vue de missions vers Mars.

De manière plus lointaine (cela se fera-t-il de notre vivant ?), on sait concevoir des missions interplanétaires lointaines, permettant d'aller visiter à très bas coût, par exemple, les satellites de Jupiter ou de Saturne. Le prix à payer toutefois est le temps de parcours, beaucoup plus long que si l'engin était mû par des moteurs.

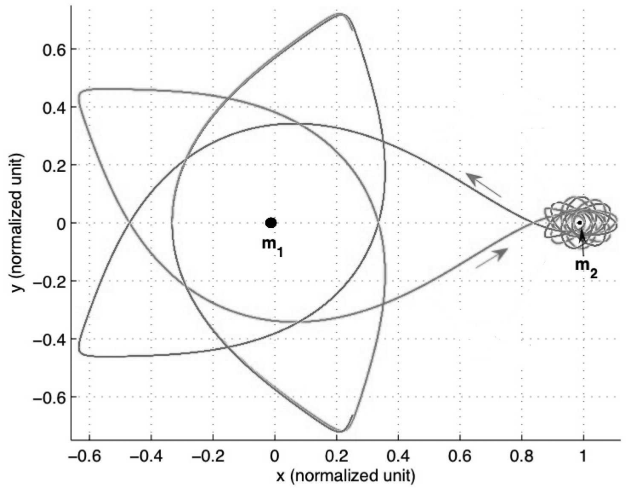

Figure 12. Orbites en 8 et leurs tubes, dans le système Terre(m1)–Lune(m2).

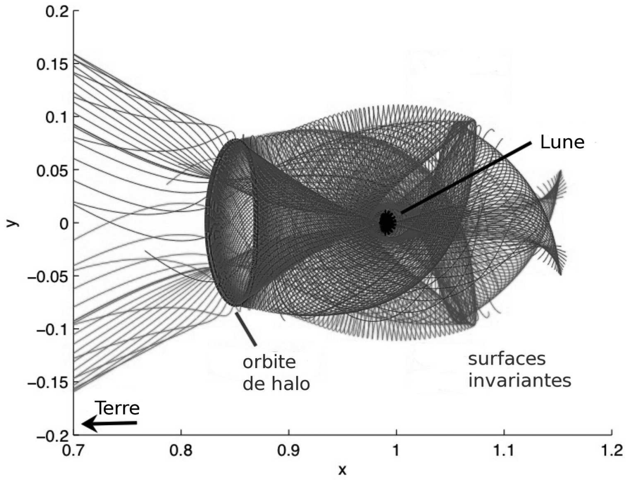

Figure 13. Orbites de halo et leurs tubes.

Des missions humaines lointaines ne pourront donc pas se contenter d'utiliser ce réseau de courants de gravité, mais nous pouvons envoyer des robots, qui seront alors capables d'aller explorer les confins du système solaire, et peut-être au-delà.