Analyse et contrôle de l'équation Korteweg-de Vries sur $[0, L]$

par

Ivonne Rivas
travail en collaboration avec

B-Y Zhang, E. Cerpa, E. Kramer, M. Usman, Ch. Jia

UPMC

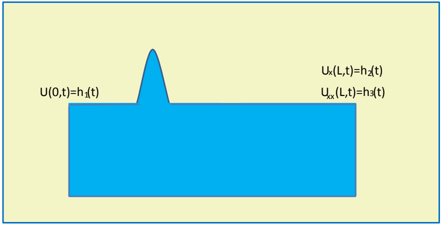
Outline

1. Motivations
2. Contrôlabité de l'équation KdV
3. Caractère bien posé
4. Questions ouvertes

Problème au bord non homogène pour KdV sur $[0, L]$

$$\begin{cases} u_t + u_x + u_{xxx} + uu_x = 0, \quad x \in (0, L), t \in \mathbb{R}^+ \\ u(x,0) = \phi(x), \\ u(0,t) = h_1(t),\ u_x(L,t) = h_2(t),\ u_{xx}(L,t) = h_3(t). \end{cases}$$

Ce modèle a été proposé par Colin et Ghidaglia en 2001,



Nous voulons étudier

Contrôlabilité exacte

$$\begin{cases} u_t + u_x + u_{xxx} + uu_x = 0, & x \in (0,L), t \in \mathbb{R}^+ \\ u(x,0) = \phi(x), \\ u(0,t) = h_1(t), \ u_x(L,t) = h_2(t), \ u_{xx}(L,t) = h_3(t). \end{cases} \tag{1}$$

Le système de contrôle de l'équation (1) est dit Exactement Contrôlable dans $L^2(0,L)$ si: soit $T > 0$, $y_0 \in L^2(0,L)$ et $y_T \in L^2(0,L)$ il existe des contrôles

$$(h_1, h_2, h_3) \in H^{\frac{1}{3}}(0,T) \times L^2(0,T) \times H^{-\frac{1}{3}}(0,T)$$

tels que l'unique solution $y \in C(0,T; L^2(0,L))$ satisfait

$$y(0,x) = y_0(x), \quad \text{et} \quad y(T,x) = y_T(x).$$

Existence de la Solution

Caractère bien posé

$$\begin{cases} u_t + u_x + u_{xxx} + uu_x = 0, \quad x \in (0, L), t \in \mathbb{R}^+ \\ u(x, 0) = \phi(x), \\ u(0, t) = h_1(t), \; u_x(L, t) = h_2(t), \; u_{xx}(L, t) = h_3(t). \end{cases} \tag{2}$$

Le problème au bord non homogène (2) est **bien posé** dans $H^s(0, L)$. Soit pour $s \in \mathbb{R}$,

$$\phi \in H^s(0, L)$$

$$(h_1, h_2, h_3) \in H^{\frac{s+1}{3}}(0, T) \times H^{\frac{s}{3}}(0, T) \times H^{\frac{s-1}{3}}(0, T)$$

Alors, il existe une unique solution

$$u \in C(0, T; H^s(0, L)) \cap L^2(0, T; H^{s+1}(0, L))$$

De plus,

$$(\phi, h_1, h_2, h_3) \to u$$

est continue dans les espaces correspondants.

Etat de l'art

Caractère bien posé

$$\begin{cases} u_t + u_x + u_{xxx} + uu_x = 0, \quad x \in (0,L), t \in \mathbb{R}^+ \\ u(x,0) = \phi(x), \\ u(0,t) = h_1(t),\ u_x(L,t) = h_2(t),\ u_{xx}(L,t) = h_3(t). \end{cases}$$

Colin, Ghidaglia 2001

- Existence locale d'une solution dans $H^1(0,L)$ pour

$$\phi \in H^1(0,L),\ h_1 \in C^1[0,T],\ h_2 \in C^1[0,T] \text{ et } h_3 \in C^1[0,T]$$

- Existence globale de la solution dans $H^1(0,L)$ pour des petites amplitudes des valeurs initiales et valeurs limites
- Existence locale d'une solution dans $L^2(0,L)$ pour $h_1 = h_2 = h_3 = 0$.

$$\begin{cases} u_t + u_x + u_{xxx} + uu_x = 0, \quad x \in (0, L), t \in \mathbb{R}^+ \\ u(x, 0) = \phi(x), \\ u(0, t) = h_1(t), \ u_x(L, t) = h_2(t), \ u_{xx}(L, t) = h_3(t). \end{cases}$$

I.R.,B.-Y. Zhang, M. Usman 2011

- ⋆ Globalement bien posé dans $H^s(0, L)$ pour $s \geq 0$ et des données avec petites amplitudes.
- ⋆ Décroissance exponentielle de la solution, si les données frontière ont une décroissance exponentielle aussi.

$$\begin{cases} u_t + u_x + u_{xxx} + uu_x = 0, \quad x \in (0, L), t \in \mathbb{R}^+ \\ u(x, 0) = \phi(x), \\ u(0, t) = h_1(t),\ u_x(L, t) = h_2(t),\ u_{xx}(L, t) = h_3(t). \end{cases}$$

I.R., B.-Y. Zhang, E. Kramer 2011

⋆ Localement bien posé dans $H^s(0, L)$ pour $s > -\frac{3}{4}$,

$$\phi \in H^s(0, L),$$

$$h_1 \in H^{\frac{s+1}{3}}(0, T),\ h_2 \in H^{\frac{s}{3}}(0, T) \text{ et } h_3 \in H^{\frac{s-1}{3}}(0, T).$$

$$
\begin{cases}
u_t + u_x + u_{xxx} + uu_x = 0, \quad x \in (0, L), t \in \mathbb{R}^+ \\
u(x, 0) = \phi(x), \\
u(0, t) = h_1(t), \; u_x(L, t) = h_2(t), \; u_{xx}(L, t) = h_3(t).
\end{cases} \tag{3}
$$

Théorèm I.R., Ch. Jia, B.-Y. Zhang 2013

Soit $-1 < s \leq 0$ et $r > 0$. Il existe un $T > 0$ et $0 < b < 1/2$ tels que pour tout $\phi \in H^s(0, L)$,

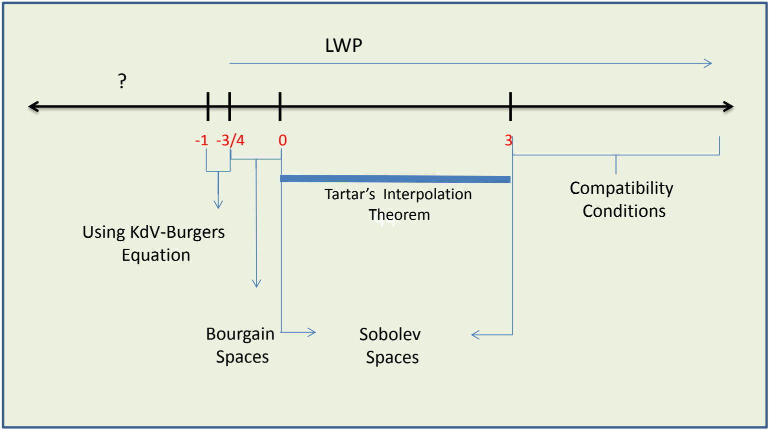
$$
h_1 \in H^{\frac{s+1}{3}}(0, T), \; h_2 \in H^{\frac{s}{3}}(0, T) \text{ et } h_3 \in H^{\frac{s-1}{3}}(0, T),
$$

satisfaisant

$$
\|\phi\|_{H^s(0,L)} + \|h_1\|_{H^{\frac{s+1}{3}}(0,T)} + \|h_2\|_{H^{\frac{s}{3}}(0,T)} + \|h_3\|_{H^{\frac{s-1}{3}}(0,T)} \leq r
$$

il existe une unique solution u de (3) telle que $\|u\|_{\mathcal{X}^{b,T}_{s,1/2}} < \infty$.

Caractère bien posé



$$\begin{cases} u_t + u_x + u_{xxx} + uu_x = 0, & x \in (0, L), t \in \mathbb{R}^+ \\ u(0,t) = h_1(t), \; u_x(L,t) = 0, \; u_{xx}(L,t) = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Guerrero et Guilleron

- Pour tout $L > 0$ et $u(x, 0) \in L^2(0, L)$, il existe $T > 0$ et $h_1 \in L^2(0, T)$ tels que la solution de (4)

$$u \in C(0, T; L^2(0, L) \cap L^2(0, T; H^1(0, L))$$

satisfait

$$u(x, T) = 0$$

$$
\begin{cases}
u_t + u_x + u_{xxx} + uu_x = 0, \quad x \in (0, L), t \in \mathbb{R}^+ \\
u(0,t) = 0, \; u_x(L,t) = h_2(t), \; u_{xx}(L,t) = 0.
\end{cases} \tag{5}
$$

Le système (5) est localement exactement contrôlable sur l'intervalle $[0, L]$ pour $L \notin \mathcal{F}$

$\mathcal{F} = \{L \in \mathbb{R}^+ : L^2 = -(a^2 + ab + b^2)$ pour $a, b \in \mathbb{C}$ et $\frac{e^a}{a^2} = \frac{e^b}{b^2} = \frac{e^{-(a+b)}}{(a+b)^2}\}$

Idée de démonstration de la contrôlabilité à droite

Étudier l'observabilité du systéme adjoint

$$\begin{cases} \varphi_t + \varphi_x + \varphi_{xxx} = 0, \quad x \in (0, L), t \in \mathbb{R}^+ \\ \varphi(0,t) = 0, \ \varphi_x(0,t) = 0, \varphi_{xx}(L,t) + \varphi(L,t) = 0. \\ \varphi(x,T) = \varphi_T(x) \end{cases}$$

- En utilisant des multiplicateurs, on obtient

$$\|\varphi_T\|^2_{L^2(0,L)} \leq \frac{1}{T}\|S(.)\varphi_T\|_{L^2((0,T),(0,L))} + \|\varphi_x(L,.)\|^2_{L^2(0,T)} + \|\varphi(L,.)\|^2_{L^2(0,T)}$$

- On veut montrer:

Inégalité d'observabilité

Pour tous $T > 0$ et $L \notin \mathcal{F}$. Il existe $C = C(L,T)$ tel que pour tout $\varphi(.,T) \in L^2(0,L)$

$$\|\varphi(.,T)\|^2_{L^2(0,L)} \leq C\|\varphi_x(L,.)\|^2_{L^2(0,T)}$$

$$\begin{cases} \varphi_t + \varphi_x + \varphi_{xxx} = 0, \quad x \in (0,L), t \in \mathbb{R}^+ \\ \varphi(L,t) = 0,\ \varphi_x(L,t) = 0, \varphi_{xx}(0,t) + \varphi(0,t) = 0. \\ \varphi(x,T) = \varphi_T(x) \end{cases}$$

Nous considérons le système

$$\begin{cases} \varphi_t + \varphi_x + \varphi_{xxx} = 0, \quad x \in (0,L), t \in \mathbb{R}^+ \\ \varphi_{xx}(0,t) = k_1,\ \varphi(L,t) = k_2,\ \varphi_x(L,t) = k_3 \\ \varphi(x,T) = \varphi_T(x) \end{cases} \tag{6}$$

Pour tout $\varphi_0 \in L^2(0,L)$ le système (6) admet une solution unique

$$\varphi \in C(0,T;L^2(0,L)) \cap L^2(0,T;H^1(0,L))$$

Théorème [I.R., B.Y. Zhang, E. Cerpa]

Pour tout $\varphi_0 \in L^2(0, L)$, la solution de (**??**)

$$\varphi \in C(0, T; L^2(0, L)) \cap L^2(0, T; H^1(0, L))$$

satisfait

$$\sup_{0<x<L} \|\partial_x^j \varphi(x, .)\|_{H^{\frac{1-j}{3}}(0,T)} \leq C_j \|\varphi_0\|_{L^2(0,L)}$$

pour $j = 0, 1, 2$.

$$\begin{cases} u_t + u_x + u_{xxx} + uu_x = 0, \quad x \in (0, L), t \in \mathbb{R}^+ \\ u(0,t) = 0, \; u_x(L,t) = 0, \; u_{xx}(L,t) = h_3(t). \end{cases} \tag{7}$$

Le système (7) est localement exactement contrôlable sur l'intervalle $[0, L]$ pour $L \notin \mathcal{N}$ où

$\mathcal{N} = \{L \in \mathbb{R}^* : L^2 = -(a^2 + ab + b^2), a, b \in \mathbb{C}$ et $ae^a = be^b = -(a+b)e^{-(a+b)}\}$

$$
\begin{cases} u_t + u_x + u_{xxx} + uu_x = 0, \quad x \in (0, L), t \in \mathbb{R}^+ \\ u(0,t) = 0, \; u_x(L,t) = h_2(t), \; u_{xx}(L,t) = h_3(t). \end{cases} \tag{8}
$$

[I.R., B.Y. Zhang, E. Cerpa]
Le système (8) est localement exactement contrôlable sur l'intervalle $[0, L]$ pour tous $L > 0$.

$$
\begin{cases} u_t + u_x + u_{xxx} + uu_x = 0, \quad x \in (0, L), t \in \mathbb{R}^+ \\ u(0, t) = h_1(t), \; u_x(L, t) = 0, \; u_{xx}(L, t) = h_3(t). \end{cases} \tag{9}
$$

[I.R., B.Y. Zhang, E. Cerpa]
Le système (9) est localement exactement contrôlable sur l'intervalle $[0, L]$ pour tous $L > 0$.

$$\begin{cases} u_t + u_x + u_{xxx} + uu_x = 0, \quad x \in (0,L), t \in \mathbb{R}^+ \\ u(0,t) = h_1(t), \; u_x(L,t) = h_2(t), \; u_{xx}(L,t) = 0. \end{cases} \tag{10}$$

[I.R., B.Y. Zhang, E. Cerpa]
Le système (10) est localement exactement contrôlable sur l'intervalle $[0, L]$ pour tous $L > 0$.

Questions ouvertes

$$\begin{cases} u_t + u_x + u_{xxx} + uu_x = 0, \quad x \in (0, L), t \in \mathbb{R}^+ \\ u(x, 0) = \phi(x), \\ u(0, t) = h_1(t),\ u_x(L, t) = h_2(t),\ u_{xx}(L, t) = h_3(t). \end{cases}$$

- Le système est-il globalement bien posé?
- Y a-t-il des sous-espaces où le système est localement contrôlable pour les "mauvais" L?
- Y a-t-il contrôlabilité globale?

Merci pour votre attention