

Contrôle frontière de systèmes paraboliques en dimension N d'espace

Guillaume OLIVE

I2M, Aix-Marseille Université

Journée Jeunes Contrôleurs

Jeudi 13 février 2014

- 1 Introduction
- 2 Une condition suffisante de contrôlabilité approchée en dimension N
- 3 Le tour du rectangle
 - Caractérisations de la contrôlabilité approchée
 - Un résultat de contrôlabilité à zéro
- 4 Commentaires et perspectives

- 1 Introduction
- 2 Une condition suffisante de contrôlabilité approchée en dimension N
- 3 Le tour du rectangle
 - Caractérisations de la contrôlabilité approchée
 - Un résultat de contrôlabilité à zéro
- 4 Commentaires et perspectives

Position du problème

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné. On note $Q_T = (0, T) \times \Omega$ et $\Sigma_T = (0, T) \times \partial\Omega$.

On cherche à obtenir des résultats de **contrôlabilité frontière en dimension $N > 1$** pour le **système de n équations** et à coefficients constants suivant :

$$\begin{cases} \partial_t y - \Delta y = Ay & \text{dans } Q_T, \\ y = 1_\gamma Bv & \text{sur } \Sigma_T, \\ y(0) = y_0 & \text{dans } \Omega. \end{cases} \quad (S)$$

- $y = (y_1, \dots, y_n)$ est l'état et y_0 la donnée initiale.
- $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ couple les équations.
- $v \in L^2(\Sigma_T)$ est le contrôle.
- $B \in \mathbb{R}^n$ localise **algébriquement** le contrôle.
- $\gamma \subset \partial\Omega$ localise **géométriquement** le contrôle.

Definition (Notions de contrôlabilité)

- Le système (S) est **contrôlable à zéro au temps $T > 0$** si, pour tout $y_0 \in H^{-1}(\Omega)^n$, il existe $v \in L^2(\Sigma_T)$ tel que $y(T) = 0$.
- Le système (S) est **approximativement contrôlable** si, pour tout $\epsilon > 0$, $y_0, y_f \in H^{-1}(\Omega)^n$, il existe $v \in L^2(\Sigma_T)$ tel que $\|y(T) - y_f\|_{H^{-1}} \leq \epsilon$.

Ici, la contrôlabilité à zéro implique la contrôlabilité approchée.

On introduit le système adjoint au système (\mathcal{S}) :

$$\begin{cases} -\partial_t z - \Delta z = A^* z & \text{dans } Q_T, \\ z = 0 & \text{sur } \Sigma_T, \\ z(T) = z_f \in H_0^1(\Omega)^n & \text{dans } \Omega. \end{cases} \quad (\mathcal{S}^*)$$

On rappelle alors que

Théorème (Dualité)

- Le système (\mathcal{S}) est contrôlable à zéro au temps T si, et seulement si, son système adjoint (\mathcal{S}^*) vérifie l'inégalité d'observabilité

$$\exists C_T > 0, \forall z_f \in H_0^1(\Omega)^n, \quad \|z(0)\|_{H_0^1(\Omega)^n}^2 \leq C_T^2 \int_0^T \|1_\gamma \partial_n B^* z(t)\|_{L^2(\partial\Omega)}^2 dt.$$

- Le système (\mathcal{S}) est approximativement contrôlable au temps T si, et seulement si, son système adjoint (\mathcal{S}^*) vérifie la propriété de continuation unique

$$\forall z_f \in H_0^1(\Omega)^n, \quad \left(1_\gamma \partial_n B^* z(t) = 0, \quad p.p. \ t \in (0, T) \right) \implies z_f = 0.$$

La meilleure des constantes C_T dans l'inégalité d'observabilité est le coût du contrôle.

Théorème (G. Lebeau et L. Robbiano (1995); A. Fursikov et O.Y. Imanuvilov (1996))

L'équation de la chaleur

$$\begin{cases} \partial_t y - \Delta y = \mathbf{1}_\omega v & \text{dans } Q_T, \\ y = 0 & \text{sur } \Sigma_T. \end{cases}$$

est contrôlable à zéro *pour tout temps* $T > 0$ et tout ouvert $\omega \subset \Omega$.

Théorème (G. Lebeau et L. Robbiano (1995); A. Fursikov et O.Y. Imanuvilov (1996))

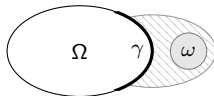
L'équation de la chaleur

$$\begin{cases} \partial_t y - \Delta y = \mathbf{1}_\omega v & \text{dans } Q_T, \\ y = 0 & \text{sur } \Sigma_T. \end{cases}$$

est contrôlable à zéro pour tout temps $T > 0$ et tout ouvert $\omega \subset \Omega$.

De plus, la **contrôlabilité frontière** s'en déduit :

$$\begin{cases} \partial_t y - \Delta y = 0 & \text{dans } Q_T, \\ y = \mathbf{1}_\gamma v & \text{sur } \Sigma_T. \end{cases}$$



Théorème (G. Lebeau et L. Robbiano (1995) ; A. Fursikov et O.Y. Imanuvilov (1996))

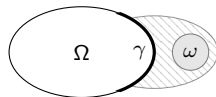
L'équation de la chaleur

$$\begin{cases} \partial_t y - \Delta y = \mathbf{1}_\omega v & \text{dans } Q_T, \\ y = 0 & \text{sur } \Sigma_T. \end{cases}$$

est contrôlable à zéro pour tout temps $T > 0$ et tout ouvert $\omega \subset \Omega$.

De plus, la contrôlabilité frontière s'en déduit :

$$\begin{cases} \partial_t y - \Delta y = 0 & \text{dans } Q_T, \\ y = \mathbf{1}_\gamma v & \text{sur } \Sigma_T. \end{cases}$$



Cette astuce ne marche plus pour les systèmes avec moins de contrôles que d'équations. En général, **pour les systèmes d'équations** :

- ① La contrôlabilité interne et la contrôlabilité frontière **ne sont pas équivalentes**.
E. Fernández-Cara, M. González-Burgos et L. de Teresa (2010).
- ② Il peut y avoir un **temps minimal de contrôle**.
F. Ammar-Khodja, A. Benabdallah, M. González-Burgos et L. de Teresa (2013).
- ③ Il peut y avoir des **conditions géométriques**.
F. Boyer et G. O. (2013).

Notons que ces situations complexes apparaissent déjà en dimension $N = 1$.

Regardons la contrôlabilité interne en dimension 1 du système 2×2 suivant :

$$\begin{cases} \partial_t y_1 - \partial_x^2 y_1 = 1_\omega v & \text{dans } Q_T, \\ \partial_t y_2 - \partial_x^2 y_2 = a_{21}(x)y_1 & \text{dans } Q_T, \end{cases} \quad (1)$$

Si ω intersecte $\mathcal{O}_2 = \text{supp}(a_{21})$ on a contrôlabilité à zéro. L. de Teresa (2000).

Regardons la contrôlabilité interne en dimension 1 du système 2×2 suivant :

$$\begin{cases} \partial_t y_1 - \partial_x^2 y_1 = 1_\omega v & \text{dans } Q_T, \\ \partial_t y_2 - \partial_x^2 y_2 = a_{21}(x)y_1 & \text{dans } Q_T, \end{cases} \quad (1)$$

Si ω intersecte $\mathcal{O}_2 = \text{supp}(a_{21})$ on a contrôlabilité à zéro. [L. de Teresa \(2000\)](#).

Prenons à présent

$$a_{21}(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right) 1_{\mathcal{O}_2}(x), \quad \mathcal{O}_2 = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right).$$

Considérons les deux configurations géométriques suivantes pour ω :

Le rôle de la géométrie de la zone de contrôle

Regardons la contrôlabilité interne en dimension 1 du système 2×2 suivant :

$$\begin{cases} \partial_t y_1 - \partial_x^2 y_1 = 1_\omega v & \text{dans } Q_T, \\ \partial_t y_2 - \partial_x^2 y_2 = a_{21}(x)y_1 & \text{dans } Q_T, \end{cases} \quad (1)$$

Si ω intersecte $\mathcal{O}_2 = \text{supp}(a_{21})$ on a contrôlabilité à zéro. [L. de Teresa \(2000\)](#).

Prenons à présent

$$a_{21}(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right) 1_{\mathcal{O}_2}(x), \quad \mathcal{O}_2 = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right).$$

Considérons les deux configurations géométriques suivantes pour ω :



Des comportements très différents (F. Boyer et G. O. (2013)) :

- Le système (1) n'est **PAS** approximativement contrôlable si Figure (a).
- Le système (1) est approximativement contrôlable si Figure (b).

Résultats en cours pour la contrôlabilité à zéro.

[F. Ammar-Khodja](#), [A. Benabdallah](#), [M. González-Burgos](#) et [L. de Teresa](#).

Techniques actuelles et **leurs restrictions** :

- **Inégalités de Carleman** : contrôle frontière ou contrôle interne sur un domaine disjoint du support du couplage.
- **Méthode des moments** : contrôle en dimension $N > 1$.
- **Technique de transmutation** (des ondes à la chaleur) : condition géométrique de contrôle.

Techniques actuelles et leurs restrictions :

- **Inégalités de Carleman** : contrôle frontière ou contrôle interne sur un domaine disjoint du support du couplage.
- **Méthode des moments** : contrôle en dimension $N > 1$.
- **Technique de transmutation** (des ondes à la chaleur) : condition géométrique de contrôle.

Par exemple, la contrôlabilité frontière de systèmes sur un rectangle n'entre pas dans ce cadre :

zone de contrôle



- 1 Introduction
- 2 Une condition suffisante de contrôlabilité approchée en dimension N
- 3 Le tour du rectangle
 - Caractérisations de la contrôlabilité approchée
 - Un résultat de contrôlabilité à zéro
- 4 Commentaires et perspectives

Rappelons tout d'abord que la **condition de Kalman** $\text{rang}(B|AB|A^2B|\cdots|A^{n-1}B) = n$ est **nécessaire** à la contrôlabilité du système (S) .

Rappelons tout d'abord que la condition de Kalman $\text{rang}(B|AB|A^2B|\dots|A^{n-1}B) = n$ est nécessaire à la contrôlabilité du système (S) .

On note $\{-\lambda_k\}_k$ et $\{\theta_i\}_i$ les valeurs propres distinctes de Δ avec condition de Dirichlet homogène et de A^* . Les valeurs propres de l'opérateur $\Delta + A^*$ sont donc $\{-\lambda_k + \theta_i\}_{k,i}$.

Attention résonance : avec ces notations on peut avoir pour certains indices

$$-\lambda_k + \theta_i = -\lambda_{k'} + \theta_{i'}$$

Rappelons tout d'abord que la condition de Kalman $\text{rang}(B|AB|A^2B|\dots|A^{n-1}B) = n$ est nécessaire à la contrôlabilité du système (S) .

On note $\{-\lambda_k\}_k$ et $\{\theta_i\}_i$ les valeurs propres distinctes de Δ avec condition de Dirichlet homogène et de A^* . Les valeurs propres de l'opérateur $\Delta + A^*$ sont donc $\{-\lambda_k + \theta_i\}_{k,i}$.

Attention résonance : avec ces notations on peut avoir pour certains indices

$$-\lambda_k + \theta_i = -\lambda_{k'} + \theta_{i'}$$

On rappelle que :

- En **dimension $N = 1$** le système

$$\begin{cases} \partial_t y - \partial_{x_1}^2 y = Ay & \text{dans } (0, T) \times (0, X_1), \\ y(t, 0) = Bv(t), \quad y(t, X_1) = 0 & \text{sur } (0, T). \end{cases}$$

est contrôlable à zéro au temps $T > 0$ **si, et seulement si**, on a la condition de Kalman et

$$-\lambda_k + \theta_i \neq -\lambda_{k'} + \theta_{i'}, \quad \text{pour tout } (k, i) \neq (k', i').$$

E. Fernández-Cara, M. González-Burgos et L. de Teresa (2010) ; F. Ammar-Khodja, A. Benabdallah, M. González-Burgos et L. de Teresa (2011).

Rappelons tout d'abord que la condition de Kalman $\text{rang}(B|AB|A^2B|\dots|A^{n-1}B) = n$ est nécessaire à la contrôlabilité du système (S) .

On note $\{-\lambda_k\}_k$ et $\{\theta_i\}_i$ les valeurs propres distinctes de Δ avec condition de Dirichlet homogène et de A^* . Les valeurs propres de l'opérateur $\Delta + A^*$ sont donc $\{-\lambda_k + \theta_i\}_{k,i}$.

Attention résonance : avec ces notations on peut avoir pour certains indices

$$-\lambda_k + \theta_i = -\lambda_{k'} + \theta_{i'}$$

On rappelle que :

- En **dimension $N = 1$** le système

$$\begin{cases} \partial_t y - \partial_{x_1}^2 y = Ay & \text{dans } (0, T) \times (0, X_1), \\ y(t, 0) = Bv(t), \quad y(t, X_1) = 0 & \text{sur } (0, T). \end{cases}$$

est contrôlable à zéro au temps $T > 0$ **si, et seulement si**, on a la condition de Kalman et

$$-\lambda_k + \theta_i \neq -\lambda_{k'} + \theta_{i'}, \quad \text{pour tout } (k, i) \neq (k', i').$$

E. Fernández-Cara, M. González-Burgos et L. de Teresa (2010); F. Ammar-Khodja, A. Benabdallah, M. González-Burgos et L. de Teresa (2011).

- En **dimension $N > 1$** , il existe seulement des **résultats partiels** sous la **condition géométrique de contrôle sur γ** et avec une **structure sur A** (qui évite les résonances).
F. Alabau-Boussouira et M. Léautaud (2012); F. Alabau-Boussouira (2013).

En fait, la condition de non-résonance

$$-\lambda_k + \theta_i \neq -\lambda_{k'} + \theta_{i'}, \quad \text{pour tout } (k, i) \neq (k', i'), \quad (2)$$

est une condition suffisante de contrôlabilité approchée **en dimension quelconque** :

Théorème (G. O. (2013))

Sous la condition de Kalman, si (2) est vérifiée, alors le système

$$\begin{cases} \partial_t y - \Delta y = Ay & \text{dans } Q_T, \\ y = 1_\gamma Bv & \text{sur } \Sigma_T, \end{cases}$$

*est **approximativement contrôlable**.*

- C'est donc une **condition en dimension N** quelconque et valable **sans hypothèse de géométrie sur γ** .
- **Elle n'est pas nécessaire**, sauf cas très particulier de la dimension $N = 1$ et $\text{card } \gamma = 1$.
- La preuve utilise le théorème de Fattorini :

Théorème de Fattorini

On rappelle que la contrôlabilité approchée du système (\mathcal{S}) est équivalente à une propriété de continuation unique du système adjoint (\mathcal{S}^*). On a en fait mieux :

Théorème (H.O. Fattorini (1966))

Sous certaines hypothèses convenables sur les opérateurs $\mathcal{A} : \mathcal{D}(\mathcal{A}) \subset H \rightarrow H$ et $\mathcal{C} : \mathcal{D}(\mathcal{C}) \subset H \rightarrow U$, la propriété de continuation unique

$$\forall z_f \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^*), \quad \left(\mathcal{C}^* z(t) = 0 \text{ p.p. } t \in (0, +\infty) \right) \implies z_f = 0,$$

où z est la solution du système adjoint, est équivalente à :

$$\ker(s - \mathcal{A}^*) \cap \ker \mathcal{C}^* = \{0\}, \quad \forall s \in \mathbb{C}.$$

- ① En dimension finie, cela donne une caractérisation équivalente à la condition de Kalman :

$$\ker(s - A^*) \cap \ker B^* = \{0\}, \quad \forall s \in \mathbb{C}. \quad (\text{Fat}_{alg})$$

- ② Pour la contrôlabilité approchée de l'équation de la chaleur par le bord, cela s'écrit

$$\forall \phi \in \ker(s - \Delta), \quad \partial_n \phi = 0 \text{ sur } \gamma \implies \phi = 0, \quad \forall s \in \mathbb{C}. \quad (\text{Fat}_{diff})$$

R. C. MacCamy, V. J. Mizel et T. I. Seidman (1968).

Preuve du théorème

On va montrer que, pour toute valeur propre s qui s'écrit **de façon unique** $s = -\lambda_l + \theta_l$, on a

$$\forall \Phi \in \ker(s - (\Delta + A^*)), \quad \partial_n B^* \Phi = 0 \text{ sur } \gamma \implies \Phi = 0.$$

Cela prouvera le théorème puisqu'on suppose que **toutes les valeurs propres sont ainsi**.

Preuve du théorème

On va montrer que, pour toute valeur propre s qui s'écrit de façon unique $s = -\lambda_l + \theta_i$, on a

$$\forall \Phi \in \ker(s - (\Delta + A^*)), \quad \partial_n B^* \Phi = 0 \text{ sur } \gamma \implies \Phi = 0.$$

Cela prouvera le théorème puisqu'on suppose que toutes les valeurs propres sont ainsi.

Par hypothèse Φ s'écrit

$$\Phi = \sum_{j,m} \alpha_{j,m} V_j \phi_m,$$

où $V_1, \dots, V_J \in \mathbb{R}^n$ (resp. $\phi_1, \dots, \phi_M \in H_0^1$) est une base de $\ker(\theta_i - A^*)$ (resp. $\ker(-\lambda_l - \Delta)$).

Preuve du théorème

On va montrer que, pour toute valeur propre s qui s'écrit de façon unique $s = -\lambda_l + \theta_i$, on a

$$\forall \Phi \in \ker(s - (\Delta + A^*)), \quad \partial_n B^* \Phi = 0 \text{ sur } \gamma \implies \Phi = 0.$$

Cela prouvera le théorème puisqu'on suppose que toutes les valeurs propres sont ainsi.

Par hypothèse Φ s'écrit

$$\Phi = \sum_{j,m} \alpha_{j,m} V_j \phi_m,$$

où $V_1, \dots, V_J \in \mathbb{R}^n$ (resp. $\phi_1, \dots, \phi_M \in H_0^1$) est une base de $\ker(\theta_i - A^*)$ (resp. $\ker(-\lambda_l - \Delta)$).

On a donc

$$B^* \left(\sum_j \beta_j V_j \right) = 0 \text{ sur } \gamma, \text{ en ayant noté } \beta_j = \partial_n \left(\sum_m \alpha_{j,m} \phi_m \right).$$

Preuve du théorème

On va montrer que, pour toute valeur propre s qui s'écrit de façon unique $s = -\lambda_l + \theta_i$, on a

$$\forall \Phi \in \ker(s - (\Delta + A^*)), \quad \partial_n B^* \Phi = 0 \text{ sur } \gamma \implies \Phi = 0.$$

Cela prouvera le théorème puisqu'on suppose que toutes les valeurs propres sont ainsi.

Par hypothèse Φ s'écrit

$$\Phi = \sum_{j,m} \alpha_{j,m} V_j \phi_m,$$

où $V_1, \dots, V_J \in \mathbb{R}^n$ (resp. $\phi_1, \dots, \phi_M \in H_0^1$) est une base de $\ker(\theta_i - A^*)$ (resp. $\ker(-\lambda_l - \Delta)$).

On a donc

$$B^* \left(\sum_j \beta_j V_j \right) = 0 \text{ sur } \gamma, \text{ en ayant noté } \beta_j = \partial_n \left(\sum_m \alpha_{j,m} \phi_m \right).$$

Or, puisque $\sum_j \beta_j V_j \in \ker(\theta_i - A^*)$ on peut utiliser (*Fat_{alg}*) afin d'obtenir

$$\beta_j = \partial_n \left(\sum_m \alpha_{j,m} \phi_m \right) = 0 \text{ sur } \gamma, \quad \forall j.$$

Preuve du théorème

On va montrer que, pour toute valeur propre s qui s'écrit de façon unique $s = -\lambda_l + \theta_i$, on a

$$\forall \Phi \in \ker(s - (\Delta + A^*)), \quad \partial_n B^* \Phi = 0 \text{ sur } \gamma \implies \Phi = 0.$$

Cela prouvera le théorème puisqu'on suppose que toutes les valeurs propres sont ainsi.

Par hypothèse Φ s'écrit

$$\Phi = \sum_{j,m} \alpha_{j,m} V_j \phi_m,$$

où $V_1, \dots, V_J \in \mathbb{R}^n$ (resp. $\phi_1, \dots, \phi_M \in H_0^1$) est une base de $\ker(\theta_i - A^*)$ (resp. $\ker(-\lambda_l - \Delta)$).

On a donc

$$B^* \left(\sum_j \beta_j V_j \right) = 0 \text{ sur } \gamma, \text{ en ayant noté } \beta_j = \partial_n \left(\sum_m \alpha_{j,m} \phi_m \right).$$

Or, puisque $\sum_j \beta_j V_j \in \ker(\theta_i - A^*)$ on peut utiliser (*Fat_{alg}*) afin d'obtenir

$$\beta_j = \partial_n \left(\sum_m \alpha_{j,m} \phi_m \right) = 0 \text{ sur } \gamma, \quad \forall j.$$

Maintenant, sachant que $\sum_m \alpha_{j,m} \phi_m \in \ker(-\lambda_l - \Delta)$, avec (*Fat_{diff}*) on obtient finalement

$$\alpha_{j,m} = 0, \quad \forall m, j.$$



En guise d'application, considérons le système

$$\begin{cases} \partial_t y - \Delta y = Ay & \text{dans } Q_T, \\ y = 1_\gamma Bv & \text{sur } \Sigma_T, \end{cases}$$

avec la structure

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n-1} & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On a

$$\sigma(A) = \{0\} \implies \text{pas de résonance.}$$

Ainsi, quelles que soient **la dimension N** et **la zone de contrôle γ** , ce système est approximativement contrôlable **si, et seulement si**, on a (condition de Kalman) :

$$a_{i,i-1} \neq 0, \quad \forall i \in \llbracket 2, n \rrbracket.$$

- 1 Introduction
- 2 Une condition suffisante de contrôlabilité approchée en dimension N
- 3 **Le tour du rectangle**
 - Caractérisations de la contrôlabilité approchée
 - Un résultat de contrôlabilité à zéro
- 4 Commentaires et perspectives

Désormais, on autorise à se produire la situation

$$-\lambda_k + \theta_i = -\lambda_{k'} + \theta_{i'}, \quad \text{pour certains } (k, i) \neq (k', i').$$

Désormais, on autorise à se produire la situation

$$-\lambda_k + \theta_i = -\lambda_{k'} + \theta_{i'}, \quad \text{pour certains } (k, i) \neq (k', i').$$

Pour la contrôlabilité approchée, il faut alors vérifier une propriété de continuation unique sur les paquets de fonctions propres correspondant à ces cas de résonance (non explicite en général).

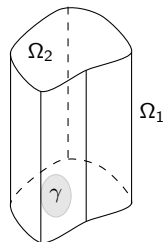
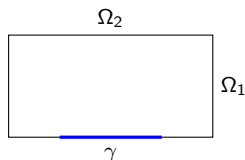
Désormais, on autorise à se produire la situation

$$-\lambda_k + \theta_i = -\lambda_{k'} + \theta_{i'}, \quad \text{pour certains } (k, i) \neq (k', i').$$

Pour la contrôlabilité approchée, il faut alors vérifier une propriété de continuation unique sur les paquets de fonctions propres correspondant à ces cas de résonance (non explicite en général). On va discuter selon la zone de contrôle γ les propriétés de contrôlabilité du système

$$\begin{cases} \partial_t y - \Delta y = Ay & \text{dans } Q_T, \\ y = 1_\gamma Bv & \text{sur } \Sigma_T, \end{cases}$$

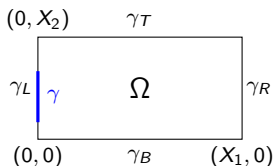
pour la géométrie suivante :



- 1 Introduction
- 2 Une condition suffisante de contrôlabilité approchée en dimension N
- 3 **Le tour du rectangle**
 - **Caractérisations de la contrôlabilité approchée**
 - Un résultat de contrôlabilité à zéro
- 4 Commentaires et perspectives

Contrôlabilité approchée sur une face d'un rectangle

On suppose que γ est contenu dans une seule face du rectangle :



Théorème (G. O. (2013))

Pour tout $\gamma \subset \gamma_L$, le système 2D

$$\begin{cases} \partial_t y - \Delta y = Ay & \text{dans } Q_T, \\ y = 1_\gamma Bv & \text{sur } \Sigma_T, \end{cases}$$

est approximativement contrôlable si, et seulement si, le système 1D suivant l'est également

$$\begin{cases} \partial_t y - \partial_{x_1}^2 y = Ay & \text{dans } (0, T) \times (0, X_1), \\ y(t, 0) = Bv(t), \quad y(t, X_1) = 0 & \text{sur } (0, T). \end{cases} \quad (3)$$

On rappelle qu'on sait caractériser la contrôlabilité du système (3).

Idée de projeter sur la dimension 1. H.O. Fattorini (1975).

Suite à ce théorème, on voit que :

- ④ La condition spectrale n'est donc pas nécessaire. Par exemple,

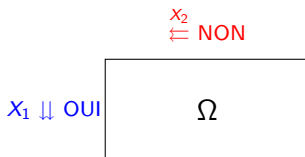
$$-\lambda_k^{(0,\pi)} - \lambda_4^{(0,1)} + 0 = -\lambda_k^{(0,\pi)} - \lambda_5^{(0,1)} + 9\pi^2.$$

Suite à ce théorème, on voit que :

- 1 La condition spectrale n'est donc pas nécessaire. Par exemple,

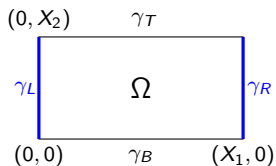
$$-\lambda_k^{(0,\pi)} - \lambda_4^{(0,1)} + 0 = -\lambda_k^{(0,\pi)} - \lambda_5^{(0,1)} + 9\pi^2.$$

- 2 Le système peut être contrôlable dans une direction mais pas dans l'autre :



Contrôlabilité approchée sur deux faces d'un rectangle

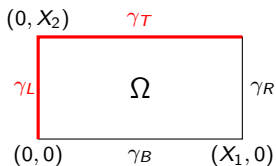
On suppose maintenant que γ est contenu dans deux faces du rectangle :



- Cas $\gamma \subset \gamma_L \cup \gamma_R$: situation analogue au cas précédent.

Contrôlabilité approchée sur deux faces d'un rectangle

On suppose maintenant que γ est contenu dans deux faces du rectangle :



- Cas $\gamma \subset \gamma_L \cup \gamma_R$: situation analogue au cas précédent.
- Considérons maintenant le cas $\gamma \subset \gamma_L \cup \gamma_T$:

Théorème (G. O. (2013))

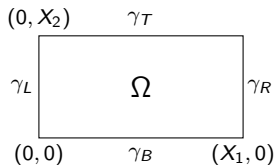
Sous la condition de Kalman, si

$$\gamma \cap \gamma_L \neq \emptyset, \quad \gamma \cap \gamma_T \neq \emptyset,$$

alors le système de 2 équations

$$\begin{cases} \partial_t y - \Delta y = Ay & \text{dans } Q_T, \\ y = 1_\gamma Bv & \text{sur } \Sigma_T, \end{cases}$$

est approximativement contrôlable.



Passons au cas général :

Théorème (M. González-Burgos et G. O. (2013))

Le système 2D

$$\begin{cases} \partial_t y - \Delta y = Ay & \text{dans } Q_T, \\ y = 1_\gamma Bv & \text{sur } \Sigma_T, \end{cases}$$

est approximativement contrôlable, **si et seulement si**,

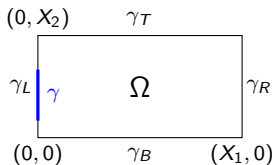
$$\text{rang} [A_k : C_k(\gamma)]_{nk^2} = nk^2, \quad \forall k \geq 1.$$

- La matrice A_k dépend de A et des valeurs propres du Laplacien 2D.
- La matrice $C_k(\gamma)$ dépend de B et de γ .
- $[A_k : C_k(\gamma)]_{nk^2}$ désigne la matrice de Kalman entre A_k et $C_k(\gamma)$.

- 1 Introduction
- 2 Une condition suffisante de contrôlabilité approchée en dimension N
- 3 **Le tour du rectangle**
 - Caractérisations de la contrôlabilité approchée
 - **Un résultat de contrôlabilité à zéro**
- 4 Commentaires et perspectives

Contrôlabilité à zéro sur une face d'un rectangle

On suppose que γ est contenu dans une seule face du rectangle :



Théorème (A. Benabdallah, F. Boyer, M. González-Burgos et G. O. (2013))

Pour tout $\gamma \subset \gamma_L$, le système 2D

$$\begin{cases} \partial_t y - \Delta y = Ay & \text{dans } Q_T, \\ y = 1_\gamma Bv & \text{sur } \Sigma_T, \end{cases}$$

est **contrôlable à zéro** si, et seulement si, le système 1D suivant l'est également

$$\begin{cases} \partial_t y - \partial_{x_1}^2 y = Ay & \text{dans } (0, T) \times (0, X_1), \\ y(t, 0) = Bv(t), \quad y(t, X_1) = 0 & \text{sur } (0, T). \end{cases}$$

La grande difficulté est le cas $\gamma \subsetneq \gamma_L$ (analogie avec l'équation de la chaleur).

La preuve repose sur 3 points essentiels :

- 1 Idée de **projeter sur la dimension 1**.
- 2 **Méthode de Lebeau-Robbiano** pour le cas $\gamma \subsetneq \gamma_L$.
- 3 Estimation du **coût du contrôle 1D** :

Théorème (A. Benabdallah, F. Boyer, M. González-Burgos et G. O. (2013))

Le **coût du contrôle** $C_T^{X_1}$ du système 1D

$$\begin{cases} \partial_t y - \partial_{x_1}^2 y = Ay & \text{dans } (0, T) \times (0, X_1), \\ y(t, 0) = Bv(t), \quad y(t, X_1) = 0 & \text{sur } (0, T), \end{cases}$$

est borné par

$$C_T^{X_1} \leq C e^{C/T}.$$

La preuve utilise la méthode des moments.

On introduit des espaces à variables séparées tronqués à la J -ième fréquence dans la direction X_2 :

$$E_J = \left\{ \sum_{j=1}^J u_j \phi_j^{X_2} \mid u_j \in H_0^1(0, X_1)^n \right\} \subset H_0^1(\Omega)^n.$$

On va travailler dans les espaces "duaux"

$$E_J^{-1} = -\Delta E_J \subset H^{-1}(\Omega)^n.$$

On note $P_{E_J^{-1}}$ la projection orthogonale sur E_J^{-1} .

"Relèvement" de la dimension 1

Soit $z_f = \sum_{j=1}^J u_j \phi_j^{x_2} \in E_J$. La solution correspondante z du système adjoint s'écrit donc

$$z(t, x_1, x_2) = \sum_{j=1}^J e^{-(T-t)\lambda_j^{x_2}} U_j(t, x_1) \phi_j^{x_2}(x_2),$$

où U_j est la solution du système adjoint 1D correspondant à u_j .

"Relèvement" de la dimension 1

Soit $z_f = \sum_{j=1}^J u_j \phi_j^{x_2} \in E_J$. La solution correspondante z du système adjoint s'écrit donc

$$z(t, x_1, x_2) = \sum_{j=1}^J e^{-(T-t)\lambda_j^{x_2}} U_j(t, x_1) \phi_j^{x_2}(x_2),$$

où U_j est la solution du système adjoint 1D correspondant à u_j . **Par hypothèse**, on a

$$\|U_j(0)\|_{H_0^1(0, x_1)^n}^2 \leq (C_T^{x_1})^2 \int_0^T |B^* \partial_{x_1} U_j(t, 0)|^2 dt,$$

"Relèvement" de la dimension 1

Soit $z_f = \sum_{j=1}^J u_j \phi_j^{X_2} \in E_J$. La solution correspondante z du système adjoint s'écrit donc

$$z(t, x_1, x_2) = \sum_{j=1}^J e^{-(T-t)\lambda_j^{X_2}} U_j(t, x_1) \phi_j^{X_2}(x_2),$$

où U_j est la solution du système adjoint 1D correspondant à u_j . Par hypothèse, on a

$$e^{-2T\lambda_j^{X_2}} \|U_j(0)\|_{H_0^1(0, X_1)^n}^2 \leq (C_T^{X_1})^2 \int_0^T e^{-2(T-t)\lambda_j^{X_2}} |B^* \partial_{x_1} U_j(t, 0)|^2 dt,$$

"Relèvement" de la dimension 1

Soit $z_f = \sum_{j=1}^J u_j \phi_j^{X_2} \in E_J$. La solution correspondante z du système adjoint s'écrit donc

$$z(t, x_1, x_2) = \sum_{j=1}^J e^{-(T-t)\lambda_j^{X_2}} U_j(t, x_1) \phi_j^{X_2}(x_2),$$

où U_j est la solution du système adjoint 1D correspondant à u_j . Par hypothèse, on a

$$\sum_{j=1}^J e^{-2T\lambda_j^{X_2}} \|U_j(0)\|_{H_0^1(0, X_1)^n}^2 \leq (C_T^{X_1})^2 \int_0^T \sum_{j=1}^J e^{-2(T-t)\lambda_j^{X_2}} |B^* \partial_{x_1} U_j(t, 0)|^2 dt,$$

"Relèvement" de la dimension 1

Soit $z_f = \sum_{j=1}^J u_j \phi_j^{X_2} \in E_J$. La solution correspondante z du système adjoint s'écrit donc

$$z(t, x_1, x_2) = \sum_{j=1}^J e^{-(T-t)\lambda_j^{X_2}} U_j(t, x_1) \phi_j^{X_2}(x_2),$$

où U_j est la solution du système adjoint 1D correspondant à u_j . Par hypothèse, on a

$$\sum_{j=1}^J e^{-2T\lambda_j^{X_2}} \|U_j(0)\|_{H_0^1(0, X_1)^n}^2 \leq (C_T^{X_1})^2 \int_0^T \sum_{j=1}^J e^{-2(T-t)\lambda_j^{X_2}} |B^* \partial_{x_1} U_j(t, 0)|^2 dt,$$

On applique alors l'inégalité spectrale de Lebeau-Robbiano dans la direction X_2

$$\sum_{j=1}^J |a_j|^2 \leq C e^{C\sqrt{\lambda_j^{X_2}}} \int_{\gamma} \left| \sum_{j=1}^J a_j \phi_j^{X_2}(x_2) \right|^2 dx_2$$

à la suite de scalaires $a_j = e^{-(T-t)\lambda_j^{X_2}} B^* \partial_{x_1} U_j(t, 0)$ pour obtenir

$$\sum_{j=1}^J e^{-2T\lambda_j^{X_2}} \|U_j(0)\|_{H_0^1(0, X_1)^n}^2 \leq C (C_T^{X_1})^2 e^{C\sqrt{\lambda_j^{X_2}}} \int_0^T \int_{\gamma} |B^* \partial_{x_1} z(t, 0, x_2)|^2 dx_2 dt.$$

"Relèvement" de la dimension 1

Soit $z_f = \sum_{j=1}^J u_j \phi_j^{X_2} \in E_J$. La solution correspondante z du système adjoint s'écrit donc

$$z(t, x_1, x_2) = \sum_{j=1}^J e^{-(T-t)\lambda_j^{X_2}} U_j(t, x_1) \phi_j^{X_2}(x_2),$$

où U_j est la solution du système adjoint 1D correspondant à u_j . Par hypothèse, on a

$$\sum_{j=1}^J e^{-2T\lambda_j^{X_2}} \|U_j(0)\|_{H_0^1(0, X_1)^n}^2 \leq (C_T^{X_1})^2 \int_0^T \sum_{j=1}^J e^{-2(T-t)\lambda_j^{X_2}} |B^* \partial_{x_1} U_j(t, 0)|^2 dt,$$

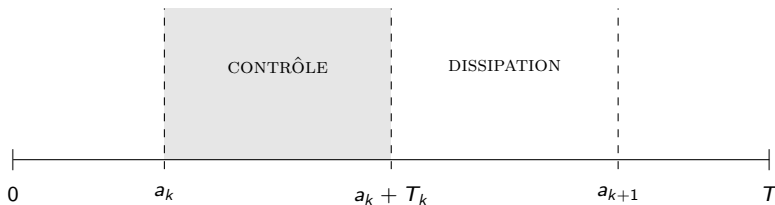
On applique alors l'inégalité spectrale de Lebeau-Robbiano dans la direction X_2

$$\sum_{j=1}^J |a_j|^2 \leq C e^{C\sqrt{\lambda_j^{X_2}}} \int_{\gamma} \left| \sum_{j=1}^J a_j \phi_j^{X_2}(x_2) \right|^2 dx_2$$

à la suite de scalaires $a_j = e^{-(T-t)\lambda_j^{X_2}} B^* \partial_{x_1} U_j(t, 0)$ pour obtenir

$$\sum_{j=1}^J e^{-2T\lambda_j^{X_2}} \|U_j(0)\|_{H_0^1(0, X_1)^n}^2 \leq C (C_T^{X_1})^2 e^{C\sqrt{\lambda_j^{X_2}}} \int_0^T \int_{\gamma} |B^* \partial_{x_1} z(t, 0, x_2)|^2 dx_2 dt.$$

Enfin, la norme $\|z(0)\|_{H_0^1(\Omega)^n}^2$ peut être estimée en fonction des normes $\|U_j(0)\|_{H_0^1(0, X_1)^n}^2$. □



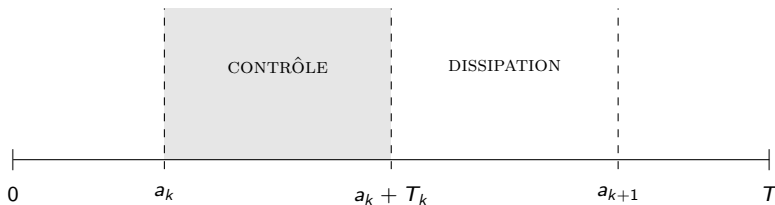
où $T_k = C(T)2^{-k\rho}$ avec $0 < \rho < 1$ et $C(T)$ pour que $2 \sum_{k=1}^{+\infty} T_k = T$.

① Coût du contrôle partiel :

$$P_{E_{2^k}^{-1}} y(a_k + T_k) = 0 \quad \text{et} \quad \|v|_{(a_k, a_k + T_k)}\|_{L^2} \leq C C_{T_k}^{X_1} e^{C \sqrt{\lambda \frac{X_2}{2^k}}} \|P_{E_{2^k}^{-1}} y(a_k)\|_{H^{-1}}.$$

② Dissipation dans la direction X_2 :

$$\left. \begin{array}{l} v|_{(a_k + T_k, a_{k+1})} = 0, \\ P_{E_{2^k}^{-1}} y(a_k + T_k) = 0, \end{array} \right\} \implies \|y(a_{k+1})\|_{H^{-1}} \leq C e^{-\lambda \frac{X_2}{2^{k+1}} T_k} \|y(a_k + T_k)\|_{H^{-1}}.$$



où $T_k = C(T)2^{-k\rho}$ avec $0 < \rho < 1$ et $C(T)$ pour que $2 \sum_{k=1}^{+\infty} T_k = T$.

① Coût du contrôle partiel :

$$P_{E_{2^k}^{-1}} y(a_k + T_k) = 0 \quad \text{et} \quad \|v|_{(a_k, a_k + T_k)}\|_{L^2} \leq C C_{T_k}^{X_1} e^{c \sqrt{\lambda_{2^k}^{X_2}}} \|P_{E_{2^k}^{-1}} y(a_k)\|_{H^{-1}}.$$

② Dissipation dans la direction X_2 :

$$\left. \begin{array}{l} v|_{(a_k + T_k, a_{k+1})} = 0, \\ P_{E_{2^k}^{-1}} y(a_k + T_k) = 0, \end{array} \right\} \Rightarrow \|y(a_{k+1})\|_{H^{-1}} \leq C e^{-\lambda_{2^{k+1}}^{X_2} T_k} \|y(a_k + T_k)\|_{H^{-1}}.$$

③ Estimation du coût du contrôle 1D :

$$C_T^{X_1} \leq C e^{C/T} \Rightarrow C_{T_k}^{X_1} e^{c \sqrt{\lambda_{2^k}^{X_2}}} \leq C e^{c' \sqrt{\lambda_{2^k}^{X_2}}}.$$

Le système 1D est contrôlable à zéro si, et seulement si, pour tout $y_0 \in H^{-1}(0, X_1)^n$, il existe $v \in L^2(0, T)$ tel que

$$-\int_0^T v(t) B^* \partial_{x_1} z(t, 0) dt = \langle y_0, z(0) \rangle_{H^{-1}, H_0^1}, \quad \forall z_f \in H_0^1(0, X_1)^n.$$

Le système 1D est contrôlable à zéro si, et seulement si, pour tout $y_0 \in H^{-1}(0, X_1)^n$, il existe $v \in L^2(0, T)$ tel que

$$-\int_0^T v(t) B^* \partial_{x_1} z(t, 0) dt = \langle y_0, z(0) \rangle_{H^{-1}, H_0^1}, \quad \forall z_f \in H_0^1(0, X_1)^n.$$

Sachant que $\Delta + A^*$ admet une base (de Riesz) de $H_0^1(0, X_1)^n$ de **fonctions propres généralisées**, on est ramené à résoudre le **problème des moments** suivant : trouver $v \in L^2(0, T)$ tel que

$$\int_0^T v(t) t^\nu e^{-\Lambda_l t} dt = \alpha_{l, \nu}, \quad \forall l \geq 1, \forall \nu \in \llbracket 0, \eta - 1 \rrbracket,$$

où η est la taille de la plus longue chaîne de Jordan, $\{\Lambda_l\}$ sont les valeurs propres de $\Delta + A^*$ et $\alpha_{l, \nu}$ vérifie

$$|\alpha_{l, \nu}| \leq C e^{-\Re(\Lambda_l) T} \|y_0\|_{H^{-1}}.$$

Estimation du coût 1D

Le système 1D est contrôlable à zéro si, et seulement si, pour tout $y_0 \in H^{-1}(0, X_1)^n$, il existe $v \in L^2(0, T)$ tel que

$$-\int_0^T v(t) B^* \partial_{x_1} z(t, 0) dt = \langle y_0, z(0) \rangle_{H^{-1}, H_0^1}, \quad \forall z_f \in H_0^1(0, X_1)^n.$$

Sachant que $\Delta + A^*$ admet une base (de Riesz) de $H_0^1(0, X_1)^n$ de fonctions propres généralisées, on est ramené à résoudre le **problème des moments** suivant : trouver $v \in L^2(0, T)$ tel que

$$\int_0^T v(t) t^\nu e^{-\Lambda_l t} dt = \alpha_{l, \nu}, \quad \forall l \geq 1, \forall \nu \in \llbracket 0, \eta - 1 \rrbracket,$$

où η est la taille de la plus longue chaîne de Jordan, $\{\Lambda_l\}$ sont les valeurs propres de $\Delta + A^*$ et $\alpha_{l, \nu}$ vérifie

$$|\alpha_{l, \nu}| \leq C e^{-\Re(\Lambda_l) T} \|y_0\|_{H^{-1}}.$$

Pour le résoudre, on construit une famille $\{\varphi_{k,j}\}_{k \geq 1, j \in \llbracket 0, \eta - 1 \rrbracket} \subset L^2(0, T)$ telle que

$$\int_0^T \varphi_{k,j}(t) t^\nu e^{-\Lambda_l t} dt = \delta_{kl} \delta_{j\nu}, \quad \forall k, l \geq 1, \forall j, \nu \in \llbracket 0, \eta - 1 \rrbracket,$$

avec l'estimation suivante

$$\|\varphi_{k,j}\|_{L^2(0, T)} \leq C e^{C\sqrt{\Re(\Lambda_k)} + \frac{C}{T}}.$$

Il suffit alors de prendre $v(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^{\eta} \alpha_{k,j} \varphi_{k,j}(t)$. □

- 1 Introduction
- 2 Une condition suffisante de contrôlabilité approchée en dimension N
- 3 Le tour du rectangle
 - Caractérisations de la contrôlabilité approchée
 - Un résultat de contrôlabilité à zéro
- 4 Commentaires et perspectives

Reprenons le cas



Considérons le jeu de données

$$D = \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

A-t-on :

Conjecture

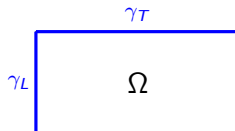
Pour tout $\gamma \subset \gamma_L$, le système 2D

$$\begin{cases} \partial_t y - D \Delta y = Ay & \text{dans } Q_T, \\ y = 1_\gamma Bv & \text{sur } \Sigma_T, \end{cases}$$

est **contrôlable à zéro** au temps T si, et seulement si, le système 1D correspondant l'est aussi.

Problème : pas de coût en dimension 1.

On prend comme zone de contr6le deux faces non-parall6les :



Consid6rons le m6me jeu de donn6es que pr6c6demment :

$$D = \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Th6or6me (G. O. (2013))

Si $\gamma \cap \gamma_L \neq \emptyset$ et $\gamma \cap \gamma_T \neq \emptyset$, alors le syst6me de 2 6quations

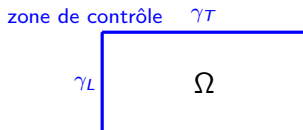
$$\begin{cases} \partial_t y - D \Delta y = Ay & \text{dans } Q_T, \\ y = 1_\gamma Bv & \text{sur } \Sigma_T, \end{cases} \quad (4)$$

est approximativement contr6lable.

Par contre, la contr6labilit6 0 z6ro est un probl6me ouvert.

Résultat de contrôle à zéro pour deux faces non-parallèles

Toujours dans la même configuration :



Théorème (G. O. (2014))

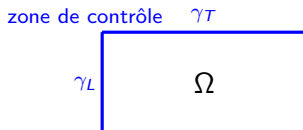
Sous la condition de Kalman, le système de 2 équations

$$\begin{cases} \partial_t y - \Delta y = Ay & \text{dans } Q_T, \\ y = 1_{\gamma_L \cup \gamma_T} Bv & \text{sur } \Sigma_T, \end{cases}$$

est **contrôlable à zéro** pour tout temps $T > 0$.

Résultat de contrôle à zéro pour deux faces non-parallèles

Toujours dans la même configuration :



Théorème (G. O. (2014))

Sous la condition de Kalman, le système de 2 équations

$$\begin{cases} \partial_t y - \Delta y = Ay & \text{dans } Q_T, \\ y = \mathbf{1}_{\gamma_L \cup \gamma_T} Bv & \text{sur } \Sigma_T, \end{cases}$$

est **contrôlable à zéro** pour tout temps $T > 0$.

Idee de la preuve : résoudre le problème des moments (problème ouvert si on suppose seulement $\gamma \cap \gamma_L \neq \emptyset$ et $\gamma \cap \gamma_T \neq \emptyset$)

$$\forall k, l \geq 1, \begin{cases} \int_0^T \widehat{F}_l(t) e^{-t(\lambda_k^{X_1} - \theta_1)} dt + \int_0^T \widehat{G}_k(t) e^{-t(\lambda_l^{X_2} - \theta_1)} dt = M_{k,l}(y_0; T), \\ \int_0^T \widehat{F}_l(t) e^{-t(\lambda_k^{X_1} - \theta_2)} dt + \int_0^T \widehat{G}_k(t) e^{-t(\lambda_l^{X_2} - \theta_2)} dt = N_{k,l}(y_0; T). \end{cases}$$

MERCI POUR VOTRE ATTENTION !