Remarques sur la contrôlabilité des équations de Navier-Stokes compressible

Boris Haspot, Université Paris Dauphine

Nous rappelons ici la forme des équations de Navier-Stokes compressible:

- Conservation de la masse :

$$\partial_t \rho + \operatorname{div} \rho \mathbf{u} = 0,$$

- Équation du moment :

$$\partial_t(\rho u) + \operatorname{div}(\rho u \otimes u) - \operatorname{div}(\mu(\rho) D(u)) - \nabla(\lambda(\rho) \operatorname{div} u) + \nabla P(\rho) = 0,$$

- Données initiales :

$$(\rho, u)_{/t=0} = (\rho_0, u_0).$$

Ici $u = u(t, x) \in \mathbb{R}^N$ avec $N \geq 2$ représente la vitesse du liquide, $\rho = \rho(t, x) \in \mathbb{R}^+$ sa densité et on a $D(u) = \frac{1}{2}(\nabla u +^t \nabla u)$. La pression P s'écrit $P(\rho) = a\rho^\gamma$ avec $a > 0, \gamma \geq 1$. $\mu(\rho) > 0$ et $\lambda(\rho) + \mu(\rho) > 0$ sont les coefficients de viscosité.
Dans la suite on s'intéressera au cas des équations de Saint Venant, c'est à dire:

$$\mu(\rho) = \mu\rho > 0 \text{ et } \lambda(\rho) = 0.$$

Dans la suite on va chercher à obtenir l'existence de solutions fortes globales avec une donnée irrotationnelle grande sur la vitesse dans des espaces critiques pour le scaling des équations, ce sera possible grâce à la forme particulière des coefficients de viscosité.

Pour Navier-Stokes compressible, nous pouvons vérifier que la transformation suivante donne une famille de solutions pour tout $l \in \mathbb{R}$:

$$(\rho_0(x), u_0(x)) \longrightarrow (\rho_0(lx), lu_0(lx)), \quad \forall\, l \in \mathbb{R}.$$
$$(\rho(t,x), u(t,x), P(t,x)) \longrightarrow (\rho(l^2t, lx), lu(l^2t, lx), l^2P(l^2t, lx)).$$

Un bon candidat serait l'espace $H^{\frac{N}{2}} \times (H^{\frac{N}{2}-1})^N$.

Quelques résultats d'existence de solutions fortes globales

- R. Danchin [2000], Existence globale de solutions fortes avec données initiales petites, $u_0 \in B^{\frac{N}{2}-1}_{2,1}$, $(\rho_0 - 1) \in B^{\frac{N}{2}-1}_{2,1} \cap B^{\frac{N}{2}}_{2,1}$.
- Z. Chen et al, F. Charve et R. Danchin, BH [2010,2011], Existence globale de solutions fortes avec données initiales petites, $u_0 \in B^{\frac{N}{p}-1}_{p,1}$, $(\rho_0 - 1) \in B^{\frac{N}{p}-1}_{p,1} \cap B^{\frac{N}{p}}_{p,1}$ avec $1 \leq p \leq N$. En particulier ce dernier résultat permet l'existence de solutions fortes globales avec des données initiales oscillantes grandes dans L^N.

$$u_0(x) = \phi(x) sin(\varepsilon^{-1} x \cdot \omega) n,$$

avec ω et n des vecteurs unités et $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$.
- F. Charve et BH, Existence globale de solutions fortes avec données initiales petites, $u_0 \in B^{\frac{N}{2}-1}_{2,2} \cap B^{-1}_{\infty,1}$, $(\rho_0 - 1) \in B^{\frac{N}{2}-1}_{2,1} \cap B^{\frac{N}{2}}_{2,1}$.

Comment avoir des données initiales grandes?

On va chercher à obtenir des solutions particulières ou à défaut déterminer des "quasi-solutions". Plus précisément lorsque $P(\rho)=0$ on vérifie que:

$$(\rho_1, -\mu\nabla\ln\rho_1),$$

est solution de notre système avec:

$$\begin{cases} \partial_t\rho_1 - \mu\Delta\rho_1 = 0, \\ (\rho_1)_{/t=0} = (\rho_1)_0. \end{cases}$$

L'idd́e va consister à travailler autour de ces solutions particulières, on peut déjà remarquer de manière très étonnante que la densité se régularise. D'autre part si on considère le système de shallow-water avec un terme de friction $a\rho u$ et $P(\rho)=\mu a\rho$ alors on a des solutions particulières exactes de la forme:

$$(\rho_1, -\mu\nabla\ln\rho_1).$$

Ces "quasi-solutions" sont purement irrotationnelles (le caractère irrationnelle est conservé).

On cherche maintenant des solutions de la forme $\ln\rho = \ln\rho_1 + h^2$ avec $\rho = \rho_1 e^{h^2}$ (en particulier $\rho_1 = 1 + q^1$) et $u = -\mu\nabla\ln\rho_1 + u^2$, on a alors si on suppose que la densité n'admet pas de vide:

$$\begin{cases} \partial_t \ln\rho + u\cdot\nabla\ln\rho + \mathrm{div}u = 0, \\ \partial_t u + u\cdot\nabla - \mu\Delta u - \mu\nabla\ln\rho Du + \nabla F(\rho) = 0, \\ (\ln\rho, u)_{/t=0} = (\ln\rho_0, u_0). \end{cases} \tag{1}$$

En utilisant le fait que $(\rho^1, u^1) = (\rho^1, -\mu\nabla\ln\rho^1)$ est une quasi solution avec:

$$\begin{cases} \partial_t\rho^1 - \mu\Delta\rho^1 = 0. \\ \rho^1(0,\cdot) = \rho_0^1. \end{cases}$$

on peut réécrire le système (6) comme suit:

$$\begin{cases} \partial_t h^2 + u\cdot\nabla h^2 + \mathrm{div}u^2 = -u^2\cdot\nabla\ln\rho^1, \\ \partial_t u^2 + u\cdot\nabla u^2 - \mu\Delta u^2 + a\nabla h^2 = -a\nabla\ln\rho^1 - u_2\cdot\nabla u^1 + \mu\nabla\ln\rho^1\cdot Du^2 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad +\mu\nabla h^2\cdot Du^1 + \mu\nabla h^2\cdot Du^2, \\ (h^2, u^2)_{/t=0} = (h_0^2, u_0^2). \end{cases} \tag{2}$$

où ici on a supposé que $P(\rho) = a\rho$. On va chercher maintenant à obtenir des solutions du problème (10) avec des données grandes sur $(\rho_1)_0$ et petites sur (h_0^2, u_0^2).

Théorème

Soit $\rho_0=(\rho_1)_0 e^{h_0^2}$ *et* $u_0=-\mu\nabla\ln(\rho_1)_0+u_0^2$. *De plus on suppose que* $(\rho_1)_0\geq c>0$, $(q_1)_0\in\widetilde{B}_{2,1}^{\frac{N}{2}-2,\frac{N}{2}}$, $h_0^2\in\widetilde{B}_{2,1}^{\frac{N}{2}-1,\frac{N}{2}}$ *et* $u_0^2\in\widetilde{B}_{2,1}^{\frac{N}{2}-1,\frac{N}{2}-1}$. *Alors il existe* ε, $C>0$ *et* $l>0$ *assez grand dépendant de* $\|(q_1)_0\|_{B_{2,1}^{\frac{N}{2}}}$ *tels que si:*

$$\|\sum_{k\geq l}\Delta_k(q_1)_0\|_{B_{2,1}^{\frac{N}{2}-2}}\leq\varepsilon\ \ \text{et}\ \ \|h_0\|_{\widetilde{B}_{2,1}^{\frac{N}{2}-1,\frac{N}{2}}}+\|u_0^2\|_{B_{2,1}^{\frac{N}{2}-1}}\leq\varepsilon, \tag{3}$$

Alors il existe une solution forte globale (ρ,u) *du système de Saint-Venant sous la forme:* $\rho=\rho_1 e^{h^2}$ *et* $u=-\mu\nabla\ln\rho_1+u^2$ *avec:*

$$\begin{cases}\partial_t\rho_1-\mu\Delta\rho_1=0,\\ (\rho_1)_{t=0}=(\rho_1)_0.\end{cases} \tag{4}$$

et telles que:

$$h^2\in\widetilde{C}(\mathbb{R}^+,\widetilde{B}_{2,1}^{\frac{N}{2}-1,\frac{N}{2}})\cap L^1(\mathbb{R}^+,\widetilde{B}_{2,1}^{\frac{N}{2}+1,\frac{N}{2}})$$
$$\text{et}\ \ u^2\in\widetilde{C}(\mathbb{R}^+;\widetilde{B}_{2,1}^{\frac{N}{2}-1,\frac{N}{2}-1})\cap L^1(\mathbb{R}+,\widetilde{B}_{2,1}^{\frac{N}{2}+1,\frac{N}{2}+1}).$$

Remarque

On a une condition de petitesse sous critique pour la densité et la vitesse initiale que l'on peut exprimer sous la forme:

$$\|(q_1)_0\|_{B^{\frac{N}{2}-2}_{2,1}} \leq Cexp(-C\|(q_1)_0\|_{B^{\frac{N}{2}}_{2,1}}).$$

On peut ainsi choisir des données initiales avec α *et* β *bien choisis de la forme:* $q_0^1(x) = \frac{1}{\varepsilon^\beta} e^{i\frac{x_3}{\varepsilon}} f(x_1, \frac{x_2}{\varepsilon^\gamma}, x_3)$ *avec* $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$.

Remarque

On peut au moins en dimension $N = 2$ *obtenir des solutions fortes globales avec des données initiales grandes dans les espaces d'énergie ce qui donne une première réponse (au moins pour certains choix de donndes initiales) au problème ouvert de l'existence de solutions fortes globales.*

Remarque

On peut s'intéresser au comportement asymptotique de ces solutions lorsque le temps tends vers l'infini. En effet le terme de premier ordre suit le comportement du noyau de la chaleur.

Première étape: Construction de solutions approchées
On régularise les données initiales:

$$q_0^n = S_n q_0, \;\; u_0^n = S_n u_0 \;\;\text{ and }\;\; f^n = S_n f.$$

On obtient alors une solution (q^n, u^n) sur l'intervalle $(0, T_n)$ telle que:

$$q^n \in \widetilde{C}([0,T_n], B^N_{2,1} \cap B^{\frac{N}{2}-1}_{2,1}) \;\; u^n \in \widetilde{C}([0,T_n],, B^{\frac{N}{2}-1}_{2,1}) \cap \widetilde{L}^1([0,T_n], B^{\frac{N}{2}+1}_{2,1}).$$

Seconde étape: Estimations uniformes
On va chercher à obtenir des estimations uniformes sur (h_2^n, u_2^n) pour montrer que $T_n = +\infty$. On distinguera comportement hautes fréquences et basses fréquences. Il s'agit en particulier de travailler sur le système suivant :

$$\begin{cases} \partial_t h^n + u^n \cdot \nabla h^n + \mathrm{div} u_2^n = F_1^n, \\ \partial_t u_2^n - \mu \Delta u_2^n + a \nabla h^n = G_1^n, \\ h_0^n = h_0, \; (u_2^n)_{/t=0} = (u_2)_0^n. \end{cases} \tag{5}$$

qui est une équation de la chaleur couplée avec une équation de transport. Pour ce faire on a deux méthodes utiliser une paralinéarisation (voir Chen et al ou Charve et Danchin) ou introduire une vitesse efficace afin de diagonaliser le système (voir BH).

Estimation du linéarisé dans des espaces de Besov:

Proposition

Soit $p \leq \max(4, N)$. *Soit* $s = \frac{N}{p}$ *et* $s' = \frac{N}{2} - 1$. *Soitt* (h, u^2) *solution du linéarisé. Il existe une constante* $C > 0$ *telle que:*

$$\|(h^2, u^2)(t)\|_{\widetilde{B}^{s'-1,s}_{2,p,1} \times \widetilde{B}^{s'-1,s-1}_{2,p,1}} + \int_0^t \|(h^2, u^2)(s)\|_{\widetilde{B}^{s'+1,s}_{2,p,1} \times \widetilde{B}^{s'+1,s+1}_{2,p,1}} ds$$

$$\leq C\big(\|(h_0^2, u_0^2)\|_{\widetilde{B}^{s'-1,s}_{2,p,1} \times \widetilde{B}^{s'-1,s-1}_{2,p,1}} + \int_0^t e^{-V(s)} \|(F, G)(s)\|_{\widetilde{B}^{s'-1,s}_{2,p,1} \times \widetilde{B}^{s'-1,s-1}_{2,p,1}} ds\big).$$

avec $V(T) = \int_0^T \|\nabla v_1(s)\|_{L^\infty} ds$.

Le reste de la preuve consiste à utiliser des estimations de paraproduits et le lemme de Gronwall. Soit:

$$E(q, u) = \|q\|_{\widetilde{L}^\infty(\widetilde{B}^{\frac{N}{2}-1,\frac{N}{2}}_{2,1}) \cap \widetilde{L}^1(\widetilde{B}^{\frac{N}{2}+1,\frac{N}{2}}_{2,1})} + \|u\|_{\widetilde{L}^\infty(B^{\frac{N}{2}-1}_{2,1})} + \|u\|_{\widetilde{L}^1(B^{\frac{N}{2}+1}_{2,1})},$$

$$E_2(h^n, u_2^n) \leq C e^{\|(q_1^n + h^n, u^n)\|_E} \big(\|h_0\|_{\widetilde{B}^{\frac{N}{p}-1,\frac{N}{2}}_{2,p,1}} + \|u_0^2\|_{B^{\frac{N}{2}-1}_{2,1}}$$

$$+ \|F_1^n\|_{\widetilde{L}^1(B^{\frac{N}{2}-1,\frac{N}{2}}_{2,1})} + \|G_1^n\|_{\widetilde{L}^1(B^{\frac{N}{2}-1}_{2,1})}\big).$$

Nous rappelons ici la forme des équations en une dimension sur l'intervalle $]0,1[\times[0,T]$:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}h+\partial_x(hu)=0, \quad (t,x)\in Q=(0,T)\times(0,1) \\ \frac{\partial}{\partial t}(hu)+\partial_x(h|u|^2)-\partial_x(\mu h\partial_x u)+\frac{\partial_x h}{Fr^2}+rhu=0, \quad (t,x)\in Q=(0,T)\times(0,1) \\ u(t,0)=v_1(t), \quad u(t,1)=v_2(t), \quad t\in(0,T), \end{cases} \tag{6}$$

$Fr>0$ représente le nombre de Froude et on pose $r=\frac{1}{\mu Fr^2}$. On a en plus les conditions initiales suivantes:

$$h_{/t=0}=h_0, u_{/t=0}=u_0. \tag{7}$$

Ici $T>0$ est un temps fixé et $v_1(t)$, $v_2(t)$ sont les contrôles qui agissent à l'extrémité de l'intervalle $(0,1)$. De plus on suppose que:

$$v_1(0)=u_0(0) \text{ et } v_2(0)=u_0(1). \tag{8}$$

Definition

Le système (6) est dit globalement contrôlable si pour tout (h_0,u_0) dans $H^2(0,1)\times H^1(0,1)$ avec $h_0\geq c>0$, et pour tout $(h_1,u_1)\in(H^2(0,1)\times H^1(0,1))$ avec $h_1\geq c_1>0$, pour tout temps $T>0$ il existe des contrôles $v_1\in H^{3/4}(0,T)$ et $v_2\in H^{3/4}(0,T)$ tels que la solution correspondante de (6) satisfait $u(T,x)=u_1(x)$ dans $(0,1)$ et $h(T,x)=h_1(x)$ dans $(0,1)$.

Quelques résultats de contrôle

- J-M Coron, A. Fursikov, O. Yu Imanuvilov, Contrôle globale exacte sur le tore $N = 2$ pour Navier-Stokes incompressible.
- E. Fernández-Cara, S. Guerrero, O. Yu. Imanuvilov et J-P Puel, Contrôle local exact sur un domaine pour Navier Stokes incompressible et le système de Boussinesq.
- J-M Coron, Contrôle local exact pour Euler compressible 1D.
- L. Rosier et P. Rouchon, non contrôlabilité d'une quation d'onde avec terme de damping.
- S. Guerrero et O. Yu. Imanuvilov, Non contrôlabilit globale de l'équation de Burger.
- M. Chapouly, Contrôlabilité globale avec en plus un terme source en plus.
- S. Ervedoza, O. Glass, S. Guerrero et J-P Puel, Contrôle local exact en 1D sur un domaine pour Navier Stokes compressible avec des données aux bords et autour d'une solution constante avec $\bar{u} > 0$.

Idée de la Preuve pour de la contrôlabilité exacte:
Pour ce faire il s'agit généralement d'étudier la contrôlabilité du système linéaire associé et ensuite de passer au système non linéraire par un théorème des fonctions inverses. Malheureusement le système linéaire associé n'est pas contrôlable.

Principale difficulté

Plus précisément si l'on linéarise autour de la solution $(1, 0)$, on étudie alors le système suivant:

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x u = 0, \\ \partial_t u - \mu \partial_{xx} u + 2\partial_x \rho = -v(t), \\ u(t,0) = u(t,1) = 0. \end{cases} \tag{9}$$

Il s'agit alors d'étudier les valeurs propres associées à l'opérateur suivant:

$$\begin{cases} \partial_x u = \lambda \rho, \\ -\mu \partial_{xx} u + 2\partial_x \rho = \lambda u, \\ u(t,0) = u(t,1) = 0. \end{cases} \tag{10}$$

1. Si $\mu^2 (k\pi)^2 - 8 \geq 0$ alors on a deux valeurs propres:

$$\lambda_k^+ = \frac{\mu (k\pi)^2 (1 + \sqrt{1 - \frac{8}{\mu^2 (k\pi)^2}})}{2} \text{ et } \lambda_k^- = \frac{\mu (k\pi)^2 (1 - \sqrt{1 - \frac{8}{\mu^2 (k\pi)^2}})}{2}$$

2. Si $\mu^2 (k\pi)^2 - 8 < 0$ alors on a les valeurs propres suivantes:

$$\lambda_{ki}^+ = \frac{\mu (k\pi)^2 (1 + i\sqrt{\frac{8}{\mu^2 (k\pi)^2} - 1})}{2} \text{ et } \lambda_{ki}^- = \frac{\mu (k\pi)^2 (1 - i\sqrt{\frac{8}{\mu^2 (k\pi)^2} - 1})}{2}$$

Les vecteurs propres associés aux valeurs propres $(\lambda_k^+, \lambda_k^-, \lambda_{ki}^+, \lambda_{ki}^-)$ sont:

$$\begin{pmatrix} \rho_k^+ \\ u_k^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}k\pi}{\lambda_k^+}\cos(k\pi x) \\ \sqrt{2}\sin(k\pi x) \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \rho_k^- \\ u_k^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}k\pi}{\lambda_k^-}\cos(k\pi x) \\ \sqrt{2}\sin(k\pi x) \end{pmatrix}$$

et:

$$\begin{pmatrix} \rho_{ki}^+ \\ u_{ki}^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}k\pi}{\lambda_{ki}^+}\cos(k\pi x) \\ \sqrt{2}\sin(k\pi x) \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \rho_{ki}^- \\ u_{ki}^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}k\pi}{\lambda_{ki}^-}\cos(k\pi x) \\ \sqrt{2}\sin(k\pi x) \end{pmatrix}$$

On peut alors écrire les solutions sous la forme suivante:

$$\begin{pmatrix} \rho(t,x) \\ u(t,x) \end{pmatrix} = T_\gamma(t)\begin{pmatrix} \rho_0 \\ u_0 \end{pmatrix} + \int_0^t T_\gamma(t-s)\begin{pmatrix} 0 \\ -v(s) \end{pmatrix} ds$$

avec:

$$T_\gamma(t)\begin{pmatrix} \rho_0 \\ u_0 \end{pmatrix} = \sum_{k\geq l_c}[a_k^+ e^{-\lambda_k^+ t}\begin{pmatrix} \rho_k^+ \\ u_k^+ \end{pmatrix} + a_k^- e^{-\lambda_k^- t}\begin{pmatrix} \rho_k^- \\ u_k^- \end{pmatrix}]$$
$$+ \sum_{k<l_c}[a_{ki}^+ e^{-\lambda_{ki}^+ t}\begin{pmatrix} \rho_{ki}^+ \\ u_{ki}^+ \end{pmatrix} + a_{ki}^- e^{-\lambda_{ki}^- t}\begin{pmatrix} \rho_{ki}^- \\ u_{ki}^- \end{pmatrix}]$$

De plus on pose:

$$\begin{pmatrix} \rho_0 \\ u_0 \end{pmatrix} = \sum_{k \geq l_c} [c_k^+ \begin{pmatrix} \rho_k^+ \\ u_k^+ \end{pmatrix} + c_k^- \begin{pmatrix} \rho_k^- \\ u_k^- \end{pmatrix}] + \sum_{k < l_c} [c_{ki}^+ \begin{pmatrix} \rho_{ki}^+ \\ u_{ki}^+ \end{pmatrix} + c_{ki}^- \begin{pmatrix} \rho_{ki}^- \\ u_{ki}^- \end{pmatrix}]$$

et:

$$\begin{pmatrix} \rho_1 \\ u_1 \end{pmatrix} = \sum_{k \geq l_c} [d_k^+ \begin{pmatrix} \rho_k^+ \\ u_k^+ \end{pmatrix} + d_k^- \begin{pmatrix} \rho_k^- \\ u_k^- \end{pmatrix}] + \sum_{k < l_c} [d_{ki}^+ \begin{pmatrix} \rho_{ki}^+ \\ u_{ki}^+ \end{pmatrix} + d_{ki}^- \begin{pmatrix} \rho_{ki}^- \\ u_{ki}^- \end{pmatrix}]$$

On a alors:

$$c_k^+ = a_k^+, c_k^- = a_k^-, c_{ki}^+ = a_{ki}^+, c_{ki}^- = a_{ki}^-.$$

De plus on a:

$$\int_0^T T_\gamma(T-s) \begin{pmatrix} 0 \\ -v(s) \end{pmatrix} ds = \int_0^T \sum_{k \geq l_c} [\alpha_k^+ e^{-\lambda_k^+ (T-s)} \begin{pmatrix} \rho_k^+ \\ u_k^+ \end{pmatrix}$$

$$+\alpha_k^- e^{-\lambda_k^- (T-s)} \begin{pmatrix} \rho_k^- \\ u_k^- \end{pmatrix}] + \sum_{k < l_c} [\alpha_{ki}^+ e^{-\lambda_{ki}^+ (T-s)} \begin{pmatrix} \rho_{ki}^+ \\ u_{ki}^+ \end{pmatrix} + \alpha_{ki}^- e^{-\lambda_{ki}^- (T-s)} \begin{pmatrix} \rho_{ki}^- \\ u_{ki}^- \end{pmatrix}] ds$$

On vérifie que:

$$\alpha_k^+ = -v(s)b_k \;\text{ avec }\; b_k = \frac{1}{(\mu(k\pi)-2)} < 1, u_{k\gamma}^+ > [\sqrt{\frac{\mu(k\pi)^2}{\lambda_k^-}} - \sqrt{2}]$$

De plus on a:

$$\begin{aligned} b_{k0} &= -\frac{1}{2k\pi(\mu(k\pi)-2)}[\sqrt{\frac{\mu(k\pi)^2}{\lambda_k^-}} - \sqrt{2}] \qquad &\text{si k est impaire,} \\ &= 0 &\text{si k est paire,} \end{aligned}$$

On peut alors écrire le problème des moments associés:

$$c_k^+ e^{-\lambda_k^+ T} - b_{k\gamma}\int_0^T v(s)e^{\lambda_k^+(T-s)}ds = d_k^+, \tag{11}$$

On pose alors:

$$F(z) = \int_0^T v(s)e^{iz(T-s)}ds.$$

Alors par Paley-Wiener F est une fonction holomorphe. Supposons que:

$$c_k^+ = 0, c_k^+ = 0 \;\text{ pour }\; k \geq N$$

Alors comme λ_k^+ admet un point d'accumulation on a $F = 0$ ce qui est absurde.

Une idée consisterait à linéariser autour de la solution particulière:

$$(1+\gamma(\frac{1}{2}-x),0) \;\text{ et }\; u(t)=\gamma.$$

On a alors:

$$\alpha_k^+ = -v(s)b_k \;\text{ avec }\; b_k = \frac{1}{(\mu(k\pi)-2)} < 1, u_{k\gamma}^+ > [\sqrt{\frac{\mu(k\pi)^2}{\lambda_k^-}} - \sqrt{2}]$$

De plus on a:

$$\langle 1, u_k^{1\pm}\rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ est paire,} \\ \dfrac{2B^3k}{\pi}\displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{4(2j+1)^2+\mu\lambda_k^{\pm}(k+2j+1)^2}{\Gamma^{k,2j+1}\left(k^2-(2j+1)^2\right)^2} & \text{si } k \text{ est impaire.}\end{cases}$$

Alors $b_{k,\gamma}$ s'écrit en fonction de γ:

$$\begin{aligned} b_{k,\gamma}^- &= \frac{8B\left(\frac{1}{2}-(\frac{k\pi}{\lambda_k^+})^2\right)}{k\pi\left(\mu^2(k\pi)^2-8\right)} + o(\gamma) && \text{si } k \text{ paire,} \\ &= \frac{4\gamma}{k\pi\left(\mu^2(k\pi)^2-8\right)}\left[\left(\left(\frac{k\pi}{\lambda_k^+}\right)^2+1\right)\langle 1, u_k^{1-}\rangle - \frac{3}{2}\langle 1, u_k^{1+}\rangle\right] + o(\gamma^2) && \text{si } k \text{ impaire.}\end{aligned}$$

Theorem

Il existe $T > 0$ et $u_0 = -\mu\partial_x \ln h_0 \in H^1(0,1)$ avec $h_0 \geq c > 0$ tels que, pour tout contrôle $v_1 \in H^{3/4}(0,T)$ et $v_2 \in H^{3/4}(0,T)$ satisfaisant la condition de compatibilité (8), la solution $(h,u) \in X_T$ de (6) vérifie:

$$\|u(T,\cdot)\|_{H^1(0,1)} \geq C > 0, \tag{12}$$

avec C dépendant du temps T et de h_0.

Theorem

Pour tout temps $T > 0$, il existe une donnée initiale $u_0 - \mu\partial_x \ln h_0 \in H^1(0,1)$ et une donnée cible $u_1 = -\mu\partial_x \ln h_1 \in H^1(0,1)$ tels que, pour tout $v_1 \in H^{3/4}(0,T)$ et $v_2 \in H^{3/4}(0,T)$ satisfaisant (8), la solution associée $(h,u) \in X_T$ au système (6) vérifie:

$$\|u(T,\cdot) - u_1(\cdot)\|_{H^1(0,1)} \geq C > 0, \tag{13}$$

avec C dépendant de T, h_0 et h_1.

Idée de la preuve En utilisant la notion de "quasi solutions" qui sont ici exacte, on se ramène à traiter l'équation suivante:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}h - \mu\partial_{xx}h = 0, \quad (t,x) \in Q = (0,T)\times(0,1) \\ h(t,0) = v_6(t), \quad h(t,1) = v_7(t), \quad t \in (0,T), \\ h(0,x) = h_0(x). \end{cases} \tag{14}$$

et vérifier si elle est exactement controlable avec: $h_0, h_1 \in H^2(0,1)$ avec $0 < c \leq h_0 < M$, $0 < c_1 \leq h_1 < M_1$ et avec $v_6 = e^{v_5(t)}, v_7 = e^{v_4(t)} \in H^1(0,T)$ strictement positive où:

$$h(t,x) = exp\big(-\frac{1}{\mu}\int_0^x u(t,y)dy - \int_0^t v_3(s)ds\big),$$

$$v_3(t) = -\frac{v_1^2(t)}{\mu} + u_x(t,0),$$

et:

$$h_1(x) = Kexp\big(-\frac{1}{\mu}\int_0^x u(T,y)dy\big),$$

avec $K = exp(-\int_0^T v_3(s)ds)$.

Proposition (Belishev)

Soit $0<\xi_0<\xi_1<\xi_2<1$. *Alors pour tout* $\theta>0$ *il existe un temps* $T=T(\theta)>0$ *tel que la solution de l'équation de la chaleur:*

$$\begin{cases} -U_t - U_{xx} = 0, & (t,x)\in(0,T^*)\times(0,1),\\ U(t,0)=U(t,1)=0, & t\in(0,T^*),\\ U(T^*,x)=\delta_{\xi_0}-\theta\delta_{\xi_1}+\delta_{\xi_2}, & x\in(0,1) \end{cases} \tag{15}$$

satisfasse:

$$U_x(t,0)>0 \ \ et\ \ U_x(t,1)<0 \ \ \forall t\in(0,T^*).$$

Ici δ_x *est la mesure de Dirac en* x.

Nous pouvons montrer le premier résultat par l'absurde. Il s'agit essentiellement d'utiliser un argument de comparaison. Supposons que pour tout temps $T>0$ et tout $h_0\in H^2(0,1)$ avec $h_0>0$ et $h_0(0)=1$, il existe une constante $K>0$ et deux contrôles $0<v_1\in H^1(0,T)$ and $0<v_2\in H^1(0,T)$ tels que la solution du système (14) vérifie:

$$h(T,x)=K \ \text{ dans } (0,1).$$

On multiplie l'équation (14) par U donné par la proposition 2.1 (for $\theta \geq 2$) et intégrant sur $(0,T) \times (0,1)$ avec $T = T^*$, on obtient:

$$\int_0^T (U_x(t,0)\widetilde{v}_1(t) - U_x(t,1)\widetilde{v}_2(t))dt + K(2-\theta) - \int_0^1 U(0,x)h_0(x)dx = 0 \quad (16)$$

pour tout $h_0 \in H^2(0,1)$.
En utilisant le fait que la dérivée normale de U soit négative et $\theta \geq 2$, on remarque que les deux premiers termes de (16) sont négatifs.
Il s'agit alors de choisir astucieusement une condition initiale h_0 avec $h_0(0) = 1$ tel que:

$$-\int_0^1 U(0,x)h_0(x)dx < 0,$$

afin d'obtenir une contradiction avec (16).
En suivant le choix de h_0 utilisé par Guerrero et Imanuvilov on conclut.

$$h_0(x) = \frac{4C^*}{\delta^3} \;\; \forall x \in (\frac{\delta}{4}, \frac{3\delta}{4})U(1 - \frac{3\delta}{4}, 1 - \frac{\delta}{4}),$$

Perspectives:

- 1.Traiter le cas de Navier-Stokes compressible sans friction .
- 2. Exacte contrôlabilité locale au voisinage de la trajectoire $u = 0$.