

Introduction à la relativité générale d'un point de vue mathématique

Jérémie Szeftel

Table des matières

Chapitre 1. Introduction	5
Chapitre 2. Géométrie différentielle	7
2.1. Variétés	7
2.2. Champs de vecteurs et de tenseurs	11
2.3. Dérivée de Lie	20
2.4. Dérivée covariante	23
2.5. Exercices	25
Chapitre 3. Géométrie Lorentzienne	27
3.1. Métrique Lorentzienne	27
3.2. Transport parallèle et géodésiques	30
3.3. Coordonnées normales et coordonnées géodésiques polaires	32
3.4. Le tenseur de courbure	36
3.5. Isométries et champs de Killing	37
3.6. Hypersurfaces	39
3.7. Métriques conformes	41
3.8. Intégration	42
3.9. Exercices	42
Chapitre 4. Relativité restreinte	45
4.1. Physique Newtonienne	45
4.2. La naissance de la relativité restreinte	46
4.3. Symétries de l'espace-temps de Minkowski	46
4.4. Les équations de l'électromagnétisme	48
4.5. Exercices	52
Chapitre 5. La relativité générale	55
5.1. L'espace-temps	55
5.2. Le principe d'équivalence	55
5.3. La formulation Lagrangienne	56
5.4. Les équations d'Einstein	59
5.5. Exemples de tenseurs d'énergie-impulsion	61
5.6. Problème	62
Chapitre 6. Exemples de solutions explicites	65

6.1. Espace-temps de Minkowski	65
6.2. Solution de Schwarzschild	67
6.3. Solution de Kerr	70
Chapitre 7. Le problème de Cauchy en relativité générale	75
7.1. Les équations d'Einstein en coordonnées d'ondes	75
7.2. Les données de Cauchy	79
7.3. Les équations de contrainte	80
7.4. La formulation du problème de Cauchy	83
7.5. Exercices	84
Formulaire	87
Index	89
Bibliographie	91

CHAPITRE 1

Introduction

Sur une période de 10 ans, allant de 1905 à 1915, Einstein va révolutionner la conception issue de la physique Newtonienne des notions de temps et de gravitation :

- (1) En 1905, Einstein introduit la relativité restreinte dans [3], en partant en particulier du postulat que le temps n'est pas absolu, mais relatif à l'observateur. Cela lui permet de trouver un cadre parfaitement adapté à l'électromagnétisme, mais il lui reste encore à incorporer la gravitation dans sa théorie.
- (2) Il faudra 10 ans à Einstein pour comprendre comment traiter la gravitation. En 1915, il énonce sa théorie de la relativité générale [4], dans laquelle la gravitation n'est plus traitée comme une force, mais comme induisant une déformation de l'espace-temps, de sorte que nous ne vivons pas dans un espace-temps plat, mais dans un espace-temps courbe, ce qui influe sur notre trajectoire.

Le cadre mathématique naturel de la relativité restreinte est l'espace-temps de Minkowski introduit par Minkowski en 1908 dans [7], et celui de la relativité générale est la géométrie Lorentzienne, qui est une variante de la géométrie Riemannienne introduite par Riemann en 1854 dans [9]. Le but de ce cours est :

- (1) De fournir les bases de géométrie Lorentzienne nécessaires à la compréhension du cours, afin que celui-ci soit auto-contenu.
- (2) De formuler les équations de l'électromagnétisme dans le cadre de la relativité restreinte.
- (3) De dériver les équations d'Einstein à partir de l'action d'Einstein-Hilbert.
- (4) De comprendre la géométrie des solutions fondamentales de Schwarzschild qui correspond à un trou noir statique, et de Kerr, qui correspond à un trou noir en rotation.
- (5) De formuler les équations d'Einstein sous la forme d'un problème d'évolution.

Enfin, pour un traitement plus approfondi de la partie portant sur la géométrie, je recommande le livre de Petersen [8], même si il existe bien sur de nombreux autres ouvrages excellents sur le sujet. Et pour un traitement plus approfondi de la partie portant sur le traitement mathématique des équations d'Einstein, je recommande les ouvrages de Hawking et Ellis [5] et Wald [11].

CHAPITRE 2

Géométrie différentielle

On souhaite étendre le calcul différentiel sur \mathbb{R}^n à des ensembles plus généraux que les espaces vectoriels. Pour ce faire, nous allons dans ce chapitre répondre aux questions suivantes :

- (1) Où les objets que l'on souhaite dériver vivent-ils ? Ces objets vivent sur des variétés différentielles, concept qui sera introduit dans la section 2.1.
- (2) Quels objets dérive-t-on ? Il s'agit des tenseurs, qui seront définis dans la section 2.2.
- (3) Comment généraliser la notion de dérivée aux variétés ? On apportera deux réponses : la dérivation de Lie sera introduite dans la section 2.3, et la dérivée covariante dans la section 2.4.

2.1. Variétés

La structure de variété différentielle a pour but de permettre d'étendre le calcul différentiel sur \mathbb{R}^n à des ensembles plus généraux que les espaces vectoriels.

2.1.1. Motivation : l'exemple de la sphère. On va motiver la définition de variété différentielle de la section 2.1.2 sur l'exemple simple de la sphère unité de \mathbb{R}^3 notée \mathbb{S}^2 et définie par

$$(x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^3 \text{ tels que } (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = 1.$$

On voudrait trouver une définition permettant de répondre aux questions suivantes :

- (1) En quel sens \mathbb{S}^2 est de dimension 2 ?
- (2) Comment définir la classe \mathcal{C}^r pour une fonction $f : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}$?

Pour cela, on introduit les ouverts \mathcal{U}_j , $j = 1, \dots, 6$ suivants (qui correspondent à six demi sphères) :

$$\mathcal{U}_j = \{x \in \mathbb{S}^2 / x^j > 0\} \text{ et } \mathcal{U}_{j+3} = \{x \in \mathbb{S}^2 / x^j < 0\}, j = 1, 2, 3.$$

On introduit également les applications $\phi_j : \mathcal{U}_j \rightarrow \mathbb{R}^2$, $j = 1, \dots, 6$ suivantes

$$\phi_1(x) = \phi_4(x) = (x^2, x^3), \phi_2(x) = \phi_5(x) = (x^1, x^3), \phi_3(x) = \phi_6(x) = (x^1, x^2).$$

On remarque que les \mathcal{U}_j forment un recouvrement de \mathbb{S}^2

$$\mathbb{S}^2 = \bigcup_{j=1}^6 \mathcal{U}_j \tag{2.1}$$

et que les ϕ_j sont des homéomorphismes de \mathcal{U}_j sur $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}(0, 1)$, où $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}(0, 1)$ désigne la boule ouverte de \mathbb{R}^2 de centre 0 et de rayon 1. Ceci permet de répondre à la question (1), puisque \mathbb{S}^2 admet un recouvrement d'ouverts qui sont tous homéomorphes à un ouvert de \mathbb{R}^2 .

On considère maintenant la question (2). Soit $f : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. L'idée est de se ramener à la situation que l'on connaît, à savoir les fonctions de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} . On voudrait donc dire que f est \mathcal{C}^r en $x_0 \in \mathbb{S}^2$ si pour un j tel que $x_0 \in \mathcal{U}_j$, on a $f \circ \phi_j^{-1}$ qui est \mathcal{C}^r au voisinage de $\phi_j(x_0)$. Il reste à vérifier sous quelles conditions cette définition ne dépend pas du choix de \mathcal{U}_j . On a

$$f \circ \phi_l^{-1} = f \circ \phi_j^{-1} \circ (\phi_j \circ \phi_l^{-1}).$$

Par conséquent, pour que cette définition soit valable, il suffit que l'on ait

$$\phi_j \circ \phi_l^{-1} \in \mathcal{C}^r \text{ là où cette fonction est définie.} \quad (2.2)$$

On vérifie que (2.2) est vrai dans le cas $j = 1, l = 2$, les autres cas étant similaires. En effet, on a

$$\forall (x^1, x^3) \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}(0, 1) \text{ avec } x^1 > 0, \phi_1 \circ \phi_2^{-1}(x^1, x^3) = (\sqrt{1 - (x^1)^2 - (x^3)^2}, x^3)$$

qui est bien \mathcal{C}^∞ sur $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}(0, 1)$.

Dans la section suivante, on introduit la définition de variété différentielle en généralisant les propriétés (2.1) et (2.2).

2.1.2. Définition. On rappelle les notions suivantes de topologie.

DÉFINITION 2.1. *Un espace topologique E est dit séparé si deux points distincts de E admettent des voisinages disjoints.*

DÉFINITION 2.2. *Soit espace topologique E . Un recouvrement $\cup_{i \in I} U_i$ de E est dit localement fini si tout point de E possède un voisinage ne rencontrant qu'un nombre fini de U_i .*

DÉFINITION 2.3. *Soit E un espace topologique. On dit que E est un espace paracompact si il est séparé et si tout recouvrement d'ouverts admet un sous recouvrement localement fini.*

On peut maintenant définir la notion de variété différentielle.

DÉFINITION 2.4. *Soit r un entier. On appelle variété différentielle de dimension n et de classe \mathcal{C}^r un espace paracompact \mathcal{M} muni d'un \mathcal{C}^r -atlas $\{\mathcal{U}_\alpha, \phi_\alpha\}$, c'est à dire une famille de cartes locales $(\mathcal{U}_\alpha, \phi_\alpha)$, où les \mathcal{U}_α sont des ouverts de \mathcal{M} et les ϕ_α sont des homéomorphismes de \mathcal{U}_α vers un ouvert de \mathbb{R}^n tel que*

- (1) les \mathcal{U}_α forment un recouvrement de \mathcal{M} , c'est à dire $\mathcal{M} = \cup_\alpha \mathcal{U}_\alpha$,

(2) si $\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta$ est non vide, alors l'application

$$\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1} : \phi_\beta(\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta) \rightarrow \phi_\alpha(\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta)$$

appelée fonction de transition est un \mathcal{C}^r difféomorphisme entre ouverts de \mathbb{R}^n .

Notons que sur chaque \mathcal{U}_α on a des coordonnées locales x^i , $i = 1, \dots, n$ définies par l'application ϕ_α : pour tout $p \in \mathcal{U}_\alpha$, les coordonnées de p sont données par les coordonnées de $\phi_\alpha(p)$ dans \mathbb{R}^n , c'est à dire

$$(x^1, \dots, x^n) = (\pi_1(\phi_\alpha(p)), \dots, \pi_n(\phi_\alpha(p)))$$

où π_i désigne la projection sur la i -ième coordonnée. Notons également que la condition (2) stipule que si deux systèmes de coordonnées locaux ont une intersection non vide, alors les coordonnées dans un des voisinages sont des fonctions \mathcal{C}^r des coordonnées dans l'autre voisinage et vice versa.

On dit qu'un \mathcal{C}^r -atlas sur \mathcal{M} est compatible avec un \mathcal{C}^r -atlas donné si leur union forme un atlas sur \mathcal{M} . L'union de tous les atlas compatibles avec un atlas donné sur \mathcal{M} est appelé atlas complet de \mathcal{M} . Un atlas complet est donc l'ensemble de tous les systèmes de coordonnées possibles recouvrant \mathcal{M} .

Enfin, on définit la notion de sous variété différentielle.

DÉFINITION 2.5. Soient $n \leq m$ deux entiers. Soit \mathcal{M} une variété \mathcal{C}^r de dimension m , et soit $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$ un sous ensemble de \mathcal{M} . On dit que \mathcal{N} est une sous variété de \mathcal{M} de dimension n si on peut munir \mathcal{M} d'un \mathcal{C}^r -atlas $\{\mathcal{U}_\alpha, \phi_\alpha\}$ compatible tel que

$$\phi_\alpha(\mathcal{N} \cap \mathcal{U}_\alpha) = (\mathbb{R}^n \times \{0\}) \cap \phi_\alpha(\mathcal{U}_\alpha).$$

2.1.3. Exemples.

EXEMPLE 2.6. L'ensemble \mathbb{R}^n est une variété de dimension n définie par l'atlas consistant d'une seule carte locale $(\mathcal{U}, \phi) = (\mathbb{R}^n, I)$ où I est l'identité sur \mathbb{R}^n . L'atlas complet correspondant contient toutes les cartes locales (U, ϕ) tel que U est un ouvert de \mathbb{R}^n et $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ un difféomorphisme.

REMARQUE 2.7. Considérons une sous variété \mathcal{N} de \mathbb{R}^m de dimension n et de classe \mathcal{C}^r , et soit $\{\mathcal{U}_\alpha, \phi_\alpha\}$ le \mathcal{C}^r -atlas compatible de \mathbb{R}^m tel que

$$\phi_\alpha(\mathcal{N} \cap \mathcal{U}_\alpha) = (\mathbb{R}^n \times \{0\}) \cap \phi_\alpha(\mathcal{U}_\alpha).$$

Au vu de l'exemple précédent, les \mathcal{U}_α sont des ouverts pour la topologie usuelle de \mathbb{R}^m , et les ϕ_α sont des \mathcal{C}^r difféomorphismes.

EXEMPLE 2.8. Au vu de la discussion de la section 2.1.1, \mathbb{S}^2 est une variété de dimension 2. Nous avons utilisé six cartes locales pour recouvrir \mathbb{S}^2 (voir (2.1)). Notons qu'il

est impossible de recouvrir \mathbb{S}^2 avec un seul système de coordonnées. On peut généraliser cet exemple à la sphère unité de \mathbb{R}^n notée \mathbb{S}^{n-1} et définie par

$$(x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n \text{ tels que } (x^1)^2 + \dots + (x^n)^2 = 1$$

qui forme une variété de dimension $n - 1$.

EXEMPLE 2.9. Soient \mathcal{M} et \mathcal{N} deux variétés. On peut définir une structure naturelle de variété sur le produit cartésien $\mathcal{M} \times \mathcal{N}$. Si \mathcal{M} est une variété de dimension m , et si \mathcal{N} est une variété de dimension n , alors, avec cette structure naturelle, $\mathcal{M} \times \mathcal{N}$ est une variété de dimension $m + n$.

2.1.4. Applications entre variétés.

DÉFINITION 2.10. Une application continue $f : \mathcal{M} \rightarrow \widetilde{\mathcal{M}}$ est \mathcal{C}^r si $\widetilde{\phi}_\beta \circ f \circ \phi_\alpha^{-1}$ est \mathcal{C}^r dans toutes les cartes locales où cette application est définie.

Les atlas maximaux étant a priori très grand, il est préférable d'utiliser le critère suivant

PROPOSITION 2.11. Une application continue $f : \mathcal{M} \rightarrow \widetilde{\mathcal{M}}$ est \mathcal{C}^r si et seulement si pour tout $p \in \mathcal{M}$, il existe des cartes $\mathcal{U}_\alpha, \widetilde{\mathcal{U}}_\beta$ voisinages de p et $f(p)$ respectivement, tel que $\widetilde{\phi}_\beta \circ f \circ \phi_\alpha^{-1}$ est \mathcal{C}^r là où cette application est définie.

DÉMONSTRATION. Cela découle immédiatement du fait que les fonctions de transition $\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1}$ et $\widetilde{\phi}_\alpha \circ \widetilde{\phi}_\beta^{-1}$ entre cartes locales sont \mathcal{C}^r . \square

PROPOSITION 2.12. Si $f : \mathcal{M} \rightarrow \widetilde{\mathcal{M}}$ est \mathcal{C}^r et $g : \widetilde{\mathcal{M}} \rightarrow \mathcal{N}$ est \mathcal{C}^r , alors $g \circ f$ est \mathcal{C}^r .

DÉMONSTRATION. Il suffit de remarquer que

$$\psi_\gamma \circ g \circ f \circ \phi_\alpha^{-1} = \left(\psi_\gamma \circ g \circ \widetilde{\phi}_\beta^{-1} \right) \circ \left(\widetilde{\phi}_\beta \circ f \circ \phi_\alpha^{-1} \right)$$

et d'utiliser le fait que la composition de deux fonctions \mathcal{C}^r dans \mathbb{R}^n est \mathcal{C}^r . \square

DÉFINITION 2.13. On dit que \mathcal{M} et $\widetilde{\mathcal{M}}$ sont difféomorphes si il existe $f : \mathcal{M} \rightarrow \widetilde{\mathcal{M}}$ tel que f et f^{-1} sont tous les deux \mathcal{C}^1 .

2.1.5. Immersions et submersions.

DÉFINITION 2.14. Soit \mathcal{U} un ouvert de \mathbb{R}^m , et soit $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application \mathcal{C}^r . Alors, on dit que :

- f est une immersion en $x \in \mathcal{U}$ si sa différentielle en x est injective.
- f est une submersion en $x \in \mathcal{U}$ si sa différentielle en x est surjective.

On dit que f est une submersion au dessus de $y \in \mathbb{R}^n$ si f est une submersion en tout point de $f^{-1}(y)$.

On rappelle le théorème du rang constant.

THÉORÈME 2.15 (Théorème du rang constant). *Soit \mathcal{U} un ouvert de \mathbb{R}^m , et soit $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application \mathcal{C}^r . Soit $1 \leq l \leq \min(m, n)$. Si le rang de df_x est égal à l pour tout x dans \mathcal{U} , alors pour tout $\underline{x} \in \mathcal{U}$, il existe un ouvert $\mathcal{U}_{\underline{x}}$ de \underline{x} , un ouvert $\mathcal{V}_{f(\underline{x})}$ de $f(\underline{x})$, et des \mathcal{C}^r difféomorphismes $\phi : V \rightarrow \mathcal{U}_{\underline{x}}$ et $\psi : \mathcal{V}_{f(\underline{x})} \rightarrow W$, où V et W sont respectivement des ouverts de \mathbb{R}^m et \mathbb{R}^n , tel que*

$$\psi \circ f \circ \phi(x^1, \dots, x^m) = (x^1, \dots, x^l, 0, \dots, 0).$$

En particulier, si :

- f est une immersion en tout point de \mathcal{U} , alors on a $l = m$ et on peut prendre l'identité pour ϕ :

$$\psi \circ f(x^1, \dots, x^m) = (x^1, \dots, x^m, 0, \dots, 0).$$

- f est une submersion en tout point de \mathcal{U} , on a $l = n$ et on peut prendre l'identité pour ψ :

$$f \circ \phi(x^1, \dots, x^m) = (x^1, \dots, x^n).$$

On en déduit immédiatement la proposition suivante.

PROPOSITION 2.16. *Soit \mathcal{U} un ouvert de \mathbb{R}^m , et soit $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application \mathcal{C}^r .*

- *Si f est injective et propre sur \mathcal{U} , et si f est une immersion en tout point de \mathcal{U} , alors $f(\mathcal{U})$ est une sous variété de \mathbb{R}^n de dimension m .*
- *Soit $y \in \mathbb{R}^n$. Si $f^{-1}(y) \neq \emptyset$ et si f est une submersion au dessus de y , alors $f^{-1}(y)$ est une sous variété de \mathbb{R}^m de dimension $m - n$.*

EXEMPLE 2.17. *Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ définie par*

$$f(x^1, \dots, x^n) = (x^1)^2 + \dots + (x^n)^2.$$

Alors, on vérifie immédiatement que f est une submersion au dessus de r pour tout $r > 0$. En particulier, pour $r = 1$, on obtient une autre preuve du fait que la sphère \mathbb{S}^{n-1} est une sous variété de dimension $n - 1$ de \mathbb{R}^n .

2.2. Champs de vecteurs et de tenseurs

Un champ de tenseurs est équivalent à un tenseur défini en chaque point de la variété, donc il faut d'abord définir un tenseur en un point, en commençant par le cas le plus simple d'un vecteur en un point.

2.2.1. L'espace tangent. Soit \mathcal{M} un variété \mathcal{C}^r de dimension n et soit $p \in \mathcal{M}$. Soit $X(p)$ l'algèbre des fonctions de \mathcal{M} dans \mathbb{R} localement \mathcal{C}^r en p . Notons en particulier que si $f \in X(p)$ et $g \in X(p)$, alors le produit fg est dans $X(p)$.

DÉFINITION 2.18. *Une dérivation D en un point p est une application*

$$D : X(p) \rightarrow \mathbb{R}$$

satisfaisant les propriétés suivantes pour toutes fonctions f et g dans $X(p)$

$$(1) D(\lambda f + \mu g) = \lambda Df + \mu Dg, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R},$$

$$(2) D(fg) = g(p)Df + f(p)Dg.$$

PROPOSITION 2.19. *L'ensemble des dérivations en p forme un espace vectoriel de dimension n que l'on note $T_p(\mathcal{M})$.*

DÉMONSTRATION. Le fait que $T_p\mathcal{M}$ est un espace vectoriel est clair. Soit x^i un système de coordonnées locales centrées en p . On définit l'application

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p : X(p) \rightarrow \mathbb{R}$$

par

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p f = \partial_{x^i}(f \circ \phi_\alpha^{-1})|_{\phi_\alpha(p)}$$

où ϕ_α correspond à la carte locale définissant le système de coordonnées locales x^i .

Notons que

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p (x^j \circ \phi_\alpha) = \delta_i^j$$

ce qui implique immédiatement de que les $\frac{\partial}{\partial x^i}$ sont linéairement indépendants.

$\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p$ est clairement une dérivation par les propriétés usuelles des dérivées de fonctions de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} . On veut maintenant montrer que l'ensemble

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p, i = 1, \dots, n \right\}$$

engendre $T_p\mathcal{M}$. Il suffit de montrer que si

$$D(x^i \circ \phi_\alpha) = 0 \text{ pour tout } i = 1, \dots, n$$

alors on a $D = 0$. Donc soit un tel D , et soit f un élément arbitraire de $X(p)$. On peut supposer le système de coordonnées locales x^i tel que p correspond à l'origine dans ces coordonnées. A l'aide de la formule de Taylor reste intégrable, on peut réécrire la fonction $f \circ \phi_\alpha^{-1}$ comme

$$f \circ \phi_\alpha^{-1}(x) = f(p) + g_i(x)x^i$$

où les g_i sont des fonctions C^∞ . On obtient alors par les propriétés de la dérivation

$$Df(p) = f(p)D1 + g_i(0)D(x^i \circ \phi_\alpha) + x^i(0)D(g_i \circ \phi_\alpha) = 0$$

pour tout f , et donc $D = 0$ ce qui conclut la preuve. Notons que l'on a utilisé $D1 = 0$. En effet, on a par la propriété (2) de la dérivation $D1 = D1^2 = D1 + D1 = 2D1$. \square

REMARQUE 2.20. On a utilisé ci-dessus la convention de sommation d'Einstein. Quand le même indice est répété « en haut » et « en bas », comme dans l'expression $g_i x^i$, il faut comprendre

$$\sum_{i=1}^n g_i x^i.$$

Notons ici que n est la dimension de \mathcal{M} , et que dans l'expression

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p$$

il faut comprendre l'indice i comme étant en bas.

DÉFINITION 2.21. $T_p \mathcal{M}$ est appelé espace tangent à \mathcal{M} en p , et ses éléments les vecteurs tangents.

EXEMPLE 2.22. L'espace tangent à \mathbb{R}^n en chacun de ses points est \mathbb{R}^n .

EXEMPLE 2.23. L'espace tangent à la sphere \mathbb{S}^{n-1} en $\omega \in \mathbb{S}^{n-1}$ est l'hyperplan de \mathbb{R}^n orthogonal à ω .

Donnons une interprétation géométrique de la dérivation en p . Soit γ une courbe \mathcal{C}^r passant par p , c'est à dire qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathcal{M}, \quad \gamma(0) = p.$$

Alors on peut définir une dérivation D_γ en p par

$$D_\gamma f = (f \circ \gamma)'(0).$$

Toutes les dérivations sont en fait de ce type. En effet, on a

$$\begin{aligned} D_\gamma f &= (f \circ \gamma)'(0) \\ &= \partial_{x^i} (f \circ \phi_\alpha^{-1})|_{\phi_\alpha(\gamma(0))} (\phi_\alpha \circ \gamma)'(0) \\ &= (\phi_\alpha \circ \gamma)'(0) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{\gamma(0)} f \end{aligned}$$

donc en choisissant pour (a^1, \dots, a^n) dans \mathbb{R}^n la courbe

$$\gamma(t) = \phi_\alpha^{-1}(ta^1, \dots, ta^n),$$

on obtient

$$D_\gamma f = a^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{\gamma(0)} f.$$

Comme les $\frac{\partial}{\partial x^i}$ engendrent $T_p \mathcal{M}$, ceci montre bien que $T_p \mathcal{M}$ est engendré par les dérivations D_γ . En particulier, cela permet de réinterpréter $T_p \mathcal{M}$ comme l'ensemble des vecteurs tangents aux courbes tracées sur \mathcal{M} et passant par p . On notera souvent ce vecteur tangent par γ' ou $\dot{\gamma}$.

2.2.2. Le fibré tangent. Soit \mathcal{M} une variété \mathcal{C}^r de dimension n . On définit le fibré tangent $T\mathcal{M}$ comme l'ensemble des vecteurs tangents à \mathcal{M} , c'est à dire

$$T\mathcal{M} = \bigcup_{p \in \mathcal{M}} T_p\mathcal{M}.$$

Notons par π l'application naturelle

$$\pi : T\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M},$$

qui à un vecteur tangent de $T_p\mathcal{M}$ associe le point $p \in \mathcal{M}$. On définit alors l'atlas suivant sur $T\mathcal{M}$

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathcal{U}}_\alpha &= \pi^{-1}(\mathcal{U}_\alpha), \\ \widetilde{\phi}_\alpha : \left\{ \beta^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \right\} &\rightarrow (\phi_\alpha(p), \beta^1, \dots, \beta^n). \end{aligned}$$

PROPOSITION 2.24. *Le choix d'atlas ci-dessus fait de $T\mathcal{M}$ une variété \mathcal{C}^{r-1} de dimension $2n$ telle que π est une application \mathcal{C}^{r-1} .*

DÉMONSTRATION. On a

$$\bigcup \widetilde{\mathcal{U}}_\alpha = \bigcup \pi^{-1}(\mathcal{U}_\alpha) = \pi^{-1}(\bigcup \mathcal{U}_\alpha) = \pi^{-1}(\mathcal{M}) = T\mathcal{M},$$

donc il suffit de montrer que les fonctions de transition sont \mathcal{C}^{r-1} . Pour cela, on part de $\beta^j \frac{\partial}{\partial y^j}$ dans le système de coordonnées (y^1, \dots, y^n) associé à ϕ_β qu'on exprime dans le système de coordonnées (x^1, \dots, x^n) associé à ϕ_α . On a pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^r$ de \mathcal{M} dans \mathbb{R}

$$\beta^j \frac{\partial}{\partial y^j} f = \beta^j \frac{\partial (f \circ \phi_\beta^{-1})}{\partial y^j} = \beta^j \frac{\partial ((f \circ \phi_\alpha^{-1}) \circ (\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1}))}{\partial y^j}$$

et on en déduit que

$$\begin{aligned} \widetilde{\phi}_\alpha \circ \widetilde{\phi}_\beta^{-1} : \phi_\beta(\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta) \times \mathbb{R}^n &\rightarrow \phi_\alpha(\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta) \times \mathbb{R}^n, \\ (y, h) &\rightarrow (\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1}(y), d_y(\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1})h) \end{aligned}$$

qui est bien \mathcal{C}^{r-1} . □

Notons que pour tout $p \in \mathcal{M}$ fixé, $\widetilde{\phi}$ restreint à $T_p\mathcal{M}$ est une application linéaire.

DÉFINITION 2.25. *Un champ de vecteurs \mathcal{C}^r est une application \mathcal{C}^r $\mathbf{X} : \mathcal{M} \rightarrow T\mathcal{M}$ telle que*

$$\pi \circ \mathbf{X} = I$$

où I désigne l'application identité sur \mathcal{M} .

Notons que dans une carte locale, les champs de vecteurs \mathcal{C}^r sur \mathcal{M} sont tous de la forme

$$\alpha^i(p) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p$$

où les fonctions α^i sont \mathcal{C}^r .

EXEMPLE 2.26. *Un champ de vecteurs \mathcal{C}^r \mathbf{X} sur \mathbb{R}^n est une application \mathcal{C}^r \mathbf{X} de \mathbb{R}^n dans lui-même.*

EXEMPLE 2.27. *Un champ de vecteurs \mathcal{C}^r \mathbf{X} sur \mathbb{S}^{n-1} est une application \mathcal{C}^r \mathbf{X} de \mathbb{S}^{n-1} dans \mathbb{R}^n telle que en tout point $\omega \in \mathbb{S}^{n-1}$, $\mathbf{X}(\omega)$ est orthogonal à ω pour le produit scalaire euclidien.*

2.2.3. Le fibré cotangent.

DÉFINITION 2.28. *Soit une variété \mathcal{M} . Pour tout $p \in \mathcal{M}$, on note $T_p^*\mathcal{M}$ l'espace cotangent, c'est à dire l'espace dual de $T_p\mathcal{M}$. Le fibré cotangent est alors défini par*

$$T^*\mathcal{M} = \bigcup_{p \in \mathcal{M}} T_p^*\mathcal{M}.$$

Rappelons que l'espace dual a la même dimension que l'espace de départ. Par conséquent, pour tout $p \in \mathcal{M}$, l'espace cotangent $T_p^*\mathcal{M}$ est un espace vectoriel de dimension n .

DÉFINITION 2.29. *Une 1-forme est une application $\omega : \mathcal{M} \rightarrow T^*\mathcal{M}$ telle que*

$$\pi \circ \omega = I$$

où I désigne l'application identité sur \mathcal{M} , et où par abus de notation, on a encore noté par π l'application naturelle

$$\pi : T^*\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M},$$

qui à un élément de l'espace cotangent $T_p^*\mathcal{M}$ associe le point $p \in \mathcal{M}$.

Soit $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction \mathcal{C}^r . Alors, pour tout champ de vecteurs \mathbf{X} sur \mathcal{M} , on définit $\mathbf{X}(f)$ par

$$\mathbf{X}(f)(p) = X^i \frac{\partial}{\partial x^i} f|_p = X^i(p) \partial_{x^i} (f \circ \phi_\alpha^{-1})|_{\phi_\alpha(p)}.$$

On voit sur la formule que $\mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}(f)$ est une 1-forme. On note cette 1-forme df , qui est donc définie par

$$df(\mathbf{X}) = \mathbf{X}(f)$$

pour tout champ de vecteurs \mathbf{X} . En particulier, si $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathcal{M}$ est une courbe \mathcal{C}^r , on a

$$\begin{aligned} (f \circ \gamma)'(0) &= (\gamma^i)'(0) \frac{\partial}{\partial x^i}|_{\gamma(0)} f \\ &= df_{\gamma(0)}(\dot{\gamma}(0)). \end{aligned}$$

On peut maintenant définir dx^i où on a appliqué, avec un léger abus de notation, la définition de df avec $f = x^i \circ \phi_\alpha$. Remarquons que l'on a

$$dx^i \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right) = \frac{\partial}{\partial x^j} ((x^i \circ \phi_\alpha) \circ \phi_\alpha^{-1}) = \frac{\partial x^i}{\partial x^j}$$

et donc

$$dx^i \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right) = \delta_j^i.$$

On appelle dx^i la base duale de $\frac{\partial}{\partial x^i}$.

REMARQUE 2.30. On définit l'atlas suivant sur $T^*\mathcal{M}$

$$\widetilde{\mathcal{U}}_\alpha = \pi^{-1}(\mathcal{U}_\alpha),$$

$$\widetilde{\phi}_\alpha : \left\{ \beta_i dx^i|_p \right\} \rightarrow (\phi_\alpha(p), \beta_1, \dots, \beta_n).$$

Comme dans le cas du fibré tangent, le choix d'atlas ci-dessus fait de $T^*\mathcal{M}$ une variété \mathcal{C}^{r-1} de dimension $2n$ telle que π est une application \mathcal{C}^{r-1} .

REMARQUE 2.31. Dans une carte locale, les 1-formes \mathcal{C}^r sur \mathcal{M} sont toutes de la forme

$$\alpha_i(p) dx^i|_p$$

où les fonctions α_i sont \mathcal{C}^r .

Grâce à la définition de df , on peut énoncer la proposition suivante.

PROPOSITION 2.32. Soit \mathcal{M} une variété de dimension n . Soit $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^r telle que $df_p \neq 0$ pour tout $p \in \mathcal{M}$. Alors, les ensembles de niveau de f sont des sous variétés de \mathcal{M} de dimension $n - 1$.

DÉMONSTRATION. Soit $a \in \mathbb{R}$ tel que $f^{-1}(a) \neq \emptyset$. Soit $(\mathcal{U}_\alpha, \phi_\alpha)$ une carte locale telle que $f^{-1}(a) \cap \mathcal{U}_\alpha \neq \emptyset$. On considère $f \circ \phi_\alpha^{-1}$ qui est une application de l'ouvert $\phi_\alpha(\mathcal{U}_\alpha)$ de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} . On a pour tout $i = 1, \dots, n$ et tout $p \in \mathcal{U}_\alpha$

$$\frac{\partial(f \circ \phi_\alpha^{-1})}{\partial x^i}(\phi_\alpha(p)) = \frac{\partial}{\partial x^i|_p} f = df_p \left(\frac{\partial}{\partial x^i|_p} \right).$$

Comme $df_p \neq 0$ par hypothèse, on en déduit que $f \circ \phi_\alpha^{-1}$ est une submersion au dessus de a . Par la Proposition 2.16, $(f \circ \phi_\alpha^{-1})^{-1}(a)$ est donc une sous variété de dimension $n - 1$ de \mathbb{R}^n . Il existe par conséquent un atlas compatible $\{\mathcal{V}_{\alpha,\beta}, \psi_{\alpha,\beta}\}$ de \mathbb{R}^n tel que

$$\psi_{\alpha,\beta}((f \circ \phi_\alpha^{-1})^{-1}(a) \cap \mathcal{V}_{\alpha,\beta}) = (\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}) \cap \psi_{\alpha,\beta}(\mathcal{V}_{\alpha,\beta}).$$

Soit

$$\mathcal{W}_{\alpha,\beta} = \phi_\alpha^{-1}(\mathcal{V}_{\alpha,\beta}), \quad \varphi_{\alpha,\beta} = \psi_{\alpha,\beta} \circ \phi_\alpha.$$

On vérifie alors que $\{\mathcal{W}_{\alpha,\beta}, \varphi_{\alpha,\beta}\}$ est un atlas compatible qui fait de $f^{-1}(a)$ une sous variété de \mathcal{M} de dimension $n - 1$. \square

2.2.4. Produits tensoriels d'espaces vectoriels. Afin de définir les fibrés tensoriels dans la section suivante, on introduit maintenant la notion de produit tensoriel d'espaces vectoriels.

Soient U et V deux espaces vectoriels. On définit le produit tensoriel $U \otimes V$ comme l'espace vectoriel libre généré par les symboles $u \otimes v$ où $u \in U$ et $v \in V$ quotienté par le sous-espace généré par

$$u \otimes (\alpha v + \beta \tilde{v}) - \alpha u \otimes v - \beta u \otimes \tilde{v}$$

et

$$(\alpha u + \beta \tilde{u}) \otimes v - \alpha u \otimes v - \beta \tilde{u} \otimes v.$$

On obtient bien un espace vectoriel. Si U a pour dimension n et si (e_1, \dots, e_n) en est une base, et si V a pour dimension m et si (f_1, \dots, f_m) en est une base, alors $U \otimes V$ a pour dimension nm , et $e_i \otimes f_j$ forme une base. On a

$$\begin{aligned} u \otimes v &= (u^i e_i) \otimes (v^j f_j) \\ &= u^i v^j e_i \otimes f_j, \end{aligned}$$

et plus généralement, les vecteurs de $U \otimes V$ s'écrivent donc sous la forme

$$a^{ij} e_i \otimes f_j.$$

La proposition suivante, dont la preuve est laissée au lecteur, rassemble quelque propriétés élémentaires du produit tensoriel.

PROPOSITION 2.33. *Le produit tensoriel vérifie les propriétés suivantes*

(1) $U \otimes V$ a la propriété universelle suivante. Si

$$B : U \times V \rightarrow W$$

est une application bilinéaire, alors elle se factorise de manière unique en $\tilde{B} \circ h$ où $h : U \times V \rightarrow U \otimes V$ est défini par

$$h(u, v) = u \otimes v$$

et où \tilde{B} est linéaire.

(2) $(U \otimes V) \otimes W = U \otimes (V \otimes W)$. On écrira donc simplement $U \otimes V \otimes W$.

(3) $U \otimes V \simeq V \otimes U$.

(4) $\mathcal{L}(U, V) \simeq U^* \otimes V$, où $\mathcal{L}(U, V)$ désigne l'ensemble des applications linéaires de U dans V .

(5) $(U \otimes V)^* \simeq U^* \otimes V^*$.

2.2.5. Les fibrés tensoriels.

DÉFINITION 2.34. Pour r et s entiers et pour $p \in \mathcal{M}$, $(T_r^s)_p \mathcal{M}$ est donné par

$$(T_r^s)_p \mathcal{M} = \underbrace{T_p \mathcal{M} \otimes \cdots \otimes T_p \mathcal{M}}_{r \text{ fois}} \otimes \underbrace{T_p^* \mathcal{M} \otimes \cdots \otimes T_p^* \mathcal{M}}_{s \text{ fois}}.$$

On définit alors le fibré $T_r^s \mathcal{M}$ des tenseurs r -fois contravariant et s -fois covariant par

$$T_r^s \mathcal{M} = \bigcup_{p \in \mathcal{M}} (T_r^s)_p \mathcal{M}.$$

Une base naturelle pour $(T_r^s)_p \mathcal{M}$ est donnée dans des coordonnées locales par

$$\frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_r}} \otimes dx^{j_1} \otimes \cdots \otimes dx^{j_s} \Big|_p.$$

DÉFINITION 2.35. On appelle un champ de tenseurs r -fois contravariant et s -fois covariant de classe \mathcal{C}^r la donnée en tout point $p \in \mathcal{M}$ d'un élément de $(T_r^s)_p \mathcal{M}$, de sorte que dans toute base naturelle les coordonnées des tenseurs soient des fonctions \mathcal{C}^r de \mathcal{M} .

Afin de s'habituer aux notations tensorielles, on récapitule la définition précédente. Un champ de tenseurs r -fois contravariant et s -fois covariant de classe \mathcal{C}^r \mathbf{T} s'écrit dans des coordonnées locales

$$\mathbf{T} = T_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_r}} \otimes dx^{j_1} \otimes \cdots \otimes dx^{j_s}$$

où les fonctions $T_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} : \mathcal{U}_\alpha \rightarrow \mathbb{R}$ sont \mathcal{C}^r , et où on a noté \mathcal{U}_α l'ouvert de la carte locale.

Dans toute la suite, on désignera les champs de tenseurs r -fois contravariant et s -fois covariant par le terme de champ de tenseurs de type (r, s) .

REMARQUE 2.36. Un champ de vecteurs est un champ de tenseurs de type $(1, 0)$, et une 1-forme est un champ de tenseurs de type $(0, 1)$.

Une opération importante sur les champs de tenseurs est la contraction par rapport à une paire d'indices où un des indices est covariant et l'autre est contravariant. Par exemple, soit \mathbf{T} un champ de tenseurs de type (r, s) , on note $C_1^1(\mathbf{T})$ le champ de tenseurs de type $(r-1, s-1)$ obtenu en contractant le premier indice covariant avec le premier indice contravariant. On obtient

$$C_1^1(\mathbf{T}) = T_{kj_2 \dots j_s}^{ki_2 \dots i_r} \frac{\partial}{\partial x^{i_2}} \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_r}} \otimes dx^{j_2} \otimes \cdots \otimes dx^{j_s}.$$

On définit de la même manière $C_k^l(\mathbf{T})$ qui est le champ de tenseurs de type $(r-1, s-1)$ obtenu en contractant le l -ième indice contravariant avec le k -ième indice covariant. On vérifie facilement que cette opération, à savoir la contraction par rapport à une paire d'indices où un des indices est covariant et l'autre est contravariant, est indépendante du choix de la base (ce qui ne serait pas le cas si on contractait deux indices covariants, ou deux indices contravariants).

EXEMPLE 2.37. Soit \mathbf{T} un tenseur de type $(1, 1)$ donné dans un système de coordonnées par

$$\mathbf{T} = a_j^i \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes dx^j.$$

Alors, on a

$$C_1^1(\mathbf{T}) = a_i^i$$

qui est la trace d'une matrice et est donc bien indépendant du choix de la base.

2.2.6. Le tiré en arrière et le poussé en avant. Soient \mathcal{M} et \mathcal{M}' deux variétés. Soit $\phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}'$ une application \mathcal{C}^r . Si f est une fonction scalaire sur \mathcal{M}' , on peut définir une fonction scalaire $\phi^* f$ sur \mathcal{M} telle que :

$$\forall p \in \mathcal{M}, \phi^* f(p) = f(\phi(p)).$$

On dit que $\phi^* f$ est le tiré en arrière (le pullback) de f .

Supposons maintenant que ϕ est bijective. On peut également définir le poussé en avant (push forward) $\phi_* : T_p \mathcal{M} \rightarrow T_{\phi(p)} \mathcal{M}'$ de la manière suivante :

$$\forall f \in \mathcal{C}^1(\mathcal{M}', \mathbb{R}), \forall \mathbf{X} \in T_p \mathcal{M}, \phi_* \mathbf{X}(f)|_{\phi(p)} = \mathbf{X}(\phi^* f)|_p.$$

REMARQUE 2.38. Si $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathcal{M}$ est une courbe \mathcal{C}^r , alors on a

$$\phi_* \dot{\gamma}|_{\phi(\gamma(0))} = (\phi \circ \gamma)'(0).$$

EXEMPLE 2.39. Soit $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ un \mathcal{C}^1 difféomorphisme. Alors, pour tout champ de vecteurs \mathbf{X} sur \mathbb{R}^n , on a :

$$\phi_* \mathbf{X}_{\phi(p)} = d_p \phi(\mathbf{X}_p).$$

En utilisant la définition de ϕ_* , on peut étendre le tiré en arrière ϕ^* aux tenseurs de type $(0, 1)$ par dualité en posant

$$\forall \boldsymbol{\eta} \in T_{\phi(p)}^* \mathcal{M}', \forall \mathbf{X} \in T_p \mathcal{M}, \langle \phi^* \boldsymbol{\eta}, \mathbf{X} \rangle|_p = \langle \boldsymbol{\eta}, \phi_* \mathbf{X} \rangle|_{\phi(p)}.$$

Enfin, on peut étendre de manière naturelle le poussé en avant ϕ_* aux tenseurs contravariants, et le tiré en arrière ϕ^* aux tenseurs covariants. Si \mathbf{T} est un tenseur de type $(r, 0)$ sur \mathcal{M} , on définit $\phi_* \mathbf{T}$ de la manière suivante :

$$\forall \boldsymbol{\eta}_1, \dots, \boldsymbol{\eta}_r \in T_{\phi(p)}^* \mathcal{M}', \phi_* \mathbf{T}(\boldsymbol{\eta}_1, \dots, \boldsymbol{\eta}_r)|_{\phi(p)} = \mathbf{T}(\phi^* \boldsymbol{\eta}_1, \dots, \phi^* \boldsymbol{\eta}_r)|_p.$$

De même, si \mathbf{T} est un tenseur de type $(0, s)$ sur \mathcal{M}' , on définit $\phi^* \mathbf{T}$ de la manière suivante :

$$\forall \mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_s \in T_{\phi(p)} \mathcal{M}', \phi^* \mathbf{T}(\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_s)|_p = \mathbf{T}(\phi_* \mathbf{X}_1, \dots, \phi_* \mathbf{X}_s)|_{\phi(p)}.$$

2.3. Dérivée de Lie

2.3.1. Flot d'un champ de vecteur. Le théorème de Cauchy-Lipschitz usuel dans \mathbb{R}^n concernant l'existence et l'unicité des équations différentielles ordinaires peut-être étendu aux variétés.

PROPOSITION 2.40. *Soit \mathcal{M} une variété \mathcal{C}^r et soit \mathbf{X} un champ de vecteurs \mathcal{C}^1 sur un ouvert \mathcal{U} de \mathcal{M} . Alors pour tout point p de \mathcal{U} , il existe une unique courbe intégrale γ de \mathbf{X} maximale, c'est à dire que $\gamma : (T_-, T_+) \rightarrow \mathcal{U}$ avec $T_- < 0 < T_+$ tel que*

$$\gamma'(t) = \mathbf{X}_{\gamma(t)} \text{ pour } T_- < t < T_+ \text{ et } \gamma(0) = p.$$

On peut obtenir comme dans le cas de \mathbb{R}^n l'existence d'un groupe à un paramètre d'isomorphismes.

PROPOSITION 2.41. *Pour tout $p \in \mathcal{M}$, il existe un ouvert \mathcal{U} contenant p , un intervalle ouvert I contenant 0 et des difféomorphismes ϕ_t sur leur image*

$$\phi_t : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{M}$$

tels que $\phi_t(q)$ est la courbe intégrale du champ de vecteurs \mathbf{X} passant par q donnée par la Proposition 2.40. De plus, $\phi : \mathcal{U} \times I \rightarrow \mathcal{M}$ est une application \mathcal{C}^1 et

$$\phi_t \circ \phi_s = \phi_{t+s}$$

sur $\mathcal{U} \cap \phi_{-s}(\mathcal{U})$ pour tout $t, s, t + s$ dans I . Notons que $\phi_0 = Id$ et que $\phi_{-t} = \phi_t^{-1}$ pour tout $t, -t$ dans I .

2.3.2. Crochet de Lie. Soient \mathbf{X} et \mathbf{Y} deux champs de vecteurs. On vérifie immédiatement que

$$\mathbf{X}(\mathbf{Y}f) - \mathbf{Y}(\mathbf{X}f), f \in \mathcal{C}^\infty$$

vérifie en tout point $p \in \mathcal{M}$ les propriétés d'une dérivation énoncée dans la définition 2.18. On peut donc donner la définition suivante.

DÉFINITION 2.42. *Soient \mathbf{X} et \mathbf{Y} deux champs de vecteurs. On désigne par $[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]$ le champ de vecteurs correspondant à la dérivation suivante*

$$[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]f = \mathbf{X}(\mathbf{Y}f) - \mathbf{Y}(\mathbf{X}f), f \in \mathcal{C}^\infty.$$

Ce champ de vecteurs est appelé crochet de Lie de \mathbf{X} et \mathbf{Y} .

La proposition suivante est une conséquence immédiate de la définition et la preuve est laissée au lecteur.

PROPOSITION 2.43. *On a les propriétés suivantes*

- (1) $[\mathbf{Y}, \mathbf{X}] = -[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]$
- (2) $[\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2, \mathbf{Y}] = [\mathbf{X}_1, \mathbf{Y}] + [\mathbf{X}_2, \mathbf{Y}]$
- (3) $[[\mathbf{X}, \mathbf{Y}], \mathbf{Z}] + [[\mathbf{Y}, \mathbf{Z}], \mathbf{X}] + [[\mathbf{Z}, \mathbf{X}], \mathbf{Y}] = 0$ (identité de Jacobi)
- (4) $[f\mathbf{X}, g\mathbf{Y}] = fg[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] + f(\mathbf{X}g)\mathbf{Y} - g(\mathbf{Y}f)\mathbf{X}$

La proposition ci-dessus nous permet d'obtenir une formule pour $[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]$ dans un système de coordonnées locales. Si x^i est un système de coordonnées locales, notons d'abord que

$$\left[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right] = 0. \quad (2.3)$$

En utilisant en particulier l'identité (4) de la Proposition 2.43, et en posant

$$\mathbf{X} = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad \mathbf{Y} = Y^i \frac{\partial}{\partial x^i},$$

on obtient

$$[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] = \left(X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} - Y^i \frac{\partial X^j}{\partial x^i} \right) \frac{\partial}{\partial x^j}. \quad (2.4)$$

On donne dans la proposition suivante une interprétation géométrique de la dérivée de Lie.

PROPOSITION 2.44. *Soient \mathbf{X} et \mathbf{Y} deux champs de vecteurs. Soit ϕ_t le groupe à un paramètre associé à \mathbf{X} dans la Proposition 2.41. Alors, on a*

$$[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]|_p = \lim_{t \rightarrow 0} t^{-1} (\mathbf{Y}|_p - ((\phi_t)_* \mathbf{Y})_p).$$

DÉMONSTRATION. On note $f_t = f \circ \phi_t$. On a

$$\frac{d}{dt} f_t \Big|_{t=0} = \left[df_{\phi_t} \frac{d}{dt} \phi_t \right]_{t=0} = \mathbf{X}f.$$

On en déduit le développement limité à l'ordre 2 suivant

$$f_t = f + t\mathbf{X}f + O(t^2).$$

On obtient

$$t^{-1} (\mathbf{Y}f(p) - \mathbf{Y}(f \circ \phi_t)(\phi_t^{-1}(p))) = t^{-1} (\mathbf{Y}f(p) - \mathbf{Y}f(\phi_t^{-1}(p))) - \mathbf{Y}\mathbf{X}f(p) + O(t).$$

Comme

$$\frac{d}{dt} \mathbf{Y}f(\phi_t^{-1}(p)) \Big|_{t=0} = \left[d\mathbf{Y}f_{\phi_t^{-1}(p)} \frac{d}{dt} \phi_t^{-1}(p) \right]_{t=0} = -\mathbf{X}\mathbf{Y}f(p)$$

on obtient finalement

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} t^{-1} (\mathbf{Y}f(p) - \mathbf{Y}(f \circ \phi_t)(\phi_t^{-1}(p))) &= -\frac{d}{dt} \mathbf{Y}f(\phi_t^{-1}(p)) \Big|_{t=0} - \mathbf{Y}\mathbf{X}f(p) \\ &= \mathbf{X}\mathbf{Y}f(p) - \mathbf{Y}\mathbf{X}f(p) \\ &= [\mathbf{X}, \mathbf{Y}]f(p) \end{aligned}$$

ce qui conclut la preuve de la proposition. □

2.3.3. Dérivée de Lie. Soit \mathbf{X} un champ de vecteurs. On peut maintenant définir la dérivée de Lie $\mathcal{L}_{\mathbf{X}}$ appliquée à un champ de tenseurs \mathbf{T} . A un champ de tenseurs de type (r, s) \mathbf{T} , on associe un champ de tenseurs de type (r, s) $\mathcal{L}_{\mathbf{X}}\mathbf{T}$ selon les règles suivantes.

- (1) $\mathcal{L}_{\mathbf{X}}f = \mathbf{X}f$ pour toute fonction scalaire f
- (2) $\mathcal{L}_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} = [\mathbf{X}, \mathbf{Y}]$ pour tout champ de vecteurs \mathbf{Y}
- (3) $\mathcal{L}_{\mathbf{X}}(\mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2) = \mathcal{L}_{\mathbf{X}}\mathbf{T}_1 + \mathcal{L}_{\mathbf{X}}\mathbf{T}_2$ pour tous champs de tenseurs de type (r, s) \mathbf{T}_1 et \mathbf{T}_2
- (4) $\mathcal{L}_{\mathbf{X}}(\mathbf{T}_1 \otimes \mathbf{T}_2) = \mathcal{L}_{\mathbf{X}}\mathbf{T}_1 \otimes \mathbf{T}_2 + \mathbf{T}_1 \otimes \mathcal{L}_{\mathbf{X}}\mathbf{T}_2$ pour tous champs de tenseurs \mathbf{T}_1 et \mathbf{T}_2
- (5) $\mathcal{L}_{\mathbf{X}}(f\mathbf{T}) = f\mathcal{L}_{\mathbf{X}}\mathbf{T} + (\mathbf{X}f)\mathbf{T}$ pour tout champ de tenseurs \mathbf{T} et pour toute fonction scalaire f
- (6) $\mathcal{L}_{\mathbf{X}}C_k^l(\mathbf{T}) = C_k^l(\mathcal{L}_{\mathbf{X}}\mathbf{T})$ pour tout champ de tenseurs \mathbf{T} , et pour toute contraction C_k^l

En particulier, soit un tenseur ω de type $(0, 1)$. On a dans un système de coordonnées

$$\omega = \omega_i dx^i.$$

Par (4), on a pour tout champ de vecteurs \mathbf{Y}

$$\mathcal{L}_{\mathbf{X}}(\omega \otimes \mathbf{Y}) = \mathcal{L}_{\mathbf{X}}\omega \otimes \mathbf{Y} + \omega \otimes \mathcal{L}_{\mathbf{X}}\mathbf{Y}$$

et on en déduit par (1), (2) et (6)

$$\mathbf{X}(\omega_i Y^i) = Y^i (\mathcal{L}_{\mathbf{X}}\omega)_i + \omega_i [\mathbf{X}, \mathbf{Y}]^i.$$

En choisissant

$$\mathbf{Y} = \frac{\partial}{\partial x^i}$$

on en déduit

$$(\mathcal{L}_{\mathbf{X}}\omega)_i = \frac{\partial \omega_i}{\partial x^j} X^j + \omega_j \frac{\partial X^j}{\partial x^i}$$

où on a utilisé (2.4) pour calculer

$$\left[\mathbf{X}, \frac{\partial}{\partial x^i} \right] = -\frac{\partial X^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j}.$$

En particulier, on a

$$\mathcal{L}_{\mathbf{X}}(dx^j)_i = \frac{\partial X^j}{\partial x^i}. \quad (2.5)$$

On peut maintenant calculer $\mathcal{L}_{\mathbf{X}}\mathbf{T}$ dans un système de coordonnées pour un champ de tenseurs de type (r, s) \mathbf{T} . On utilise (4), (2) et (2.5) pour calculer

$$\mathcal{L}_{\mathbf{X}} \left(\mathbf{T} \otimes \frac{\partial}{\partial x^1} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^r} \otimes dx^1 \otimes \dots \otimes dx^s \right).$$

On utilise ensuite (6) pour contracter tous les indices. On obtient ainsi les composantes de $\mathcal{L}_{\mathbf{X}}\mathbf{T}$ dans la base du système de coordonnées

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_{\mathbf{X}}\mathbf{T})_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} &= \frac{\partial T_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}}{\partial x^i} X^i - T_{j_1 \dots j_s}^{a i_2 \dots i_r} \frac{\partial X^{i_1}}{\partial x^a} - \text{tous les autres indices en haut} \\ &\quad + T_{a j_2 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} \frac{\partial X^a}{\partial x^{j_1}} + \text{tous les autres indices en bas.} \end{aligned}$$

Notons que la dérivée de Lie $\mathcal{L}_{\mathbf{X}}\mathbf{T}|_p$ d'un tenseur de type (r, s) dépend non seulement de la direction du champ de vecteurs \mathbf{X} en p , mais aussi de la direction de \mathbf{X} dans un voisinage de p . Cette notion de dérivation semble donc trop limitée pour servir de généralisation au concept de dérivée partielle dans \mathbb{R}^n . On obtient une telle généralisation, la dérivée covariante, en introduisant une structure supplémentaire sur la variété. C'est le but de la section suivante.

2.4. Dérivée covariante

2.4.1. Dérivée covariante d'un champ de vecteurs. La structure supplémentaire dont on a besoin est la notion de connexion sur une variété.

DÉFINITION 2.45. *Soit \mathcal{M} une variété C^r . Une connexion \mathbf{D} est une application*

$$\mathbf{D} : T\mathcal{M} \times T\mathcal{M} \rightarrow T\mathcal{M}$$

satisfaisant aux propriétés suivantes

- (1) $\mathbf{D}_{f\mathbf{X}+g\mathbf{Y}}\mathbf{Z} = f\mathbf{D}_{\mathbf{X}}\mathbf{Z} + g\mathbf{D}_{\mathbf{Y}}\mathbf{Z}$ pour tous champs de vecteurs $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}$ et pour toutes fonctions scalaires f et g .
- (2) $\mathbf{D}_{\mathbf{X}}(\alpha\mathbf{Y} + \beta\mathbf{Z}) = \alpha\mathbf{D}_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} + \beta\mathbf{D}_{\mathbf{X}}\mathbf{Z}$ pour tous champs de vecteurs $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}$ et pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
- (3) $\mathbf{D}_{\mathbf{X}}(f\mathbf{Y}) = \mathbf{X}(f)\mathbf{Y} + f\mathbf{D}_{\mathbf{X}}\mathbf{Y}$ pour tous champs de vecteurs \mathbf{X}, \mathbf{Y} et pour toute fonction scalaire f .

On dit alors que $\mathbf{D}_{\mathbf{X}}\mathbf{Y}|_p$ est la dérivée covariante de \mathbf{Y} dans la direction \mathbf{X} en p .

REMARQUE 2.46. *Par le point (1) de la définition 2.45, on remarque que $\mathbf{D}_{\mathbf{X}}\mathbf{Y}|_p$ ne dépend pas des valeurs de \mathbf{X} en des points différents de p .*

EXEMPLE 2.47. *La connexion plate de \mathbb{R}^n . Soit x^i le système de coordonnées cartésiennes de \mathbb{R}^n . On définit pour tous champs de vecteurs \mathbf{X} et \mathbf{Y}*

$$(\mathbf{D}_{\mathbf{X}}\mathbf{Y})^j = X^i \partial_i Y^j.$$

On obtient ainsi une connexion sur \mathbb{R}^n .

Soit \mathbf{D} une connexion sur une variété \mathcal{M} , et soit x^i un système de coordonnées locales. On décompose

$$\mathbf{X} = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad \mathbf{Y} = Y^i \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

On a alors par les propriétés (1) et (3) de la définition 2.45

$$\widetilde{\mathbf{D}}_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} = X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} + X^i Y^j \mathbf{D}_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j}.$$

On introduit la notation suivante

$$\mathbf{D}_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k} \quad (2.6)$$

et on obtient finalement la formule suivante

$$\mathbf{D}_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} = X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} + X^i Y^j \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k}. \quad (2.7)$$

REMARQUE 2.48. *On prendra garde au fait qu'une connexion n'est pas un champ de tenseurs. Par contre, la différence entre deux connexions $\mathbf{D} - \widetilde{\mathbf{D}}$ est bien un tenseur. De même, les Γ_{ij}^k ne sont pas les composantes d'un champ de tenseurs, mais la différence de deux tels symboles $\Gamma_{ij}^k - \widetilde{\Gamma}_{ij}^k$ l'est.*

DÉFINITION 2.49. *On dit qu'une connexion est sans torsion si pour tous i, j, k on a*

$$\Gamma_{jk}^i = \Gamma_{kj}^i.$$

Dans toute la suite, on supposera toujours les connexions sans torsion. D'après (2.4) et (2.7), on en déduit

$$[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] = \mathbf{D}_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} - \mathbf{D}_{\mathbf{Y}}\mathbf{X}. \quad (2.8)$$

2.4.2. Dérivée covariante d'un champ de tenseurs. Soit \mathbf{X} un champ de vecteurs. On peut maintenant définir la dérivée covariante $\mathbf{D}_{\mathbf{X}}$ appliquée à un champ de tenseurs \mathbf{T} . A un champ de tenseurs de type (r, s) \mathbf{T} , on associe un champ de tenseurs de type (r, s) $\mathbf{D}_{\mathbf{X}}\mathbf{T}$ selon les règles suivantes

- (1) $\mathbf{D}_{\mathbf{X}}f = \mathbf{X}f$ pour toute fonction scalaire f
- (2) $\mathbf{D}_{\mathbf{X}}\mathbf{Y}$ est donné pour tout champ de vecteurs \mathbf{Y} par la définition 2.45
- (3) $\mathbf{D}_{\mathbf{X}}(\mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2) = \mathbf{D}_{\mathbf{X}}\mathbf{T}_1 + \mathbf{D}_{\mathbf{X}}\mathbf{T}_2$ pour tous champs de tenseurs de type (r, s) \mathbf{T}_1 et \mathbf{T}_2
- (4) $\mathbf{D}_{\mathbf{X}}(\mathbf{T}_1 \otimes \mathbf{T}_2) = \mathbf{D}_{\mathbf{X}}\mathbf{T}_1 \otimes \mathbf{T}_2 + \mathbf{T}_1 \otimes \mathbf{D}_{\mathbf{X}}\mathbf{T}_2$ pour tous champs de tenseurs \mathbf{T}_1 et \mathbf{T}_2
- (5) $\mathbf{D}_{f\mathbf{X}}(g\mathbf{T}) = fg\mathbf{D}_{\mathbf{X}}\mathbf{T} + f(\mathbf{X}g)\mathbf{T}$ pour tout champ de tenseurs \mathbf{T} et pour toutes fonctions scalaires f et g
- (6) $\mathbf{D}_{\mathbf{X}}C_k^l(\mathbf{T}) = C_k^l(\mathbf{D}_{\mathbf{X}}\mathbf{T})$ pour tout champ de tenseurs \mathbf{T} , et pour toute contraction C_k^l

Comme pour la dérivée de Lie en section 2.3.3, on utilise (1), (2), (4) et (6) pour calculer les composantes de $\mathbf{D}_{\frac{\partial}{\partial x^l}} \mathbf{T}$ dans un système de coordonnées. On obtient

$$\begin{aligned} \left(\mathbf{D}_{\frac{\partial}{\partial x^l}} \mathbf{T} \right)_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} &= \frac{\partial T_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}}{\partial x^l} + \Gamma_{lk}^{i_1} T_{j_1 \dots j_s}^{k i_2 \dots i_r} + \text{tous les autres indices en haut} \\ &\quad - \Gamma_{l j_1}^k T_{k j_2 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} - \text{tous les autres indices en bas.} \end{aligned}$$

2.5. Exercices

Exercice 1. Montrer que le tore $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$ est une variété compacte de dimension n .

Exercice 2. Le sous-ensemble de \mathbb{R}^3 défini par $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ est-il une sous-variété de \mathbb{R}^3 ?

Exercice 3. L'application de \mathbb{R} dans \mathbb{R}^2 définie par

$$t \rightarrow (t^2, t^3)$$

est-elle une immersion ? Montrer que son image n'est pas une sous-variété de \mathbb{R}^2 .

Exercice 4. Montrer que l'application $] -\infty, 1[\rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par

$$t \rightarrow \left(\frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}, \frac{t(t^2 - 1)}{t^2 + 1} \right)$$

est une immersion injective, mais que son image n'est pas une sous-variété de \mathbb{R}^2 . Dessiner cette image.

Exercice 5. Montrer que le groupe $SL(n, \mathbb{R})$ est une sous-variété de l'espace vectoriel des matrices $n \times n$. Quelle est sa dimension ?

Exercice 6. Montrer que le groupe orthogonal $O(n)$ est une sous-variété de l'espace vectoriel des matrices $n \times n$. Quelle est sa dimension ?

Exercice 7. Soient U un ouvert de \mathbb{R}^n , $a \in U$ et $f : U \rightarrow \mathbb{R}^p$. Si f est une submersion, montrer que l'espace tangent à $f^{-1}(f(a))$ en a est le noyau de df_a . Si f est une immersion, montrer que l'espace tangent à $f(U)$ en $f(a)$ est l'image de df_a .

Exercice 8. On considère la sphère unité \mathbb{S}^{n-1} de \mathbb{R}^n . Montrer que pour tout $x \in \mathbb{S}^{n-1}$, $T_x \mathbb{S}^{n-1}$ coïncide avec x^\perp , et que le fibré tangent $T\mathbb{S}^{n-1}$ est la sous-variété de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$

$$T\mathbb{S}^{n-1} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mid |x|^2 = 1 \text{ et } x \cdot y = 0\}.$$

Exercice 9. On rappelle qu'un champ de tenseurs r -fois contravariant et s -fois covariant de classe \mathcal{C}^r \mathbf{T} s'écrit dans des coordonnées locales

$$\mathbf{T} = T_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_r}} \otimes dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_s}.$$

Exprimer les nouvelles composantes de \mathbf{T} dans un autre système de coordonnées locales. Montrer que $C_1^1(\mathbf{T})$ est bien un tenseur de type $(r-1, s-1)$.

Exercice 10. Soit U un ouvert de \mathbb{R}^n et soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction \mathcal{C}^2 . Soit p un point de U où la différentielle df_p de f en p ne s'annule pas. Montrer qu'il n'existe pas de champ de tenseurs défini sur U qui ait dans tout système de coordonnées (x^i) l'expression

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} dx^i \otimes dx^j.$$

Exercice 11. Soit \mathcal{M} et \mathcal{M}' deux variétés. Montrer qu'on a pour tous champs de vecteurs \mathbf{X}, \mathbf{Y} sur \mathcal{M} , et pour toute bijection \mathcal{C}^2 $\phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}'$

$$\phi_*[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] = [\phi_*\mathbf{X}, \phi_*\mathbf{Y}].$$

Exercice 12. Soit \mathcal{M} une variété. Soit \mathbf{X} un champ de vecteurs sur \mathcal{M} tel que $[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] = 0$ pour tout champ de vecteurs \mathbf{Y} sur \mathcal{M} . Montrer que $\mathbf{X} = 0$.

Exercice 13. Déterminer les flots des champs de vecteurs définis

- a) sur \mathbb{R} par $\mathbf{X}_x = x$
- b) sur \mathbb{R} par $\mathbf{X}_x = x^2$
- c) sur \mathbb{R}^n par $\mathbf{X} = x^i \frac{\partial}{\partial x^i}$

Exercice 14. Soit \mathcal{M} une variété, et \mathcal{N} une sous-variété de \mathcal{M} . Soit \mathbf{X} et \mathbf{Y} deux champs de vecteurs sur \mathcal{M} tangents à \mathcal{N} (c'est à dire que pour tout $p \in \mathcal{N}$, on a $\mathbf{X}_p, \mathbf{Y}_p \in T_p\mathcal{N}$). Montrer que $[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]$ est aussi tangent à \mathcal{N} .

Exercice 15. Soit \mathcal{M} une variété munie d'une dérivée covariante \mathbf{D} . On définit la torsion par

$$\mathbf{T}(X, Y) = \mathbf{D}_X \mathbf{Y} - \mathbf{D}_Y \mathbf{X} - [\mathbf{X}, \mathbf{Y}].$$

Montrer que \mathbf{T} est un tenseur de type $(1, 2)$.

CHAPITRE 3

Géométrie Lorentzienne

On peut munir \mathbb{R}^n de la métrique euclidienne, et on obtient alors l'espace euclidien. Dans ce chapitre, on va généraliser la géométrie euclidienne aux variétés. En particulier :

- (1) On introduit à la section 3.1 la notion de métrique sur une variété, qui généralise la notion de métrique euclidienne.
- (2) Le plus court chemin entre deux points en géométrie euclidienne est la droite. Dans la section 3.2, on introduit le concept de géodésiques qui sont des courbes généralisant les droites de l'espace euclidien.
- (3) L'espace euclidien est plat, mais il s'agit d'une exception. En effet, les variétés (la sphère par exemple) sont en général courbes. On va introduire le tenseur de courbure qui permet de mesurer cela dans la section 3.4.

3.1. Métrique Lorentzienne

3.1.1. Définitions.

DÉFINITION 3.1. Une métrique \mathbf{g} sur \mathcal{M} est un champ de tenseurs de type $(0, 2)$ tel que pour tout $p \in \mathcal{M}$, \mathbf{g}_p est une forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur $T_p\mathcal{M}$.

Citons ci-dessous les deux cas les plus étudiés, à savoir les métriques Riemanniennes et les métriques Lorentziennes.

DÉFINITION 3.2. Si en tout point $p \in \mathcal{M}$, \mathbf{g}_p est définie positive, on dit que $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$ est une variété Riemannienne.

DÉFINITION 3.3. Si en tout point $p \in \mathcal{M}$, \mathbf{g}_p a pour signature

$$(-1, \underbrace{+1, \dots, +1}_{n-1 \text{ termes}})$$

on dit que $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$ est une variété Lorentzienne.

Dans un système de coordonnées, on a

$$\mathbf{g} = \mathbf{g}_{\alpha\beta} dx^\alpha \otimes dx^\beta$$

que l'on écrira dans la suite plus simplement

$$\mathbf{g} = \mathbf{g}_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta.$$

Citons maintenant les deux exemples principaux.

EXEMPLE 3.4. *L'espace euclidien $(\mathcal{M}, \mathbf{g}) = (\mathbb{R}^n, e)$, où e désigne la métrique Euclidienne, est une variété Riemannienne. Dans les coordonnées cartésiennes de \mathbb{R}^n , e est donnée par*

$$e = (dx^1)^2 + \dots + (dx^n)^2.$$

EXEMPLE 3.5. *L'espace de Minkowski $(\mathcal{M}, \mathbf{g}) = (\mathbb{R}^{1+n}, m)$, où m désigne la métrique de Minkowski, est une variété Lorentzienne. Dans les coordonnées cartésiennes de \mathbb{R}^{1+n} , m est donnée par*

$$m = -(dt)^2 + (dx^1)^2 + \dots + (dx^n)^2.$$

DÉFINITION 3.6. *Soient $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$ une variété Lorentzienne, $p \in \mathcal{M}$ et $\mathbf{X} \in T_p\mathcal{M}$. Alors on dit que \mathbf{X} est*

- (1) *un vecteur de type espace si $\mathbf{g}(\mathbf{X}, \mathbf{X}) > 0$,*
- (2) *un vecteur de type temps si $\mathbf{g}(\mathbf{X}, \mathbf{X}) < 0$,*
- (3) *un vecteur nul (ou de type lumière) si $\mathbf{g}(\mathbf{X}, \mathbf{X}) = 0$.*

EXEMPLE 3.7. *Dans l'espace de Minkowski (\mathbb{R}^{1+n}, m) , les vecteurs*

$$(t, x) \in \mathbb{R}^{1+3}$$

sont de type espace si

$$|t| < \|x\|,$$

de type temps si

$$|t| > \|x\|,$$

et nuls si

$$|t| = \|x\|.$$

DÉFINITION 3.8. *Soit $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$ une variété Lorentzienne. Soient I un intervalle de \mathbb{R} et $\gamma : I \rightarrow \mathcal{M}$ une courbe sur \mathcal{M} . La courbe γ est dite*

- *de type temps si $\mathbf{g}(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t)) < 0$ pour tout $t \in I$*
- *de type espace si $\mathbf{g}(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t)) > 0$ pour tout $t \in I$*
- *de type lumière si $\mathbf{g}(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t)) = 0$ pour tout $t \in I$*

3.1.2. « Baisser » et « monter » les indices d'un tenseur. Comme la métrique \mathbf{g} est non dégénérée, on peut lui associer un champ de tenseurs de type $(2, 0)$ avec les composantes $\mathbf{g}^{\alpha\beta}$ définies par la relation

$$\mathbf{g}^{\alpha\beta} \mathbf{g}_{\beta\gamma} = \delta^\alpha_\gamma.$$

Ainsi, $\mathbf{g}_{\alpha\beta}$ et $\mathbf{g}^{\alpha\beta}$ permettent de « monter » les indices covariants et de « descendre » les indices contravariants. Plus précisément, si X^α correspond aux composantes d'un champ de vecteurs, on lui associe un tenseur de type $(0, 1)$ par

$$X_\alpha = \mathbf{g}_{\alpha\beta} X^\beta.$$

De même, si \mathbf{T} est un tenseur de type $(0, 2)$, on peut lui associer un tenseur de type $(1, 1)$ par

$$T^\alpha{}_\beta = \mathbf{g}^{\alpha\gamma} T_{\gamma\beta}$$

et un tenseur de type $(2, 0)$ par

$$T^{\alpha\beta} = \mathbf{g}^{\alpha\gamma} \mathbf{g}^{\beta\mu} T_{\gamma\mu}.$$

En général, on considère ces tenseurs covariant et contravariant associés comme le même objet géométrique.

3.1.3. Longueur d'une courbe. On introduit la notion de longueur d'une courbe.

DÉFINITION 3.9. Soit $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$ une variété munie d'une métrique. Soit I un intervalle de \mathbb{R} et $\gamma : I \rightarrow \mathcal{M}$ une courbe \mathcal{C}^1 sur \mathcal{M} telle que $\dot{\gamma}(t) \neq 0$ pour tout $t \in I$. Soit $[a, b] \subset I$. Alors la longueur de γ entre $\gamma(a)$ et $\gamma(b)$ est donnée par

$$L = \int_a^b \sqrt{|\mathbf{g}|_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t))} dt.$$

REMARQUE 3.10. Dans le cas de l'espace euclidien (\mathbb{R}^n, e) , on retrouve bien sur la notion usuelle de la longueur d'une courbe \mathcal{C}^1 dans \mathbb{R}^n .

REMARQUE 3.11. En relativité, une particule se déplace sur une courbe $\gamma(t)$ de genre temps de $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$. On définit le temps propre de cette particule entre deux événements $\gamma(t_0)$ et $\gamma(t_1)$ comme la longueur de la courbe γ entre les deux valeurs t_0 et t_1 de t :

$$\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{-\mathbf{g}|_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t))} dt.$$

3.1.4. Connexion de Levi-Civita. On a introduit indépendamment les notions de connexion et de métrique. Il se trouve qu'il existe une connexion très naturelle associée à une métrique \mathbf{g} .

PROPOSITION 3.12. Soit $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$ une variété munie d'une métrique. Il existe une unique connexion sur \mathcal{M} sans torsion et telle que

$$\mathbf{D}\mathbf{g} = 0.$$

DÉMONSTRATION. Soient $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}$ trois champs de vecteurs sur \mathcal{M} . Supposons l'existence de cette connexion sans torsion telle que $\mathbf{D}\mathbf{g} = 0$. On a alors

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(\mathbf{g}(\mathbf{Y}, \mathbf{Z})) &= \mathbf{D}_{\mathbf{X}}(\mathbf{g}(\mathbf{Y}, \mathbf{Z})) \\ &= \mathbf{D}_{\mathbf{X}}\mathbf{g}(\mathbf{Y}, \mathbf{Z}) + \mathbf{g}(\mathbf{D}_{\mathbf{X}}\mathbf{Y}, \mathbf{Z}) + \mathbf{g}(\mathbf{Y}, \mathbf{D}_{\mathbf{X}}\mathbf{Z}) \\ &= \mathbf{g}(\mathbf{D}_{\mathbf{X}}\mathbf{Y}, \mathbf{Z}) + \mathbf{g}(\mathbf{Y}, \mathbf{D}_{\mathbf{X}}\mathbf{Z}) \end{aligned}$$

où on a utilisé $\mathbf{D}\mathbf{g} = 0$ dans la dernière égalité. En additionnant l'expression analogue pour $\mathbf{Y}(\mathbf{g}(\mathbf{Z}, \mathbf{X}))$, en soustrayant celle pour $\mathbf{Z}(\mathbf{g}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}))$, et en utilisant (2.8) du fait que

la connexion \mathbf{D} est supposée sans torsion, on obtient

$$\begin{aligned} \mathbf{g}(\mathbf{Z}, \mathbf{D}_{\mathbf{X}}\mathbf{Y}) &= \frac{1}{2} \left(-\mathbf{Z}(\mathbf{g}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})) + \mathbf{Y}(\mathbf{g}(\mathbf{Z}, \mathbf{X})) + \mathbf{X}(\mathbf{g}(\mathbf{Y}, \mathbf{Z})) \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{g}(\mathbf{Z}, [\mathbf{X}, \mathbf{Y}]) + \mathbf{g}(\mathbf{Y}, [\mathbf{Z}, \mathbf{X}]) - \mathbf{g}(\mathbf{X}, [\mathbf{Y}, \mathbf{Z}]) \right) \end{aligned} \quad (3.1)$$

ce qui montre bien l'unicité. Ensuite, il reste à montrer que \mathbf{D} défini par la formule (3.1) vérifie bien les propriétés (1), (2) et (3) de la définition 2.45 ce qui est laissé au lecteur. \square

Grâce à la Proposition 3.12, on a la définition suivante.

DÉFINITION 3.13. *On appelle connexion de Levi-Civita l'unique connexion sans torsion telle que $\mathbf{D}\mathbf{g} = 0$.*

EXEMPLE 3.14. *La connexion plate de \mathbb{R}^n définie dans l'exemple 2.47 est la connexion de Levi-Civita associée à l'espace Euclidien (\mathbb{R}^n, e) .*

En prenant pour \mathbf{X} , \mathbf{Y} et \mathbf{Z} des vecteurs d'une base de coordonnées, les crochets de Lie s'annulent d'après (2.3), et la formule (3.1) implique

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2} \mathbf{g}^{il} \left(\frac{\partial \mathbf{g}_{jl}}{\partial x^k} + \frac{\partial \mathbf{g}_{kl}}{\partial x^j} - \frac{\partial \mathbf{g}_{jk}}{\partial x^l} \right) \quad (3.2)$$

où Γ_{jk}^i a été défini en (2.6).

DÉFINITION 3.15. *On appelle Γ_{jk}^i les symboles de Christoffel de la connexion.*

3.2. Transport parallèle et géodésiques

Soit I un intervalle de \mathbb{R} avec $0 \in I$, et γ une courbe

$$\gamma : I \rightarrow \mathcal{M}.$$

Soit \mathbf{X} un champ de vecteurs. Calculons $\mathbf{D}_{\dot{\gamma}(t)}\mathbf{X}$ dans un système de coordonnées. On décompose \mathbf{X}

$$\mathbf{X} = X^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha}$$

et on obtient pour $\mathbf{D}_{\dot{\gamma}(t)}\mathbf{X}$

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{\dot{\gamma}(t)}\mathbf{X}_{\gamma(t)} &= \mathbf{D}_{\dot{\gamma}(t)}(X^\alpha)|_{\gamma(t)} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} + X^\alpha(\gamma(t)) \mathbf{D}_{\dot{\gamma}(t)} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \\ &= (X^\alpha \circ \gamma)'(t) \frac{\partial}{\partial x^\alpha} + X^\alpha(\gamma(t)) \dot{\gamma}^\beta(t) \Gamma_{\beta\alpha}^\mu(\gamma(t)) \frac{\partial}{\partial x^\mu}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

(3.3) montre que $\mathbf{D}_{\dot{\gamma}}\mathbf{X}$ ne dépend que des valeurs de \mathbf{X} prises sur la courbe γ . En particulier, pour \mathbf{Y} vecteur tangent de $T_{\gamma(0)}\mathcal{M}$, on peut s'intéresser à l'équation suivante

$$\begin{cases} \mathbf{D}_{\dot{\gamma}(t)}\mathbf{X}_{\gamma(t)} &= 0, \\ \mathbf{X}_{\gamma(0)} &= \mathbf{Y}. \end{cases} \quad (3.4)$$

D'après (3.3), dans un système de coordonnées, (3.4) est équivalent à

$$\begin{cases} (X^\alpha \circ \gamma)'(t) + (X^\mu \circ \gamma)(t)\dot{\gamma}^\beta(t)\Gamma_{\beta\mu}^\alpha(\gamma(t)) & = 0, \\ (X^\alpha \circ \gamma)(0) & = Y^\alpha. \end{cases} \quad (3.5)$$

Notons que (3.5) est un système de n équations différentielles ordinaires dans \mathbb{R}^n d'inconnues

$$(X^1 \circ \gamma, \dots, X^n \circ \gamma)$$

et que l'existence locale et l'unicité des X^α est garantie par le théorème de Cauchy-Lipschitz standard dans \mathbb{R}^n . De plus, comme il s'agit d'un système linéaire d'équations différentielles ordinaires, l'existence de \mathbf{X} est garantie partout là où γ est définie, c'est à dire sur I . On peut donc donner la définition suivante.

DÉFINITION 3.16. *Soit I un intervalle de \mathbb{R} avec $0 \in I$, et γ une courbe*

$$\gamma : I \rightarrow \mathcal{M}.$$

Soit \mathbf{Y} vecteur tangent de $T_{\gamma(0)}\mathcal{M}$. Il existe un unique \mathbf{X} tel que pour tout $t \in I$, $\mathbf{X}_{\gamma(t)}$ est un vecteur tangent de $T_{\gamma(t)}\mathcal{M}$, et tel que \mathbf{X} satisfait le système (3.4) pour tout $t \in I$. On dit que \mathbf{X} est le transport parallèle de \mathbf{Y} le long de γ .

EXEMPLE 3.17. *Dans (\mathbb{R}^n, e) , le transport parallèle de \mathbf{Y} le long d'une courbe γ donne une famille de vecteurs parallèles à \mathbf{Y} ayant pour origine les différents points de la courbe γ .*

On introduit maintenant les géodésiques. Soit p un point de \mathcal{M} et \mathbf{Y} un vecteur tangent de $T_p\mathcal{M}$, on cherche une courbe γ sur \mathcal{M} solution de l'équation suivante

$$\begin{cases} \mathbf{D}_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma} & = 0, \\ \gamma(0) & = p, \\ \dot{\gamma}(0) & = \mathbf{Y}. \end{cases} \quad (3.6)$$

(3.6) est équivalent dans un système de coordonnées à

$$\begin{cases} \ddot{\gamma}^\alpha(t) + \dot{\gamma}^\mu(t)\dot{\gamma}^\beta(t)\Gamma_{\beta\mu}^\alpha(\gamma(t)) & = 0, \\ \gamma(0) & = p, \\ \dot{\gamma}(0) & = \mathbf{Y}. \end{cases} \quad (3.7)$$

Notons que (3.5) est un système de n équations différentielles ordinaires dans \mathbb{R}^n d'inconnues

$$(\gamma^1, \dots, \gamma^n)$$

et que l'existence locale et l'unicité des γ^α est garantie par le théorème de Cauchy-Lipschitz standard dans \mathbb{R}^n . On peut donc donner la définition suivante.

DÉFINITION 3.18. *Soient p un point de \mathcal{M} et \mathbf{Y} un vecteur tangent de $T_p\mathcal{M}$. Il existe un intervalle maximal I contenant 0 et une unique courbe $\gamma : I \rightarrow \mathcal{M}$ telle que γ satisfait le système (3.6). On dit que γ est une courbe géodésique.*

EXEMPLE 3.19. *Dans (\mathbb{R}^n, e) , les géodésiques sont les droites de \mathbb{R}^n .*

Notons dans l'exemple 3.19 que les géodésiques de (\mathbb{R}^n, e) correspondent au plus court chemin entre deux points. Soit maintenant une variété $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$ munie d'une métrique Riemannienne. Rappelons que l'on a donné une définition de la longueur d'un arc de courbe entre deux points (voir définition 3.9). Les géodésiques sont localement minimisantes, c'est à dire qu'il existe pour chaque point un voisinage où les géodésiques reliant ce point aux autres points du voisinage sont minimisantes (voir Proposition 3.27). Par contre, elles ne sont en général pas globalement minimisantes.

EXEMPLE 3.20. *Sur la sphère unité \mathbb{S}^2 de \mathbb{R}^3 , les géodésiques sont les grands cercles. Si deux points p et q sont aux antipodes, alors il existe une infinité de géodésiques passant par p et q , qui ont toutes la même longueur. Si p et q ne sont pas au antipodes, alors il existe deux géodésiques passant par p et q , la petite portion et la grande portion du grand cercle passant par p et q . En particulier la géodésique correspondant à la grande portion du grand cercle passant par p et q n'est pas minimisante.*

3.3. Coordonnées normales et coordonnées géodésiques polaires

Soit $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$ une variété munie d'une métrique. Soit $p \in \mathcal{M}$. Pour tout $\mathbf{v} \in T_p\mathcal{M}$, il existe une unique géodésique $\gamma_{\mathbf{v}} : I_{\mathbf{v}} \rightarrow \mathcal{M}$ telle que

$$\gamma_{\mathbf{v}}(0) = p, \dot{\gamma}_{\mathbf{v}}(0) = \mathbf{v},$$

où $I_{\mathbf{v}}$ désigne l'intervalle maximal de définition de $\gamma_{\mathbf{v}}$. Pour $\lambda > 0$, l'unicité dans le théorème de Cauchy-Lipschitz implique que

$$\gamma_{\mathbf{v}}(t) = \gamma_{\lambda\mathbf{v}}\left(\frac{t}{\lambda}\right). \quad (3.8)$$

Par conséquent, on a

$$t \in I_{\mathbf{v}} \text{ si et seulement si } \frac{t}{\lambda} \in I_{\lambda\mathbf{v}}.$$

En particulier, on en déduit l'existence d'un voisinage \mathcal{U}_p de 0 dans $T_p\mathcal{M}$ tel que pour tout $\mathbf{v} \in \mathcal{U}_p$, $[0, 1] \subset I_{\mathbf{v}}$.

DÉFINITION 3.21. *Soit $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$ une variété munie d'une métrique. Soit $p \in \mathcal{M}$, et soit \mathcal{U}_p un voisinage de 0 dans $T_p\mathcal{M}$ tel que pour tout $\mathbf{v} \in \mathcal{U}_p$, $[0, 1] \subset I_{\mathbf{v}}$. On définit l'application exponentielle $\exp_p : \mathcal{U}_p \rightarrow \mathcal{M}$ par*

$$\exp_p(\mathbf{v}) = \gamma_{\mathbf{v}}(1).$$

DÉFINITION 3.22. *Soit \mathcal{M} une variété, E un espace vectoriel, et φ une application \mathcal{C}^1 de E dans \mathcal{M} . Alors, on définit la différentielle de φ de la manière suivante*

$$d\varphi_x(v) = \frac{d}{dt}\varphi(x + tv)|_{t=0}, \quad x, v \in E.$$

Pour x dans E , on vérifie que $d\varphi_x$ définit une application linéaire de E dans $T_{\varphi(x)}\mathcal{M}$.

LEMME 3.23. *La différentielle de \exp_p en 0 est l'identité.*

DÉMONSTRATION. Soit $\mathbf{v} \in \mathcal{U}_p$. D'après (3.8), on a $t\mathbf{v} \in \mathcal{U}_p$ pour tout $0 \leq t \leq 1$, et

$$\begin{aligned}\exp_p(t\mathbf{v}) &= \gamma_{t\mathbf{v}}(1) \\ &= \gamma_{\mathbf{v}}(t)\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \exp_p(t\mathbf{v})|_{t=0} &= \dot{\gamma}_{\mathbf{v}}(0) \\ &= \mathbf{v},\end{aligned}$$

ce qui conclut la preuve du lemme. \square

Le Lemme 3.23 implique, grâce au théorème d'inversion local, que \exp_p est un difféomorphisme d'un voisinage de 0 dans un voisinage de p . En particulier, tout système de coordonnées sur un voisinage de l'origine de $T_p\mathcal{M}$ induit un système de coordonnées sur un voisinage de p via \exp_p^{-1} . On peut maintenant définir les coordonnées normales et les coordonnées géodésiques polaires.

DÉFINITION 3.24. *Les coordonnées normales dans un voisinage de $p \in \mathcal{M}$ sont obtenues via \exp_p^{-1} à partir des coordonnées cartésiennes sur $T_p\mathcal{M}$. Pour une variété Riemannienne, les coordonnées géodésiques polaires dans un voisinage de $p \in \mathcal{M}$ sont obtenues via \exp_p^{-1} à partir des coordonnées polaires sur $T_p\mathcal{M}$.*

On établit quelques propriétés remarquables de ces systèmes de coordonnées.

LEMME 3.25. *Dans un système de coordonnées normales centrées en p , on a*

$$\Gamma_{\beta\mu|_p}^\alpha = 0.$$

DÉMONSTRATION. Notons $(x^1(t), \dots, x^n(t))$ les coordonnées normales de $\exp_p(t\mathbf{v})$. On a donc par définition des coordonnées normales

$$(x^1(t), \dots, x^n(t)) = (tv^1, \dots, tv^n). \quad (3.9)$$

Par ailleurs, au vu de (3.8), on a

$$\begin{aligned}\exp_p(t\mathbf{v}) &= \gamma_{t\mathbf{v}}(1) \\ &= \gamma_{\mathbf{v}}(t),\end{aligned}$$

de telle sorte que $(x^1(t), \dots, x^n(t))$ sont les coordonnées de $\gamma_{\mathbf{v}}(t)$. On déduit alors de (3.9) et (3.7)

$$\Gamma_{\beta\mu|\gamma_{\mathbf{v}}(t)}^\alpha \dot{\gamma}_{\mathbf{v}}^\beta(t) \dot{\gamma}_{\mathbf{v}}^\mu(t) = 0$$

pout tout $0 \leq t \leq 1$. En $t = 0$, on obtient

$$\Gamma_{\beta\mu|_p}^\alpha \mathbf{v}^\beta \mathbf{v}^\mu = 0$$

pour tout $\alpha = 1, \dots, n$ et pour tout \mathbf{v} dans un voisinage de 0. On en déduit

$$\Gamma_{\beta\mu|_p}^\alpha = 0$$

ce qui conclut la preuve. \square

LEMME 3.26. *Dans un système de coordonnées géodésique polaires (r, ω) centrées en p , on a*

$$\mathbf{g}\left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r}\right) = 1, \quad \mathbf{g}\left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \omega^j}\right) = 0.$$

Dans ces coordonnées, on peut donc écrire la métrique sous la forme

$$\mathbf{g} = dr^2 + g_{\alpha\beta}d\omega^\alpha d\omega^\beta.$$

DÉMONSTRATION. On a

$$\mathbf{v} = r\omega$$

où ω vérifie

$$\mathbf{g}(\omega, \omega) = 1.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \exp_p(\mathbf{v}) &= \gamma_{r\omega}(1) \\ &= \gamma_\omega(r) \end{aligned}$$

et donc

$$\frac{\partial}{\partial r} = \dot{\gamma}_\omega(r). \tag{3.10}$$

Comme

$$\mathbf{D}_{\dot{\gamma}_\omega} \mathbf{g}(\dot{\gamma}_\omega, \dot{\gamma}_\omega) = 2\mathbf{g}(\dot{\gamma}_\omega, \mathbf{D}_{\dot{\gamma}_\omega} \dot{\gamma}_\omega) = 0$$

car γ_ω est une géodésique, et comme

$$\mathbf{g}(\dot{\gamma}_\omega(0), \dot{\gamma}_\omega(0)) = \mathbf{g}(\omega, \omega) = 1$$

on en déduit

$$\mathbf{g}(\dot{\gamma}_\omega, \dot{\gamma}_\omega) = 1$$

et donc

$$\mathbf{g}\left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r}\right) = 1$$

ce qui donne la première assertion du lemme.

Concernant la deuxième assertion, on a, en utilisant (3.10)

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{\frac{\partial}{\partial r}} \mathbf{g}\left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \omega^j}\right) &= \mathbf{g}\left(\mathbf{D}_{\frac{\partial}{\partial r}} \frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \omega^j}\right) + \mathbf{g}\left(\frac{\partial}{\partial r}, \mathbf{D}_{\frac{\partial}{\partial r}} \frac{\partial}{\partial \omega^j}\right) \\ &= \mathbf{g}\left(\mathbf{D}_{\dot{\gamma}_\omega} \dot{\gamma}_\omega, \frac{\partial}{\partial \omega^j}\right) + \mathbf{g}\left(\frac{\partial}{\partial r}, \mathbf{D}_{\frac{\partial}{\partial \omega^j}} \frac{\partial}{\partial r}\right) \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{D}_{\frac{\partial}{\partial \omega^j}} \mathbf{g}\left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r}\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

où on a utilisé en particulier le fait que γ_ω est une géodésique et

$$\left[\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \omega^j}\right] = 0.$$

On en déduit que

$$\mathbf{g} \left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \omega^j} \right)$$

est constant le long de $\gamma_\omega(r)$. Or cette quantité est nulle à $r = 0$, et on en déduit donc

$$\mathbf{g} \left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \omega^j} \right) = 0.$$

Ceci conclut la preuve du lemme. \square

On conclut cette section en montrant que les géodésiques minimisent localement la distance entre deux points sur une variété Riemannienne.

PROPOSITION 3.27. *Soit $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$ une variété Riemannienne. Soit $p \in \mathcal{M}$. Il existe un voisinage \mathcal{U}_p de p tel que pour $q \in \mathcal{U}_p$, la géodésique radiale reliant p à q minimise la longueur.*

DÉMONSTRATION. On prend pour \mathcal{U}_p l'ouvert des coordonnées géodésiques polaires centrées en p . Dans ces coordonnées, on a $r(p) = 0$, et q correspond à $(r(q), \omega(q))$. On considère une courbe \mathcal{C}^1 reliant p à q , ce qui revient à se donner en coordonnées géodésiques polaires des fonction \mathcal{C}^1 $(r(t), \omega(t))$, telles que en particulier $r(t)$ varie entre 0 et $r(q)$. Au vu de la définition 3.9 de la longueur d'une courbe \mathcal{C}^1 et du Lemme 3.26, on a

$$\begin{aligned} L &= \int \sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + g_{\alpha\beta} \frac{d\omega^\alpha}{dt} \frac{d\omega^\beta}{dt}} dt \\ &\geq \int \sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2} dt \\ &\geq \int \frac{dr}{dt} dt \\ &= r(q), \end{aligned}$$

avec égalité si et seulement si

$$g_{\alpha\beta} \frac{d\omega^\alpha}{dt} \frac{d\omega^\beta}{dt} = 0 \text{ et } \frac{dr}{dt} \geq 0,$$

et donc

$$\frac{d\omega^\alpha}{dt} = 0.$$

Après éventuelle reparamétrisation, on obtient bien que le minimum de la longueur est atteint par la géodésique radiale reliant p à q puisque celle-ci vérifie dans le système de coordonnées géodésiques polaires

$$\frac{dr}{dt} = 1, \quad \frac{d\omega^\alpha}{dt} = 0.$$

Ceci conclut la preuve du lemme. \square

3.4. Le tenseur de courbure

3.4.1. Définition. Si on considère une courbe γ fermée passant par un point p , et que l'on transporte parallèlement le long de γ un vecteur tangent \mathbf{X} de $T_p\mathcal{M}$ on ne reviendra généralement pas à \mathbf{X} . Cette situation est différente du cas de \mathbb{R}^n et est due au fait que les dérivées covariantes ne commutent pas en général. Pour mesurer cette non commutation, on introduit le tenseur de courbure.

DÉFINITION 3.28. Soient \mathcal{M} une variété, et $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}$ des champs de vecteurs. On définit

$$\mathbf{R}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})\mathbf{Z} = \mathbf{D}_\mathbf{X}\mathbf{D}_\mathbf{Y}\mathbf{Z} - \mathbf{D}_\mathbf{Y}\mathbf{D}_\mathbf{X}\mathbf{Z} - \mathbf{D}_{[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]}\mathbf{Z}. \quad (3.11)$$

PROPOSITION 3.29. \mathbf{R} défini par (3.11) est un champ de tenseurs de type $(1, 3)$.

La preuve résulte d'un simple calcul et est laissée au lecteur. On appelle \mathbf{R} le tenseur de courbure de Riemann, ou simplement tenseur de courbure.

EXEMPLE 3.30. Soit (\mathbb{R}^n, e) l'espace euclidien et soit la connexion de Levi-Civita associée. Alors, le tenseur de courbure correspondant est identiquement nul.

EXEMPLE 3.31. Soit (\mathbb{R}^{1+n}, m) l'espace-temps de Minkowski et soit la connexion de Levi-Civita associée. Alors, le tenseur de courbure correspondant est identiquement nul.

Dans un système de coordonnées, on décompose

$$\mathbf{R}\left(\frac{\partial}{\partial x^\gamma}, \frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)\frac{\partial}{\partial x^\beta} = \mathbf{R}^\alpha{}_{\beta\gamma\mu}\frac{\partial}{\partial x^\alpha}$$

où $\mathbf{R}^\alpha{}_{\beta\gamma\mu}$ est donné par

$$\mathbf{R}^\alpha{}_{\beta\gamma\mu} = \frac{\partial \Gamma^\alpha{}_{\mu\beta}}{\partial x^\gamma} - \frac{\partial \Gamma^\alpha{}_{\gamma\beta}}{\partial x^\mu} + \Gamma^\alpha{}_{\gamma\nu}\Gamma^\nu{}_{\mu\beta} - \Gamma^\alpha{}_{\mu\nu}\Gamma^\nu{}_{\gamma\beta}. \quad (3.12)$$

3.4.2. Symmétries du tenseur de courbure. Pour étudier les symétries de \mathbf{R} , il est plus simple de considérer \mathbf{R} comme un champ de tenseurs de type $(0, 4)$. C'est à dire que l'on considère

$$\mathbf{R}_{\alpha\beta\gamma\mu} = \mathbf{g}_{\alpha\nu}\mathbf{R}^\nu{}_{\beta\gamma\mu}.$$

On peut vérifier que le tenseur de courbure satisfait les symétries suivantes.

PROPOSITION 3.32.

$$\mathbf{R}_{\alpha\beta\gamma\mu} = -\mathbf{R}_{\alpha\beta\mu\gamma},$$

$$\mathbf{R}_{\alpha\beta\gamma\mu} = -\mathbf{R}_{\beta\alpha\gamma\mu},$$

$$\mathbf{R}_{\alpha\beta\gamma\mu} = \mathbf{R}_{\gamma\mu\alpha\beta},$$

et

$$\mathbf{R}_{\alpha\beta\gamma\mu} + \mathbf{R}_{\alpha\mu\beta\gamma} + \mathbf{R}_{\alpha\gamma\mu\beta} = 0$$

où la dernière égalité est appelée première identité de Bianchi. On a également la deuxième identité de Bianchi

$$\mathbf{D}_\nu \mathbf{R}_{\alpha\beta\gamma\mu} + \mathbf{D}_\beta \mathbf{R}_{\nu\alpha\gamma\mu} + \mathbf{D}_\alpha \mathbf{R}_{\beta\nu\gamma\mu} = 0.$$

REMARQUE 3.33. On peut montrer que ces symétries impliquent que le tenseur de courbure a , pour une variété \mathcal{M} de dimension n ,

$$\frac{n^2(n^2 - 1)}{12}$$

composantes indépendantes. En particulier, \mathbf{R} a :

- 1 composante indépendantes en dimension 2,
- 6 composantes indépendantes en dimension 3,
- 20 composantes indépendantes en dimension 4.

3.4.3. Le tenseur de Ricci et la courbure scalaire. En contractant le tenseur de courbure par rapport au premier et au troisième indice, on obtient un 2-tenseur appelé tenseur de Ricci et défini dans un système de coordonnées par

$$\mathbf{Ric}_{\beta\mu} = \mathbf{R}^\alpha_{\beta\alpha\mu}.$$

REMARQUE 3.34. Les symétries de \mathbf{R} impliquent que \mathbf{Ric} est un tenseur symétrique.

REMARQUE 3.35. On aurait pu prendre la trace par rapport à d'autres paires d'indices dans \mathbf{R} pour définir \mathbf{Ric} , mais ceci ne permet pas d'obtenir d'autres tenseurs. En effet, les symétries de \mathbf{R} impliquent que suivant les paires considérées, on obtient soit 0, soit $\pm \mathbf{Ric}$.

En contractant le tenseur de Ricci, on obtient un scalaire appelé la courbure scalaire, et donné par

$$\mathbf{Rscal} = \mathbf{g}^{\alpha\beta} \mathbf{Ric}_{\alpha\beta}.$$

3.5. Isométries et champs de Killing

DÉFINITION 3.36. Un difféomorphisme $\phi : \mathcal{U} \subset \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ est une isométrie si en chaque point p , on a

$$\phi^* \mathbf{g} = \mathbf{g}.$$

DÉFINITION 3.37. Un champ de vecteurs qui génère un groupe à un paramètre d'isométries est appelé champ de Killing.

PROPOSITION 3.38. Soit $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$ une variété munie d'une métrique. Un champ de vecteurs \mathbf{K} est un champ de Killing si et seulement si on a

$$\mathcal{L}_{\mathbf{K}} \mathbf{g} = 0.$$

DÉMONSTRATION. Soit ϕ_t le groupe à 1 paramètre généré par \mathbf{K} . Soient \mathbf{X}, \mathbf{Y} deux champs de vecteurs sur \mathcal{M} . On a

$$(\phi_t)^* \mathbf{g}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})|_p = \mathbf{g}((\phi_t)_* \mathbf{X}, (\phi_t)_* \mathbf{Y})|_{\phi_t(p)}.$$

Rappelons que on a montré dans la Proposition 2.44

$$\frac{d}{dt} [(\phi_t)_* \mathbf{X}]_{t=0} = -\mathcal{L}_{\mathbf{K}} \mathbf{X}.$$

On a donc

$$\frac{d}{dt} \left[\mathbf{g}((\phi_t)_* \mathbf{X}, (\phi_t)_* \mathbf{Y})_{|\phi_t(p)} \right]_{t=0} = \mathbf{K}(\mathbf{g}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})) - \mathbf{g}(\mathcal{L}_{\mathbf{K}} \mathbf{X}, \mathbf{Y}) - \mathbf{g}(\mathbf{X}, \mathcal{L}_{\mathbf{K}} \mathbf{Y}).$$

On obtient donc par les propriétés de la dérivation de Lie :

$$\frac{d}{dt} \left[\mathbf{g}((\phi_t)_* \mathbf{X}, (\phi_t)_* \mathbf{Y})_{|\phi_t(p)} \right]_{t=0} = \mathcal{L}_{\mathbf{K}} \mathbf{g}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}).$$

Supposons que ϕ_t est une isométrie pour tout t . Alors, on a

$$\mathbf{g}((\phi_t)_* \mathbf{X}, (\phi_t)_* \mathbf{Y})_{|\phi_t(p)} = \mathbf{g}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})_{|p}$$

et donc

$$\frac{d}{dt} \left[\mathbf{g}((\phi_t)_* \mathbf{X}, (\phi_t)_* \mathbf{Y})_{|\phi_t(p)} \right]_{t=0} = 0.$$

On en déduit que

$$\mathcal{L}_{\mathbf{K}} \mathbf{g}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = 0$$

pour tous champs de vecteurs \mathbf{X} et \mathbf{Y} sur \mathcal{M} , et donc

$$\mathcal{L}_{\mathbf{K}} \mathbf{g} = 0.$$

Réciproquement, supposons que \mathbf{K} vérifie

$$\mathcal{L}_{\mathbf{K}} \mathbf{g} = 0.$$

Alors, le calcul précédent et le fait que $(\phi_{t+t'})_* = (\phi_t)_* (\phi_{t'})_*$ montrent que l'on a pour tout t

$$\frac{d}{dt} \left[\mathbf{g}((\phi_t)_* \mathbf{X}, (\phi_t)_* \mathbf{Y})_{|\phi_t(p)} \right] = 0.$$

Donc

$$(\phi_t)_* \mathbf{g}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})_{|p} = (\phi_0)_* \mathbf{g}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})_{|p} = \mathbf{g}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})_{|p},$$

ce qui montre bien que ϕ_t est une isométrie pour tout t . □

DÉFINITION 3.39. Soit \mathbf{X} un champ de vecteurs. On note ${}^{(\mathbf{X})}\pi$ le tenseur de déformation de \mathbf{X} défini par la formule suivante

$${}^{(\mathbf{X})}\pi_{\alpha\beta} = \mathbf{D}_{\alpha} \mathbf{X}_{\beta} + \mathbf{D}_{\beta} \mathbf{X}_{\alpha}.$$

PROPOSITION 3.40. Soit \mathbf{X} un champ de vecteurs, alors on a

$${}^{(\mathbf{X})}\pi = \mathcal{L}_{\mathbf{X}} \mathbf{g}.$$

DÉMONSTRATION. Soient \mathbf{Y}, \mathbf{Z} champs de vecteurs. On a

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(\mathbf{g}(\mathbf{Y}, \mathbf{Z})) &= \mathcal{L}_{\mathbf{X}}(\mathbf{g}(\mathbf{Y}, \mathbf{Z})) \\ &= \mathcal{L}_{\mathbf{X}}\mathbf{g}(\mathbf{Y}, \mathbf{Z}) + \mathbf{g}(\mathcal{L}_{\mathbf{X}}\mathbf{Y}, \mathbf{Z}) + \mathbf{g}(\mathbf{Y}, \mathcal{L}_{\mathbf{X}}\mathbf{Z}) \\ &= \mathcal{L}_{\mathbf{X}}\mathbf{g}(\mathbf{Y}, \mathbf{Z}) + \mathbf{g}([\mathbf{X}, \mathbf{Y}], \mathbf{Z}) + \mathbf{g}(\mathbf{Y}, [\mathbf{X}, \mathbf{Z}]) \\ &= \mathcal{L}_{\mathbf{X}}\mathbf{g}(\mathbf{Y}, \mathbf{Z}) + \mathbf{g}(\mathbf{D}_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} - \mathbf{D}_{\mathbf{Y}}\mathbf{X}, \mathbf{Z}) + \mathbf{g}(\mathbf{Y}, \mathbf{D}_{\mathbf{X}}\mathbf{Z} - \mathbf{D}_{\mathbf{Z}}\mathbf{X}). \end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(\mathbf{g}(\mathbf{Y}, \mathbf{Z})) &= \mathbf{D}_{\mathbf{X}}(\mathbf{g}(\mathbf{Y}, \mathbf{Z})) \\ &= \mathbf{D}_{\mathbf{X}}\mathbf{g}(\mathbf{Y}, \mathbf{Z}) + \mathbf{g}(\mathbf{D}_{\mathbf{X}}\mathbf{Y}, \mathbf{Z}) + \mathbf{g}(\mathbf{Y}, \mathbf{D}_{\mathbf{X}}\mathbf{Z}) \\ &= \mathbf{g}(\mathbf{D}_{\mathbf{X}}\mathbf{Y}, \mathbf{Z}) + \mathbf{g}(\mathbf{Y}, \mathbf{D}_{\mathbf{X}}\mathbf{Z}). \end{aligned}$$

On en déduit

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\mathbf{X}}\mathbf{g}(\mathbf{Y}, \mathbf{Z}) &= \mathbf{g}(\mathbf{D}_{\mathbf{X}}\mathbf{Y}, \mathbf{Z}) + \mathbf{g}(\mathbf{Y}, \mathbf{D}_{\mathbf{X}}\mathbf{Z}) - \mathbf{g}(\mathbf{D}_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} - \mathbf{D}_{\mathbf{Y}}\mathbf{X}, \mathbf{Z}) - \mathbf{g}(\mathbf{Y}, \mathbf{D}_{\mathbf{X}}\mathbf{Z} - \mathbf{D}_{\mathbf{Z}}\mathbf{X}) \\ &= \mathbf{g}(\mathbf{D}_{\mathbf{Y}}\mathbf{X}, \mathbf{Z}) + \mathbf{g}(\mathbf{Y}, \mathbf{D}_{\mathbf{Z}}\mathbf{X}) \\ &= \mathbf{Y}^{\alpha}\mathbf{Z}^{\beta}(\mathbf{D}_{\alpha}\mathbf{X}_{\beta} + \mathbf{D}_{\beta}\mathbf{X}_{\alpha}) \\ &= \mathbf{Y}^{\alpha}\mathbf{Z}^{\beta(\mathbf{X})}\pi_{\alpha\beta} \end{aligned}$$

ce qui conclut la preuve. □

On en déduit le corollaire suivant.

COROLLAIRE 3.41. *Soit $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$ une variété munie d'une métrique. Un champ de vecteurs \mathbf{K} est un champ de Killing si et seulement si on a*

$${}^{(\mathbf{K})}\pi = 0.$$

REMARQUE 3.42. *Le fait qu'un espace-temps possède un champ de Killing est une situation exceptionnelle. En effet, ${}^{(\mathbf{K})}\pi = 0$ correspond à un système de $\frac{n(n+1)}{2}$ équations à n inconnues.*

3.6. Hypersurfaces

DÉFINITION 3.43. *Soit $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$ une variété de dimension n . Soit $\mathcal{H} \subset \mathcal{M}$ tel que \mathcal{H} est une sous variété de \mathcal{M} de dimension $n - 1$. On dit alors que \mathcal{H} est une hypersurface de \mathcal{M} .*

La Proposition 2.32 fournit un exemple important d'hypersurface.

EXEMPLE 3.44. *Soit $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$ une variété de dimension n . Soit $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^r telle que $df_p \neq 0$ pour tout $p \in \mathcal{M}$. Alors, les ensembles de niveau de f sont des hypersurfaces de \mathcal{M} .*

On peut considérer la métrique g induite par \mathbf{g} sur \mathcal{H} , c'est à dire pour tout $p \in \mathcal{H}$, et tous vecteurs \mathbf{X}, \mathbf{Y} de $T_p\mathcal{H}$, alors $p \in \mathcal{M}$ et $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in T_p\mathcal{M}$, donc on peut définir

$$g_p(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \mathbf{g}_p(\mathbf{X}, \mathbf{Y}).$$

On peut alors associer à g une dérivée covariante appelée la dérivée covariante induite, ainsi qu'un tenseur de courbure induit.

Pour tout $p \in \mathcal{H}$, $T_p\mathcal{H}$ a pour dimension $n - 1$, et est donc un hyperplan de $T_p\mathcal{M}$. Il existe donc \mathbf{N} qui est un vecteur de $T_p\mathcal{M}$ normal à $T_p\mathcal{H}$ au sens où pour tout $\mathbf{X} \in T_p\mathcal{H}$, on a

$$\mathbf{g}(\mathbf{X}, \mathbf{N}) = 0.$$

Sous certaines hypothèses sur \mathcal{H} , on peut choisir \mathbf{N} en tout point $p \in \mathcal{H}$ tel que \mathbf{N} soit un champ de vecteurs non nul en tout $p \in \mathcal{H}$. Dans ce cas, des arguments simples d'algèbre linéaire permettent de montrer que

- (1) Si $\mathbf{g}(\mathbf{N}, \mathbf{N}) > 0$ sur \mathcal{H} , alors g est une métrique Lorentzienne sur \mathcal{H} . On dit alors que \mathcal{H} est une hypersurface de genre temps.
- (2) Si $\mathbf{g}(\mathbf{N}, \mathbf{N}) < 0$ sur \mathcal{H} , alors g est une métrique Riemannienne sur \mathcal{H} . On dit alors que \mathcal{H} est une hypersurface de genre espace.
- (3) Si $\mathbf{g}(\mathbf{N}, \mathbf{N}) = 0$ sur \mathcal{H} , alors g est dégénérée sur \mathcal{H} . On dit alors que \mathcal{H} est une hypersurface nulle (ou de genre lumière).

EXEMPLE 3.45. On considère l'espace de Minkowski (\mathbb{R}^{1+n}, m) (voir exemple 3.5). Soit $a \in \mathbb{R}$. Alors

$$\{t = a\}$$

est une hypersurface de genre espace,

$$\{x^1 = a\}$$

est une hypersurface de genre temps, et

$$\{t + x^1 = a\}$$

est une hypersurface nulle.

Dans le cas où \mathcal{H} est une hypersurface de genre temps, on peut normaliser le champ de vecteurs \mathbf{N} de sorte que

$$\mathbf{g}(\mathbf{N}, \mathbf{N}) = 1.$$

Dans le cas où \mathcal{H} est une hypersurface de genre espace, on peut normaliser le champ de vecteurs \mathbf{N} de sorte que

$$\mathbf{g}(\mathbf{N}, \mathbf{N}) = -1.$$

Enfin, on introduit la seconde forme fondamentale θ de \mathcal{H} . On dit qu'un champ de vecteurs \mathbf{X} sur \mathcal{M} est tangent à \mathcal{H} si pour tout $p \in \mathcal{H}$, \mathbf{X}_p est un vecteur de $T_p\mathcal{H}$.

La seconde forme fondamentale θ est donnée pour tout $p \in \mathcal{H}$ et pour tous champs de vecteurs \mathbf{X}, \mathbf{Y} sur \mathcal{M} tangents à \mathcal{H} par

$$\theta(\mathbf{X}, \mathbf{Y})_p = -\mathbf{g}(\mathbf{D}_\mathbf{X}\mathbf{N}, \mathbf{Y})_p.$$

La seconde forme fondamentale est donc un 2-tenseur sur \mathcal{H} .

LEMME 3.46. *La seconde forme fondamentale est un 2-tenseur symétrique.*

DÉMONSTRATION. Soient \mathbf{X} et \mathbf{Y} des champs de vecteurs sur \mathcal{M} tangents à \mathcal{H} . En particulier, on a pour tout $p \in \mathcal{H}$:

$$\mathbf{g}(\mathbf{X}, \mathbf{N}) = \mathbf{g}(\mathbf{Y}, \mathbf{N}) = 0.$$

Alors, on a

$$\begin{aligned} \theta(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) - \theta(\mathbf{Y}, \mathbf{X}) &= -\mathbf{g}(\mathbf{D}_\mathbf{X}\mathbf{N}, \mathbf{Y}) + \mathbf{g}(\mathbf{D}_\mathbf{Y}\mathbf{N}, \mathbf{X}) \\ &= \mathbf{g}(\mathbf{N}, \mathbf{D}_\mathbf{X}\mathbf{Y}) - \mathbf{g}(\mathbf{N}, \mathbf{D}_\mathbf{Y}\mathbf{X}) \\ &= \mathbf{g}(\mathbf{N}, \mathbf{D}_\mathbf{X}\mathbf{Y} - \mathbf{D}_\mathbf{Y}\mathbf{X}) \\ &= \mathbf{g}(\mathbf{N}, [\mathbf{X}, \mathbf{Y}]) \\ &= 0 \end{aligned}$$

où on a utilisé le fait que $[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]_p \in T_p\mathcal{H}$ pour tout $p \in \mathcal{H}$ puisque \mathbf{X} et \mathbf{Y} sont des champs de vecteurs tangents à \mathcal{H} . \square

3.7. Métriques conformes

DÉFINITION 3.47. *Deux métriques \mathbf{g} et $\tilde{\mathbf{g}}$ sur \mathcal{M} sont dites conformes si il existe une fonction scalaire Ω*

$$\Omega : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$$

telle que $\Omega(p) \neq 0$ pour tout $p \in \mathcal{M}$, et

$$\mathbf{g} = \Omega^2 \tilde{\mathbf{g}}.$$

On dit alors que \mathbf{g} et $\tilde{\mathbf{g}}$ appartiennent à la même classe conforme.

Si \mathbf{g} et $\tilde{\mathbf{g}}$ sont dans la même classe conforme, alors les angles mesurés par \mathbf{g} ou $\tilde{\mathbf{g}}$ sont les mêmes. En particulier, pour un vecteur tangent \mathbf{X} en un point $p \in \mathcal{M}$, on a respectivement :

$$\mathbf{g}(\mathbf{X}, \mathbf{X}) < 0, = 0, > 0 \iff \tilde{\mathbf{g}}(\mathbf{X}, \mathbf{X}) < 0, = 0, > 0.$$

Par conséquent, \mathbf{g} et $\tilde{\mathbf{g}}$ définissent les mêmes hypersurfaces de genre temps, de genre espace et de genre lumière.

3.8. Intégration

Soit $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$ une variété de dimension n munie d'une métrique. Dans un système de coordonnées, on définit $\det \mathbf{g}$ comme le déterminant de la matrice $n \times n$ $(\mathbf{g}_{\alpha\beta})$. On a le lemme suivant :

LEMME 3.48. *Soient \mathcal{U} un ouvert de coordonnées, et x^1, \dots, x^n les coordonnées correspondantes. Soit $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction scalaire. Alors*

$$\int_{\mathcal{U}} f \sqrt{|\det \mathbf{g}|} dx^1 \cdots dx^n$$

est invariant par changement de coordonnées.

DÉMONSTRATION. On a

$$\mathbf{g} \left(\frac{\partial}{\partial x^{\alpha'}}, \frac{\partial}{\partial x^{\beta'}} \right) = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\beta'}} \mathbf{g} \left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}, \frac{\partial}{\partial x^\beta} \right).$$

On en déduit que

$$\sqrt{|\det(\mathbf{g}_{\alpha'\beta'})|} = \left| \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}} \right| \sqrt{|\det(\mathbf{g}_{\alpha\beta})|}$$

et le terme

$$\left| \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}} \right|$$

est compensé par la formule du changement de variables. \square

Via une partition de l'unité ψ_α adaptée à un recouvrement de \mathcal{M} par des ouverts \mathcal{U}_α de coordonnées, on définit l'intégrale de f sur \mathcal{M} par

$$\int f d\mathcal{M} = \sum_{\alpha} \int_{\mathcal{U}_\alpha} \psi_\alpha f \sqrt{|\det \mathbf{g}|} dx^1 \cdots dx^n.$$

Cette définition est indépendante du recouvrement \mathcal{U}_α de \mathcal{M} et de la partition de l'unité ψ_α par le lemme précédent.

3.9. Exercices

Exercice 1. Soient \mathbf{g} et \mathbf{g}' deux métriques conformes sur une variété \mathcal{M} donnée, c'est à dire telles que $\mathbf{g}' = e^{2f} \mathbf{g}$ pour une fonction $f \in \mathcal{C}^\infty$ sur \mathcal{M} . Montrer que la connexion de Levi-Civita \mathbf{D}' de \mathbf{g}' s'exprime en terme de la connexion de Levi-Civita \mathbf{D} de \mathbf{g} sous la forme :

$$\mathbf{D}'_{\mathbf{X}} \mathbf{Y} = \mathbf{D}_{\mathbf{X}} \mathbf{Y} + \mathbf{X}(f) \mathbf{Y} + \mathbf{Y}(f) \mathbf{X} - \mathbf{g}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \text{grad}(f),$$

où $\text{grad}(f)$ désigne le gradient de f , c'est à dire l'unique champ de vecteurs tel que

$$\mathbf{g}(\text{grad}(f), \mathbf{X}) = \mathbf{X}(f)$$

pour tout champ de vecteurs \mathbf{X} .

Exercice 2. Soit \mathcal{M} une surface de \mathbb{R}^3 (c'est à dire une sous-variété de \mathbb{R}^3 de dimension 2) munie de la métrique induite par la métrique euclidienne. On note \mathbf{D} la connexion plate sur \mathbb{R}^3 et ∇ la connexion induite sur \mathcal{M} .

- Soit $p \in \mathcal{M}$ et soient \mathbf{X} et \mathbf{Y} deux champs de vecteurs de \mathbb{R}^3 tangents à \mathcal{M} . Montrer que $\mathbf{D}_{\mathbf{X}}\mathbf{Y}_p - \nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y}_p$ est colinéaire à la normale \mathbf{N} à \mathcal{M} en p .
- Soit $\gamma(s)$ une courbe sur \mathcal{M} paramétrée par la longueur d'arc. Montrer que γ est une géodésique si et seulement si $\ddot{\gamma}$ est dirigée selon la normale.
- Conclure que les géodésiques sur la sphère sont les grands cercles.

Exercice 3. On s'intéresse au demi-plan complexe supérieure

$$P = \{z / z = x + iy \in \mathbb{C}, y > 0\}$$

muni de la métrique riemannienne

$$\mathbf{g} = \frac{1}{y^2}((dx)^2 + (dy)^2).$$

- Montrer que toute géodésique de P est soit une droite verticale, soit un demi-cercle centré sur l'axe réel.
- Etant données deux géodésiques γ_1 et γ_2 de P , issues du même point et ayant un vecteur vitesse de norme 1, donner un équivalent de

$$\lim_{t \rightarrow \infty} d(\gamma_1(t), \gamma_2(t))$$

où d désigne la distance pour la métrique \mathbf{g} . Comparer avec le cas euclidien.

Exercice 4. Soit $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$ une variété munie d'une métrique. Soit γ une géodésique. Supposons qu'il existe un champ de Killing \mathbf{K} . Montrer que $\mathbf{g}(\dot{\gamma}, \mathbf{K})$ est constant le long de γ .

Exercice 5. Soit $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$ une variété Riemannienne, et soit $\mathcal{H} \subset \mathcal{M}$ une hypersurface munie de la métrique induite. Soit k la seconde forme fondamentale correspondante. On note \mathbf{R} le tenseur de courbure de \mathcal{M} , et R le tenseur de courbure sur \mathcal{H} .

- Montrer le théorème de Gauss

$$\mathbf{R}_{ijlm} = R_{ijlm} - k_{mj}k_{li} + k_{lj}k_{mi}.$$

Ecrire la relation correspondante pour le tenseur de Ricci et la courbure scalaire.

- Supposons maintenant que $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$ est \mathbb{R}^n muni de la métrique euclidienne, et \mathcal{H} une hypersurface de \mathbb{R}^n munie de la métrique induite. En déduire le calcul de R , Ric et Rscal en fonction de la seconde forme fondamentale.
- Calculer la seconde forme fondamentale de la sphère. En déduire le tenseur de courbure, de Ricci et la courbure scalaire de la sphère.

Exercice 6. On s'intéresse au demi-plan complexe

$$P = \{z \in \mathbb{C} / z = x + iy, y > 0\}$$

muni de la métrique dite hyperbolique

$$\mathbf{g} = \frac{1}{y^2}((dx)^2 + (dy)^2).$$

- a) Montrer que la symétrie $s(z) = -\bar{z}$ est une isométrie de \mathbf{g} .
 b) Montrer que les transformations homographiques $z \rightarrow h(z)$ où

$$h(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

avec $ad - bc = 1$ sont des isométries de \mathbf{g} .

- c) A-t-on ainsi une description complète des isométries de \mathbf{g} ? On commencera par montrer que la distance géodésique entre deux points de P est donnée par la formule suivante

$$d_{\mathbf{g}}(z_1, z_2) = \operatorname{argcosh} \left(1 + \frac{|z_1 - z_2|^2}{2y_1y_2} \right).$$

CHAPITRE 4

Relativité restreinte

4.1. Physique Newtonienne

Les hypothèses de base de la physique Newtonienne sont que

- (1) Il y a une notion de temps absolu.
- (2) La vitesse de la lumière est finie et dépend de l'observateur.
- (3) Un observateur peut voyager arbitrairement vite (et en particulier, plus vite que la vitesse de la lumière).

Des hypothèses ci-dessus, on peut immédiatement en déduire l'existence d'une coordonnée de type temps $t \in \mathbb{R}$ telle que tous les événements à t constant ont lieu dans l'espace Euclidien à 3 dimension. En particulier, l'univers, ou espace-temps, est équivalent à \mathbb{R}^4 et admet un système de coordonnées universel (t, x^1, x^2, x^3) .

En particulier, soit un événement p , c'est à dire $p \in \mathbb{R}^4$, dont on note la coordonnée de temps t_p . Alors on peut décomposer l'espace-temps en trois régions :

- Le futur de p : l'ensemble de tous les événements pour lesquels $t > t_p$.
- Le présent de p : l'ensemble de tous les événements pour lesquels $t = t_p$.
- Le passé de p : l'ensemble de tous les événements pour lesquels $t < t_p$.

Le théorie Newtonienne est très précise dans sa description d'objets voyageant à des petites vitesses en l'absence d'un champ de gravitation fort. Mais, lorsque les vitesses deviennent comparables à celle de la lumière, des contradictions surgissent. En effet, la physique Newtonienne est compatible avec l'invariance de Galilée qui décrit la relation entre deux observateurs en translation uniforme l'un par rapport à l'autre. En particulier, le principe d'addition des vitesses implique qu'un observateur P voyageant à la vitesse $\frac{c}{5}$ par rapport à O et se déplaçant vers un faisceau lumineux (qui voyage à la vitesse c par rapport à O) devrait observer une vitesse $c + \frac{c}{5}$. Ceci n'est dans la pratique jamais observé, et la vitesse de la lumière est toujours donnée par c dans n'importe quel référentiel. C'est d'ailleurs ce que prédisent les équations de Maxwell (c'est à dire les équations de l'électromagnétisme) énoncées en 1865, et qui comportent une constante universelle (qui donc ne dépend pas de l'observateur) correspondant à la vitesse de la lumière dans le vide.

C'est pour résoudre cette contradiction entre la théorie de Newton et les équations de l'électromagnétisme que Einstein, dans [3], va introduire la théorie de la relativité restreinte.

4.2. La naissance de la relativité restreinte

En 1905, Einstein donne des relations algébriques décrivant le mouvement uniforme d'observateurs de telle sorte que les équations de Maxwell ont la même forme quelque soit le référentiel de l'observateur. Pour atteindre ce but, Einstein émet les hypothèses (révolutionnaires !) suivantes :

- (1) Il n'y a pas de notion de temps absolu. Le temps est relatif à l'observateur.
- (2) Aucun observateur, ou aucune particule, ne peut voyager plus vite que la lumière. La constante c doit être considérée comme une loi physique et ne dépend donc pas de l'observateur qui la mesure.

Ces hypothèses changent immédiatement la perception Newtonienne de l'univers, ou espace-temps. En particulier, soit un événement p , c'est à dire $p \in \mathbb{R}^4$. Alors :

- Le futur de p est le cône de lumière dirigé vers le futur d'origine p .
- Le passé de p est le cône de lumière dirigé vers le passé d'origine p .

En 1908, Minkowski, dans [7], montre que les lois algébriques d'Einstein peuvent être réinterprétées de manière purement géométrique en introduisant sur \mathbb{R}^4 la métrique de Minkowski.

4.3. Symétries de l'espace-temps de Minkowski

On considère l'espace de Minkowski (\mathbb{R}^{1+3}, m) . On a les isométries suivantes

- (1) Les translations : $x \rightarrow x + a$ pour $a \in \mathbb{R}^{1+3}$.
- (2) Les transformations de Lorentz : $x \rightarrow Ax$ où A est une matrice 4×4 qui satisfait

$$m(Ax, Ay) = m(x, y)$$

pour tous x, y dans \mathbb{R}^{1+3} .

REMARQUE 4.1. *Le groupe généré par ces isométries est appelé le groupe de Poincaré.*

EXEMPLE 4.2. *Pour toute matrice 3×3 orthogonale A_1 , la matrice*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}$$

est une transformation de Lorentz.

EXEMPLE 4.3. *Pour tout $t \in \mathbb{R}$, la matrice*

$$\begin{pmatrix} \cosh(t) & \sinh(t) & 0 & 0 \\ \sinh(t) & \cosh(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est une transformation de Lorentz appelée rotation hyperbolique.

Comme on l'a vu dans la section 3.5, ces isométries correspondent à des champs de Killing :

(1) Le générateur de la translation dans la direction x^α , $\alpha = 0, 1, 2, 3$ est donné par

$$T_\alpha = \frac{\partial}{\partial x^\alpha}.$$

(2) Le générateur de la transformation de Lorentz dans le plan (x^α, x^β) est donné par

$$L_{\alpha\beta} = x_\alpha \frac{\partial}{\partial x^\beta} - x_\beta \frac{\partial}{\partial x^\alpha}.$$

On obtient ainsi 10 champs de Killing sur (\mathbb{R}^{1+3}, m) . Il se trouve que c'est le nombre maximum de champs de Killing possibles pour une variété Lorentzienne de dimension 4, comme on peut le déduire de la proposition suivante.

PROPOSITION 4.4. *Sur une variété $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$ connexe de dimension n , il y a au plus*

$$\frac{n(n+1)}{2}$$

champs de Killing indépendants.

DÉMONSTRATION. Soit \mathbf{K} un champ de Killing. Alors on a

$$\mathbf{D}_\alpha K_\beta + \mathbf{D}_\beta K_\alpha = 0$$

ce qui implique

$$\mathbf{D}_\gamma \mathbf{D}_\alpha K_\beta + \mathbf{D}_\gamma \mathbf{D}_\beta K_\alpha = 0.$$

En commutant les dérivées, on fait intervenir la courbure

$$\mathbf{D}_\alpha \mathbf{D}_\gamma K_\beta + \mathbf{D}_\beta \mathbf{D}_\gamma K_\alpha = \mathbf{R}_{\mu\beta\gamma\alpha} K^\mu + \mathbf{R}_{\mu\alpha\gamma\beta} K^\mu.$$

En utilisant le fait que \mathbf{K} est un champ de Killing, on en déduit

$$\mathbf{D}_\alpha \mathbf{D}_\beta K_\gamma + \mathbf{D}_\beta \mathbf{D}_\alpha K_\gamma = -\mathbf{R}_{\mu\beta\gamma\alpha} K^\mu - \mathbf{R}_{\mu\alpha\gamma\beta} K^\mu.$$

En commutant une nouvelle fois, on obtient

$$2\mathbf{D}_\alpha \mathbf{D}_\beta K_\gamma = -\mathbf{R}_{\mu\beta\gamma\alpha} K^\mu - \mathbf{R}_{\mu\alpha\gamma\beta} K^\mu + \mathbf{R}_{\mu\gamma\beta\alpha} K^\mu.$$

Les symétries de \mathbf{R} impliquent alors

$$\mathbf{D}_\alpha \mathbf{D}_\beta K_\gamma = \mathbf{R}_{\mu\alpha\beta\gamma} K^\mu. \tag{4.1}$$

On définit le 2-tenseur

$$L_{\alpha\beta} = \mathbf{D}_\alpha K_\beta.$$

D'après (4.1), on a

$$\mathbf{D}_\alpha L_{\beta\gamma} = \mathbf{R}_{\mu\alpha\beta\gamma} K^\mu. \quad (4.2)$$

Comme \mathbf{K} est un champ de Killing, on voit que \mathbf{L} est antisymétrique.

Soient p et q deux points de \mathcal{M} connectés par une courbe λ sur \mathcal{M} . D'après la définition de \mathbf{L} et (4.2), on a

$$\begin{cases} \mathbf{D}_{\dot{\lambda}(t)} K_\alpha = L_{\dot{\lambda}(t)\alpha}, \\ \mathbf{D}_{\dot{\lambda}(t)} L_{\alpha\beta} = \mathbf{R}_{\mu\dot{\lambda}(t)\alpha\beta} K^\mu. \end{cases} \quad (4.3)$$

Donc $(\mathbf{K}|_{\gamma(t)}, \mathbf{L}|_{\gamma(t)})$ vérifie un système de

$$n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

équations différentielles ordinaires, où on a utilisé le fait que \mathbf{L} est antisymétrique. En particulier, $\mathbf{K}|_q$ est entièrement déterminé par la condition initiale en p du système d'équations différentielles ordinaires (4.3), c'est à dire par la donnée des

$$\frac{n(n+1)}{2}$$

valeurs de \mathbf{K} et \mathbf{L} en p . □

4.4. Les équations de l'électromagnétisme

On s'intéresse à la formulation de l'électromagnétisme dans le cadre de la relativité restreinte. Ceci est instructif car les équations de Maxwell comportent un certain nombre de similitudes avec les équations d'Einstein.

On se place dans l'espace de Minkowski de dimension 4 (\mathbb{R}^{1+3}, m) . On rappelle que les équations de Maxwell s'écrivent

$$\begin{cases} \operatorname{div}(B) & = 0, \\ \frac{\partial B}{\partial t} + \operatorname{rot}(E) & = 0, \\ \operatorname{div}(E) & = \rho, \\ -\frac{\partial E}{\partial t} + \operatorname{rot}(B) & = J, \end{cases}$$

où E est le champ électrique, B le champ magnétique, J le courant et ρ la densité de charge. On introduit le 2-tenseur antisymétrique F que l'on définit à partir de E et B de la manière suivante

$$(F_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ -E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ -E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Un calcul montre alors que les équations de Maxwell se réécrivent de la manière suivante

$$\begin{cases} \mathbf{D}_\alpha F_{\beta\gamma} + \mathbf{D}_\gamma F_{\alpha\beta} + \mathbf{D}_\beta F_{\gamma\alpha} = 0, \\ \mathbf{D}^\alpha F_{\alpha\beta} = j_\beta, \end{cases}$$

où on a posé $j = (\rho, J)$. En particulier, le cas des équations de Maxwell dans le vide, c'est à dire $j = 0$, correspond à

$$\begin{cases} \mathbf{D}_\alpha F_{\beta\gamma} + \mathbf{D}_\gamma F_{\alpha\beta} + \mathbf{D}_\beta F_{\gamma\alpha} = 0, \\ \mathbf{D}^\alpha F_{\alpha\beta} = 0. \end{cases} \quad (4.4)$$

Dans la suite, on considère (4.4).

4.4.1. La formulation Lagrangienne de l'électromagnétisme. On considère maintenant l'ensemble Ω des 2-tenseurs antisymétriques H de (\mathbb{R}^{1+3}, m) vérifiant

$$\mathbf{D}_\alpha H_{\beta\gamma} + \mathbf{D}_\gamma H_{\alpha\beta} + \mathbf{D}_\beta H_{\gamma\alpha} = 0.$$

On introduit le Lagrangien \mathcal{L}_{EM} sur Ω . Soit $H \in \Omega$, alors on définit

$$\mathcal{L}_{EM}(H) = \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^{1+3}} H^{\alpha\beta} H_{\alpha\beta} dt dx.$$

On suppose maintenant que F est un point critique du Lagrangien \mathcal{L}_{EM} . Alors on a immédiatement

$$0 = \frac{d}{dt} \mathcal{L}_{EM}(F + tH)|_{t=0} = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^{1+3}} H^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} dt dx \quad (4.5)$$

pour tout H dans Ω .

On remarque que si ω est un tenseur de type $(0, 1)$, alors

$$\mathbf{D}_\alpha \omega_\beta - \mathbf{D}_\beta \omega_\alpha \in \Omega.$$

En effet, $H_{\alpha\beta} = \mathbf{D}_\alpha \omega_\beta - \mathbf{D}_\beta \omega_\alpha$ vérifie bien

$$\mathbf{D}_\alpha H_{\beta\gamma} + \mathbf{D}_\gamma H_{\alpha\beta} + \mathbf{D}_\beta H_{\gamma\alpha} = 0$$

puisque le tenseur de courbure de la métrique de Minkowski est nul (en fait, c'est aussi vrai pour une métrique générale grâce à la première identité de Bianchi). On peut donc choisir $H_{\alpha\beta} = \mathbf{D}_\alpha \omega_\beta - \mathbf{D}_\beta \omega_\alpha$ dans (4.5), et on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^{1+3}} \mathbf{D}^\alpha \omega^\beta F_{\alpha\beta} dt dx = 0$$

ce qui après intégration par parties implique

$$\int_{\mathbb{R}^{1+3}} \omega^\beta \mathbf{D}^\alpha F_{\alpha\beta} dt dx = 0$$

pour tout tenseur ω de type $(0, 1)$. En choisissant

$$\omega_0 = 0, \omega_j = \mathbf{D}^\alpha F_{\alpha j} \text{ puis } \omega_0 = \mathbf{D}^\alpha F_{\alpha 0}, \omega_i = 0,$$

on en déduit

$$\mathbf{D}^\alpha F_{\alpha\beta} = 0.$$

Comme F appartient à Ω , on a donc obtenu les équations de Maxwell dans le vide (4.4) comme point critique d'un Lagrangien.

4.4.2. Le tenseur d'énergie-impulsion.

DÉFINITION 4.5. Soit F un 2-tenseur antisymétrique solution des équations de Maxwell dans le vide (4.4). On définit le tenseur d'énergie-impulsion par

$$T_{\alpha\beta} = F_{\alpha\gamma} F_{\beta}{}^\gamma - \frac{1}{4} m_{\alpha\beta} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}.$$

PROPOSITION 4.6. Le tenseur d'énergie-impulsion a les propriétés suivantes :

- (1) $T_{\alpha\beta}$ est un 2-tenseur symétrique.
- (2) $\mathbf{D}^\alpha T_{\alpha\beta} = 0$.
- (3) $T_{00} = \frac{1}{2}(|E|^2 + |B|^2)$.

DÉMONSTRATION. La propriété (1) est claire. Concernant la propriété (2), on a en utilisant les équations de Maxwell dans le vide et l'antisymétrie de F :

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^\alpha T_{\alpha\beta} &= \mathbf{D}^\alpha F_{\alpha\gamma} F_{\beta}{}^\gamma + F_{\alpha\gamma} \mathbf{D}^\alpha F_{\beta}{}^\gamma - \frac{1}{2} m_{\alpha\beta} F^{\mu\nu} \mathbf{D}^\alpha F_{\mu\nu} \\ &= F_{\alpha\gamma} \mathbf{D}^\alpha F_{\beta}{}^\gamma - \frac{1}{2} F^{\mu\nu} \mathbf{D}_\beta F_{\mu\nu} \\ &= F^{\mu\nu} \left(\mathbf{D}_\mu F_{\beta\nu} - \frac{1}{2} \mathbf{D}_\beta F_{\mu\nu} \right) \\ &= \frac{1}{2} F^{\mu\nu} (\mathbf{D}_\mu F_{\beta\nu} - \mathbf{D}_\nu F_{\beta\mu} - \mathbf{D}_\beta F_{\mu\nu}) \\ &= -\frac{1}{2} F^{\mu\nu} (\mathbf{D}_\mu F_{\nu\beta} + \mathbf{D}_\nu F_{\beta\mu} + \mathbf{D}_\beta F_{\mu\nu}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Enfin, en ce qui concerne la troisième propriété, on a

$$\begin{aligned} T_{00} &= F_{0\gamma} F_0{}^\gamma + \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \\ &= |E|^2 + \frac{1}{2}(|B|^2 - |E|^2) \\ &= \frac{1}{2}(|E|^2 + |B|^2), \end{aligned}$$

ce qui conclut la preuve de la proposition. □

4.4.3. Lois de conservation. On va utiliser les champs de Killing de Minkowski pour exhiber des quantités conservées pour l'équation de Maxwell.

PROPOSITION 4.7. *Soit \mathbf{K} un champ de Killing de l'espace de Minkowski (\mathbb{R}^{1+3}, m) , alors le tenseur de type $(0, 1)$ $T_{\alpha\beta}K^\beta$ est à divergence nulle*

$$\mathbf{D}^\alpha(T_{\alpha\beta}K^\beta) = 0.$$

DÉMONSTRATION. En effet, on a

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^\alpha(T_{\alpha\beta}K^\beta) &= \mathbf{D}^\alpha T_{\alpha\beta}K^\beta + T_{\alpha\beta}\mathbf{D}^\alpha K^\beta \\ &= \frac{1}{2}T_{\alpha\beta}(\mathbf{D}^\alpha K^\beta + \mathbf{D}^\beta K^\alpha) \\ &= \frac{1}{2}T_{\alpha\beta}(\mathbf{K})\pi^{\alpha\beta} \\ &= 0 \end{aligned}$$

où on a utilisé les propriétés (1) et (2) de la Proposition 4.6 et le fait que \mathbf{K} est un champ de Killing. \square

Soit \mathbf{K} un champ de Killing de l'espace de Minkowski (\mathbb{R}^{1+3}, m) . Par la proposition précédente, on a

$$\mathbf{D}^\alpha(T_{\alpha\beta}K^\beta) = 0.$$

En intégrant cette relation sur la région de \mathbb{R}^{1+3} définie par $\{0 < x^0 < t\}$, on obtient la loi de conservation suivante

$$\int_{\{x^0=t\}} T_{0\beta}K^\beta dx = \int_{\{x^0=0\}} T_{0\beta}K^\beta dx, \quad (4.6)$$

où on a utilisé le fait que $\frac{\partial}{\partial x^0}$ est la normale unitaire à $\{x^0 = t\}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Considérons maintenant les différents champs de Killing de Minkowski obtenus dans la section 4.3 :

- (1) La translation en temps correspond à $\mathbf{K} = \frac{\partial}{\partial x^0}$ qui donne la conservation de l'énergie

$$\int_{\{x^0=t\}} T_{00}dx = \frac{1}{2} \int_{\{x^0=t\}} (|E|^2 + |B|^2)dx.$$

- (2) Les translations spatiales correspondent à $\mathbf{K} = \frac{\partial}{\partial x^i}$ qui donne la conservation du moment linéaire.
- (3) Les rotations spatiales correspondent à $\mathbf{K} = x^i \frac{\partial}{\partial x^j} - x^j \frac{\partial}{\partial x^i}$ qui donne la conservation du moment angulaire.

4.5. Exercices

Exercice 1. Soit

$$(F_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ -E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ -E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On rappelle que les équations de Maxwell dans le vide correspondent à

$$\begin{cases} \mathbf{D}_\alpha F_{\beta\gamma} + \mathbf{D}_\gamma F_{\alpha\beta} + \mathbf{D}_\beta F_{\gamma\alpha} = 0, \\ \mathbf{D}^\alpha F_{\alpha\beta} = 0, \end{cases}$$

où \mathbf{D} désigne ici la connexion de Levi-Civita de l'espace-temps de Minkowski (\mathbb{R}^{1+3}, m) .

- a) A partir de la formulation précédente, retrouver les équations de Maxwell dans le vide sous leur forme standard

$$\begin{cases} \operatorname{div}(B) = 0, \\ \frac{\partial B}{\partial t} + \operatorname{rot}(E) = 0, \\ \operatorname{div}(E) = 0, \\ -\frac{\partial E}{\partial t} + \operatorname{rot}(B) = 0. \end{cases}$$

- b) Soit A une 1-forme. Montrer que

$$G_{\alpha\beta} = \mathbf{D}_\alpha A_\beta - \mathbf{D}_\beta A_\alpha$$

vérifie l'équation

$$\mathbf{D}_\alpha G_{\beta\gamma} + \mathbf{D}_\gamma G_{\alpha\beta} + \mathbf{D}_\beta G_{\gamma\alpha} = 0.$$

- c) On admettra qu'il existe une 1-forme A telle que

$$F_{\alpha\beta} = \mathbf{D}_\alpha A_\beta - \mathbf{D}_\beta A_\alpha.$$

En déduire une équation satisfaite par A .

- d) Montrer que la relation entre A et F est encore vraie si l'on remplace A par $A + df$ pour toute fonction $\mathcal{C}^\infty f$ de \mathbb{R}^{1+3} dans \mathbb{R} .
- e) On choisit désormais la jauge de Lorentz pour A

$$\mathbf{D}^\alpha A_\alpha = 0.$$

Que devient l'équation pour A trouvée en c) ?

Exercice 2. Un difféomorphisme $\phi : \mathcal{U} \subset \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ est une isométrie conforme si il existe une fonction Λ telle que en chaque point p , on a $\Lambda \neq 0$ et

$$\phi^* \mathbf{g} = \Lambda^2 \mathbf{g}.$$

Un champ de vecteurs qui génère un groupe à un paramètre d'isométries conformes est appelé champ de Killing conforme.

- a) Montrer qu'un champ de vecteurs \mathbf{K} est un champ de Killing conforme si et seulement si $\mathcal{L}_{\mathbf{K}} \mathbf{g}$ est proportionnel à \mathbf{g} .

- b) En déduire qu'un champ de vecteurs \mathbf{K} est un champ de Killing conforme si et seulement si ${}^{(\mathbf{K})}\pi$ est proportionnel à \mathbf{g} .

Exercice 3. On se place sur (\mathbb{R}^{1+n}, m) . Soit \mathbf{K} un champ de Killing conforme. Il existe donc Ω telle que

$${}^{(\mathbf{K})}\pi_{\alpha\beta} = \Omega m_{\alpha\beta}.$$

- a) Montrer que l'on a

$$\mathbf{D}_\alpha \mathbf{D}_\beta \mathbf{K}_\gamma = \frac{1}{2} (\mathbf{D}_\alpha \Omega m_{\beta\gamma} + \mathbf{D}_\beta \Omega m_{\alpha\gamma} - \mathbf{D}_\gamma \Omega m_{\alpha\beta}).$$

- b) En déduire que \mathbf{K} vérifie

$$\begin{aligned} \square \mathbf{K}_\alpha &= -\frac{n-1}{2} \mathbf{D}_\alpha \Omega, \\ \mathbf{D}^\alpha \mathbf{K}_\alpha &= \frac{n+1}{2} \Omega. \end{aligned}$$

- c) En déduire que Ω vérifie

$$\square \Omega = 0.$$

- d) En déduire que Ω vérifie

$$(n-1) \mathbf{D}_\alpha \mathbf{D}_\beta \Omega = 0.$$

- e) Soient

$$\mathbf{S} = x^\mu \partial_\mu \text{ et } \mathbf{T}_\mu = 2x_\mu x^\rho \partial_\rho - (x^\rho x_\rho) \partial_\mu.$$

Montrer que \mathbf{S} et \mathbf{T}_μ sont des champs de Killing conforme.

- f) Pour $n \geq 2$, déduire des questions d) et e) qu'il existe des constantes c et d^μ telles que

$$\mathbf{K} - c\mathbf{S} - d^\mu \mathbf{T}_\mu$$

soit un champ de Killing. Déduire du cours tous les champs de Killing conforme de (\mathbb{R}^{1+n}, m) pour $n \geq 2$.

CHAPITRE 5

La relativité générale

Avec sa théorie de la relativité restreinte, Einstein a obtenu un cadre compatible avec l'électromagnétisme. Reste alors le problème de la prise en compte de la gravitation. Einstein mettra dix ans, entre 1905 et 1915, pour énoncer sa théorie de la relativité générale [4], où la gravité n'est pas vue comme une force, mais comme induisant une déformation de l'espace-temps.

5.1. L'espace-temps

Pour prendre en compte la gravitation, Einstein va remplacer l'espace-temps de Minkowski (\mathbb{R}^{1+3}, m) par une variété Lorentzienne $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$ de dimension 4, que l'on appellera dans toute la suite de ce cours l'espace-temps.

Deux espaces-temps $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$ et $(\mathcal{M}', \mathbf{g}')$ seront considérés équivalents si ils sont isométriques, c'est à dire si il existe un difféomorphisme

$$\phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}' \text{ avec } \phi^* \mathbf{g}' = \mathbf{g}.$$

En conséquence, lorsque l'on parle d'un espace-temps $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$, on considère en fait la classe d'équivalence de $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$, c'est à dire l'ensemble des $(\mathcal{M}', \mathbf{g}')$ isométriques à $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$. En pratique, on considérera en général un unique représentant de cette classe d'équivalence, mais le fait que $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$ est défini seulement à équivalence près sera utile dans certaines situations, notamment pour l'étude du problème de Cauchy au Chapitre 7.

5.2. Le principe d'équivalence

Le principe d'équivalence, est un postulat introduit par Einstein pour expliquer l'effet du champ gravitationnel sur un corps en chute libre et sur un photon :

- Un corps en chute libre dans un champ gravitationnel se déplace selon une géodésique de type temps de $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$.
- Un photon dans un champ gravitationnel se déplace selon une géodésique de type lumière de $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$.

En d'autres termes, Einstein, contrairement à la physique Newtonienne, ne voit pas la gravité comme un champ de force, mais comme une déformation de l'espace-temps. Si notre trajectoire est déviée sous l'effet de la gravitation, c'est parce que nous suivons une géodésique de l'espace-temps et que cette géodésique est courbe sous l'effet de la gravité. Notons en outre qu'une géodésique est entièrement déterminée par sa position et

sa vitesse initiale, de sorte que si on connaît la position et la vitesse initiale d'un corps en chute libre, on peut en déduire sa trajectoire pour tout temps.

5.3. La formulation Lagrangienne

On sait maintenant que l'espace-temps dans lequel nous vivons est une variété Lorentzienne $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$ de dimension 4, et que l'influence de la gravité se traduit par la courbure de l'espace-temps. Il reste à déterminer l'espace-temps, c'est à dire à dériver une équation qui doit être satisfaite par celui-ci.

Pour chercher cette équation, on va utiliser le principe de moindre action, selon lequel la solution d'un système physique doit minimiser un Lagrangien. En écrivant que cette solution est un point critique du Lagrangien, on obtient alors l'équation d'Euler-Lagrange correspondante. Remarquons que l'on a procédé de même pour dériver les équations de Maxwell dans la section 4.4.1.

On considère le Lagrangien sous la forme suivante

$$\mathcal{L}[\psi, \mathbf{g}] = \mathcal{L}_G[\mathbf{g}] + \mathcal{L}_M[\psi, \mathbf{g}]$$

avec

$$\mathcal{L}_G[\mathbf{g}] = \int_{\mathcal{M}} L_G[\mathbf{g}] \sqrt{|\det \mathbf{g}|} dx, \quad \mathcal{L}_M[\psi, \mathbf{g}] = \int_{\mathcal{M}} L_M[\psi, \mathbf{g}] \sqrt{|\det \mathbf{g}|} dx,$$

où les inconnues sont la métrique \mathbf{g} et le champ de matière ψ (qui est un champ de tenseurs dépendant de la matière présente dans l'espace-temps), où L_G (qui ne dépend que de \mathbf{g}) correspond à l'action du champ gravitationnel, et où L_M correspond à l'action de la matière présente dans l'espace-temps $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$. L_M dépend donc du type de matière présent, et on donnera quelques exemples dans la section 5.5. En ce qui concerne L_G , par analogie avec la physique Newtonienne, on cherche une quantité scalaire dépendant d'au plus deux dérivées de la métrique \mathbf{g} , et telle que l'équation d'Euler-Lagrange correspondante dépende d'au plus deux dérivées de \mathbf{g} . Le bon candidat se révèle être la courbure scalaire :

$$L_G = \mathbf{Rscal}.$$

On obtient finalement l'action d'Einstein-Hilbert

$$\mathcal{L}[\psi, \mathbf{g}] = \int_{\mathcal{M}} (\mathbf{Rscal} + L_M[\psi, \mathbf{g}]) \sqrt{|\det \mathbf{g}|} dx.$$

L'équation d'Euler-Lagrange est l'équation vérifiée par les points critiques de \mathcal{L} et correspond aux deux équations suivantes

$$\delta_{\mathbf{g}} \mathcal{L}_G + \delta_{\mathbf{g}} \mathcal{L}_M = 0, \tag{5.1}$$

$$\delta_{\psi} \mathcal{L}_M = 0, \tag{5.2}$$

où $\delta_{\mathbf{g}}$ et δ_{ψ} désignent respectivement la variation première par rapport à \mathbf{g} et ψ . L'équation (5.2) correspond à l'équation du mouvement pour le champ de matière ψ , et l'équation

(5.1) correspond à l'équation d'Einstein, que l'on va expliciter ci-dessous.

Soit h un 2-tenseur symétrique sur \mathcal{M} et à support compact. On a alors $\mathbf{g} + th$ qui est une métrique Lorentzienne sur \mathcal{M} pour t assez petit. Pour une fonction scalaire F dépendant de \mathbf{g} , la variation $\delta_{\mathbf{g}}F$ de F par rapport à h est donnée par :

$$\delta_{\mathbf{g}}F(h) = \frac{d}{dt}F(\mathbf{g} + th)|_{t=0}.$$

On va d'abord calculer la variation de \mathcal{L}_G .

PROPOSITION 5.1. *Soit h un 2-tenseur symétrique sur \mathcal{M} et à support compact. Alors, on a*

$$\delta_{\mathbf{g}}\mathcal{L}_G(h) = - \int_{\mathcal{M}} \mathbf{G}_{\alpha\beta} h^{\alpha\beta} \sqrt{|\det \mathbf{g}|} dx$$

où le 2-tenseur \mathbf{G} est donné par

$$\mathbf{G}_{\alpha\beta} = \mathbf{Ric}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \mathbf{g}_{\alpha\beta} \mathbf{Rscal},$$

et est appelé tenseur d'Einstein.

DÉMONSTRATION. On a

$$\mathcal{L}_G = \int_{\mathcal{M}} \mathbf{Rscal} \sqrt{|\det \mathbf{g}|} dx = \int_{\mathcal{M}} \mathbf{g}^{\alpha\beta} \mathbf{Ric}_{\alpha\beta} \sqrt{|\det \mathbf{g}|} dx$$

ce qui implique

$$\begin{aligned} \delta_{\mathbf{g}}\mathcal{L}_G(h) &= \int_{\mathcal{M}} \left(\delta_{\mathbf{g}}(\mathbf{g}^{\alpha\beta})(h) \mathbf{Ric}_{\alpha\beta} \sqrt{|\det \mathbf{g}|} + \mathbf{g}^{\alpha\beta} \delta_{\mathbf{g}}(\mathbf{Ric}_{\alpha\beta})(h) \sqrt{|\det \mathbf{g}|} \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{g}^{\alpha\beta} \mathbf{Ric}_{\alpha\beta} \delta_{\mathbf{g}}(\sqrt{|\det \mathbf{g}|})(h) \right) dx. \end{aligned} \quad (5.3)$$

On va calculer les 3 termes du membre de droite en commençant par le premier. On a

$$(\mathbf{g} + th)_{\alpha\beta} = \mathbf{g}_{\alpha\beta} + th_{\alpha\beta}.$$

On prends l'inverse (au sens des matrices). On obtient pour t petit

$$(\mathbf{g} + th)^{\alpha\beta} = \mathbf{g}^{\alpha\beta} - t \mathbf{g}^{\alpha\mu} \mathbf{g}^{\beta\nu} h_{\mu\nu} + O(t^2)$$

et donc

$$\delta_{\mathbf{g}}(\mathbf{g}^{\alpha\beta})(h) = -\mathbf{g}^{\alpha\mu} \mathbf{g}^{\beta\nu} h_{\mu\nu} = -h^{\alpha\beta}. \quad (5.4)$$

De même, en prenant le déterminant (au sens des matrices). On obtient

$$\det(\mathbf{g} + th) = \det(\mathbf{g}) + t \det(\mathbf{g}) \mathbf{g}_{\mu\nu} h^{\mu\nu} + O(t^2)$$

et donc

$$\delta_{\mathbf{g}}(\sqrt{|\det \mathbf{g}|})(h) = \frac{1}{2} \sqrt{|\det \mathbf{g}|} \mathbf{g}_{\mu\nu} h^{\mu\nu}. \quad (5.5)$$

En réinjectant dans (5.3), cela donne

$$\begin{aligned} \delta_{\mathbf{g}}\mathcal{L}_G(h) &= - \int_{\mathcal{M}} \left(\mathbf{Ric}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\mathbf{g}_{\mu\nu}\mathbf{Rscal} \right) h^{\mu\nu} \sqrt{|\det \mathbf{g}|} dx \\ &\quad + \int_{\mathcal{M}} \mathbf{g}^{\alpha\beta} \delta_{\mathbf{g}}(\mathbf{Ric}_{\alpha\beta})(h) \sqrt{|\det \mathbf{g}|} dx. \end{aligned} \quad (5.6)$$

On calcule maintenant $\delta_{\mathbf{g}}(\mathbf{Ric}_{\alpha\beta})(h)$. En contractant dans la formule pour le tenseur de courbure (3.12), on a

$$\mathbf{Ric}_{\alpha\beta} = \frac{\partial \Gamma^\gamma_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma} - \frac{\partial \Gamma^\gamma_{\gamma\alpha}}{\partial x^\beta} + \Gamma^2 \quad (5.7)$$

où on ne précise pas les coefficients des termes quadratiques en Γ car ils vont disparaître dans les calculs. On en déduit

$$\delta_{\mathbf{g}}(\mathbf{Ric}_{\alpha\beta})(h) = \frac{\partial \delta_{\mathbf{g}}(\Gamma^\gamma_{\alpha\beta})(h)}{\partial x^\gamma} - \frac{\partial \delta_{\mathbf{g}}(\Gamma^\gamma_{\gamma\alpha})(h)}{\partial x^\beta} + \Gamma \delta_{\mathbf{g}}(\Gamma)(h).$$

$\delta_{\mathbf{g}}(\mathbf{Ric}_{\alpha\beta})(h)$ est un tenseur. En particulier, on peut évaluer l'expression précédente en un point où on a pris les coordonnées normales centrées en ce point, de telle sorte que les symboles de Christoffel Γ sont nuls en ce point d'après le Lemme 3.25. On obtient donc

$$\begin{aligned} \delta_{\mathbf{g}}(\mathbf{Ric}_{\alpha\beta})(h) &= \frac{\partial \delta_{\mathbf{g}}(\Gamma^\gamma_{\alpha\beta})(h)}{\partial x^\gamma} - \frac{\partial \delta_{\mathbf{g}}(\Gamma^\gamma_{\gamma\alpha})(h)}{\partial x^\beta} \\ &= \mathbf{D}_\gamma \delta_{\mathbf{g}}(\Gamma^\gamma_{\alpha\beta})(h) - \mathbf{D}_\beta \delta_{\mathbf{g}}(\Gamma^\gamma_{\gamma\alpha})(h). \end{aligned}$$

Rappelons maintenant que $\delta_{\mathbf{g}}(\Gamma^\alpha_{\beta\gamma})$ est la différence (infinitésimale) de symboles de Christoffel, et est donc un tenseur (voir remarque 2.48). En particulier, l'égalité est une égalité entre deux tenseurs. Elle est donc vraie indépendamment du système de coordonnées choisies, et on a donc obtenu

$$\delta_{\mathbf{g}}(\mathbf{Ric}_{\alpha\beta})(h) = \mathbf{D}_\gamma \delta_{\mathbf{g}}(\Gamma^\gamma_{\alpha\beta})(h) - \mathbf{D}_\beta \delta_{\mathbf{g}}(\Gamma^\gamma_{\gamma\alpha})(h). \quad (5.8)$$

Tous les termes du membre de droite sont des dérivées, et on obtient donc après intégration par partie

$$\int_{\mathcal{M}} \mathbf{g}^{\alpha\beta} \delta_{\mathbf{g}}(\mathbf{Ric}_{\alpha\beta})(h) \sqrt{|\det \mathbf{g}|} dx = 0.$$

En réinjectant dans (5.6), on obtient finalement

$$\delta_{\mathbf{g}}\mathcal{L}_G(h) = - \int_{\mathcal{M}} \left(\mathbf{Ric}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\mathbf{g}_{\mu\nu}\mathbf{Rscal} \right) h^{\mu\nu} \sqrt{|\det \mathbf{g}|} dx$$

ce qui conclut la preuve de la proposition. \square

On calcule également la variation de \mathcal{L}_M . On a, en supposant que L_M dépend de \mathbf{g} à travers les coefficients $\mathbf{g}^{\mu\nu}$:

$$\begin{aligned}\delta_{\mathbf{g}}\mathcal{L}_M(h) &= \int_{\mathcal{M}} \frac{\partial L_M}{\partial \mathbf{g}^{\mu\nu}} \delta_{\mathbf{g}}(\mathbf{g}^{\mu\nu})(h) \sqrt{|\det \mathbf{g}|} dx + \int_{\mathcal{M}} L_M \delta_{\mathbf{g}}(\sqrt{|\det \mathbf{g}|})(h) dx \\ &= - \int_{\mathcal{M}} \left(\frac{\partial L_M}{\partial \mathbf{g}^{\mu\nu}} - \frac{1}{2} \mathbf{g}_{\mu\nu} L_M \right) h^{\mu\nu} \sqrt{|\det \mathbf{g}|} dx\end{aligned}\quad (5.9)$$

où on a utilisé dans la dernière égalité les identités (5.4) et (5.5). On introduit maintenant le tenseur d'énergie-impulsion.

DÉFINITION 5.2. *Le 2-tenseur symétrique*

$$\mathbf{T}_{\mu\nu} = - \left(\frac{\partial L_M}{\partial \mathbf{g}^{\mu\nu}} - \frac{1}{2} \mathbf{g}_{\mu\nu} L_M \right)$$

est appelé tenseur d'énergie-impulsion.

On peut donc réécrire (5.9) comme suit :

$$\delta_{\mathbf{g}}\mathcal{L}_M(h) = \int_{\mathcal{M}} \mathbf{T}_{\mu\nu} h^{\mu\nu} \sqrt{|\det \mathbf{g}|} dx$$

ce qui au vu de la Proposition 5.1 implique

$$\delta_{\mathbf{g}}\mathcal{L}_G(h) + \delta_{\mathbf{g}}\mathcal{L}_M(h) = - \int_{\mathcal{M}} (\mathbf{G}_{\mu\nu} - \mathbf{T}_{\mu\nu}) h^{\mu\nu} \sqrt{|\det \mathbf{g}|} dx.$$

L'équation (5.1) peut donc s'écrire

$$\int_{\mathcal{M}} (\mathbf{G}_{\mu\nu} - \mathbf{T}_{\mu\nu}) h^{\mu\nu} \sqrt{|\det \mathbf{g}|} dx = 0$$

pour tout 2-tenseur h symétrique sur \mathcal{M} et à support compact. Comme $\mathbf{G}_{\mu\nu} - \mathbf{T}_{\mu\nu}$ est un 2-tenseur symétrique, on en déduit immédiatement l'équation suivante

$$\mathbf{G}_{\mu\nu} = \mathbf{T}_{\mu\nu}$$

qui est la célèbre équation d'Einstein.

5.4. Les équations d'Einstein

On a obtenu dans la section précédente les équations d'Einstein par le principe de moindre action, c'est à dire comme l'équation d'Euler-Lagrange de l'action d'Einstein-Hilbert. Ces équations ont la forme suivante :

$$\mathbf{G}_{\alpha\beta} = \mathbf{T}_{\alpha\beta} \quad (5.10)$$

où \mathbf{G} est le tenseur d'Einstein

$$\mathbf{G}_{\alpha\beta} = \mathbf{Ric}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \mathbf{g}_{\alpha\beta} \mathbf{Rscal}$$

et où \mathbf{T} est le tenseur d'énergie-impulsion, qui correspond au contenu en énergie et impulsion induit par la présence de champs de matière dans l'espace-temps. Les équations d'Einstein traduisent donc l'influence des champs de matière (à travers leur distribution d'énergie-impulsion) sur la courbure de l'espace-temps.

Notons que (5.10) induit une identité vérifiée par le 2-tenseur symétrique \mathbf{T} . En effet, on rappelle la seconde identité de Bianchi :

$$\mathbf{D}_\nu \mathbf{R}^\alpha{}_{\beta\gamma\mu} + \mathbf{D}_\mu \mathbf{R}^\alpha{}_{\beta\nu\gamma} + \mathbf{D}_\gamma \mathbf{R}^\alpha{}_{\beta\mu\nu} = 0.$$

En contractant par rapport à ν et α , on obtient

$$\mathbf{D}^\alpha \mathbf{R}_{\alpha\beta\gamma\mu} + \mathbf{D}_\mu \mathbf{Ric}_{\beta\gamma} - \mathbf{D}_\gamma \mathbf{Ric}_{\beta\mu} = 0.$$

En contractant de nouveau, cette fois par rapport à β et μ , on obtient finalement

$$2\mathbf{D}^\alpha \mathbf{Ric}_{\alpha\gamma} - \mathbf{D}_\gamma \mathbf{Rscal} = 0$$

ce qui implique

$$\mathbf{D}^\alpha \mathbf{G}_{\alpha\beta} = 0.$$

Au vu de (5.10), on obtient l'identité suivante vérifiée par \mathbf{T} :

$$\mathbf{D}^\alpha \mathbf{T}_{\alpha\beta} = 0. \tag{5.11}$$

REMARQUE 5.3. *On appelle (5.11) une loi de conservation locale. En effet, dans le cas particulier où l'espace-temps possède un champ (voir des champs) de Killing \mathbf{K} , on peut contracter \mathbf{T} avec \mathbf{K} pour former $\mathbf{T}_{\alpha\beta} K^\beta$ qui est alors à divergence nulle et induit une quantité conservée par intégration sur une région de \mathcal{M} bien choisie. On renvoie à la section 4.4.3 où ceci est expliqué dans le cas particulier des équations de Maxwell sur l'espace-temps de Minkowski.*

Enfin, on écrit le cas particulier des équations d'Einstein dans le vide qui correspondent au choix de \mathbf{T} suivant

$$\mathbf{T}_{\alpha\beta} = 0.$$

Les équations d'Einstein (5.10) dans le vide s'écrivent donc

$$\mathbf{Ric}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \mathbf{g}_{\alpha\beta} \mathbf{Rscal}.$$

En contractant, et en remarquant que l'on a pour une variété Lorentzienne de dimension 4

$$\mathbf{g}^{\alpha\beta} \mathbf{g}_{\alpha\beta} = 4,$$

on obtient

$$\mathbf{Rscal} = 0,$$

ce qui implique que les équations d'Einstein dans le vide s'écrivent finalement

$$\mathbf{Ric}_{\alpha\beta} = 0. \tag{5.12}$$

EXEMPLE 5.4. *L'espace-temps de Minkowski (\mathbb{R}^{1+3}, m) est solution des équations d'Einstein dans le vide.*

REMARQUE 5.5. *On rappelle (voir la remarque 3.33) que le tenseur de courbure en dimension 4 a 20 composantes indépendantes. Le tenseur de Ricci étant un 2-tenseur symétrique a lui, en dimension 4, 10 composantes indépendantes. Les équations d'Einstein (5.10), et en particulier celles dans le vide (5.12), ont donc 10 degrés de liberté.*

5.5. Exemples de tenseurs d'énergie-impulsion

On donne dans cette section deux exemples de tenseurs d'énergie-impulsion. On rappelle que si ψ est un champ de matière, et si $\mathcal{L}_M[\psi, \mathbf{g}]$ est la contribution correspondante à l'action d'Einstein-Hilbert, alors l'équation du mouvement est donnée par (5.2) :

$$\delta_\psi \mathcal{L}_M = 0$$

où δ_ψ désigne la variation première par rapport à ψ . De plus, le tenseur d'énergie-impulsion est donné par

$$\delta_{\mathbf{g}} \mathcal{L}_M(h) = \int_{\mathcal{M}} \mathbf{T}_{\mu\nu} h^{\mu\nu} \sqrt{|\det \mathbf{g}|} dx.$$

5.5.1. Le cas d'un champ scalaire. On considère le Lagrangien suivant

$$\mathcal{L}_{KG}[u, \mathbf{g}] = - \int_{\mathcal{M}} (\mathbf{g}^{\alpha\beta} \partial_\alpha u \partial_\beta u + m^2 u^2) \sqrt{|\det \mathbf{g}|} dx,$$

où $u : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction scalaire, et où $m \geq 0$ est une constante donnée. L'équation du mouvement est donnée par

$$\delta_u \mathcal{L}_{KG} = 0$$

c'est à dire

$$-\mathbf{g}^{\alpha\beta} \mathbf{D}_\alpha \mathbf{D}_\beta u + m^2 u = 0.$$

De plus, en utilisant (5.4) et (5.5), on obtient que la variation de \mathcal{L}_{KG} par rapport à \mathbf{g} est donnée par

$$\delta_{\mathbf{g}} \mathcal{L}_{KG}(h) = \int_{\mathcal{M}} \left(\partial_\alpha u \partial_\beta u - \frac{1}{2} \mathbf{g}_{\alpha\beta} (\mathbf{g}^{\mu\nu} \partial_\mu u \partial_\nu u + m^2 u^2) \right) h^{\alpha\beta} \sqrt{|\det \mathbf{g}|} dx$$

ce qui implique que le tenseur d'énergie-impulsion associé est donné par

$$\mathbf{T}_{\alpha\beta} = \partial_\alpha u \partial_\beta u - \frac{1}{2} \mathbf{g}_{\alpha\beta} (\mathbf{g}^{\mu\nu} \partial_\mu u \partial_\nu u + m^2 u^2).$$

Finalement, les équations d'Einstein couplées à un champ scalaire sont données par

$$\begin{cases} \mathbf{Ric}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \mathbf{g}_{\alpha\beta} \mathbf{Rscal} &= \partial_\alpha u \partial_\beta u - \frac{1}{2} \mathbf{g}_{\alpha\beta} (\mathbf{g}^{\mu\nu} \partial_\mu u \partial_\nu u + m^2 u^2), \\ -\mathbf{g}^{\alpha\beta} \mathbf{D}_\alpha \mathbf{D}_\beta u + m^2 u &= 0. \end{cases} \quad (5.13)$$

5.5.2. L'électromagnétisme. On considère le Lagrangien suivant

$$\mathcal{L}_{EM}[F, \mathbf{g}] = -\frac{1}{2} \int_{\mathcal{M}} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \sqrt{|\det \mathbf{g}|} dx,$$

où F est un 2-tenseur antisymétrique sur $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$ vérifiant

$$\mathbf{D}_\alpha F_{\beta\gamma} + \mathbf{D}_\gamma F_{\alpha\beta} + \mathbf{D}_\beta F_{\gamma\alpha} = 0.$$

L'équation du mouvement est donnée par

$$\delta_F \mathcal{L}_{EM} = 0$$

c'est à dire

$$\int_{\mathcal{M}} H^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \sqrt{|\det \mathbf{g}|} dx = 0$$

pour tout 2-tenseur antisymétrique H vérifiant

$$\mathbf{D}_\alpha H_{\beta\gamma} + \mathbf{D}_\gamma H_{\alpha\beta} + \mathbf{D}_\beta H_{\gamma\alpha} = 0.$$

Comme dans la section 4.4.1, on en déduit

$$\mathbf{D}^\alpha F_{\alpha\beta} = 0.$$

De plus, en utilisant (5.4) et (5.5), on obtient que la variation de \mathcal{L}_{EM} par rapport à \mathbf{g} est donnée par

$$\delta_{\mathbf{g}} \mathcal{L}_{EM}(h) = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{M}} \left(2F_{\alpha\mu} F_\beta{}^\mu - \frac{1}{2} \mathbf{g}_{\alpha\beta} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \right) h^{\alpha\beta} \sqrt{|\det \mathbf{g}|} dx$$

ce qui implique que le tenseur d'énergie-impulsion associé est donné par

$$\mathbf{T}_{\alpha\beta} = F_{\alpha\mu} F_\beta{}^\mu - \frac{1}{4} \mathbf{g}_{\alpha\beta} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}.$$

Finalement, les équations d'Einstein couplées aux équations de l'électromagnétisme sont données par

$$\begin{cases} \mathbf{Ric}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \mathbf{g}_{\alpha\beta} \mathbf{Rscal} & = F_{\alpha\mu} F_\beta{}^\mu - \frac{1}{4} \mathbf{g}_{\alpha\beta} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}, \\ \mathbf{D}_\alpha F_{\beta\gamma} + \mathbf{D}_\gamma F_{\alpha\beta} + \mathbf{D}_\beta F_{\gamma\alpha} & = 0, \\ \mathbf{D}^\alpha F_{\alpha\beta} & = 0. \end{cases} \quad (5.14)$$

5.6. Problème

Soit $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$ solution des équations d'Einstein. On suppose que

$$\mathbf{g}_{\alpha\beta} = m_{\alpha\beta} + \gamma_{\alpha\beta}$$

où γ est petit, et on cherche à linéariser les équations d'Einstein autour de la métrique de Minkowski.

a) Montrer que le linéarisé du tenseur de Ricci est donné par

$$\delta \mathbf{Ric}_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2} \partial^\mu \partial_\mu \gamma_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \partial^\mu (\partial_\alpha \gamma_{\beta\mu} + \partial_\beta \gamma_{\alpha\mu}) - \frac{1}{2} \partial_\alpha \partial_\beta \gamma$$

où on a posé $\gamma = m^{\alpha\beta} \gamma_{\alpha\beta}$.

b) En déduire le linéarisé du tenseur d'Einstein.

c) Vérifier que le linéarisé du tenseur d'Einstein est invariant par la transformation

$$\gamma_{\alpha\beta} \rightarrow \gamma_{\alpha\beta} + \partial_\alpha \xi_\beta + \partial_\beta \xi_\alpha$$

pour tout champ de vecteurs ξ .

d) On introduit

$$\bar{\gamma}_{\alpha\beta} = \gamma_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \gamma m_{\alpha\beta}.$$

Réécrire les équations d'Einstein linéarisées en fonction de $\bar{\gamma}_{\alpha\beta}$.

e) Vérifier que le linéarisé du tenseur d'Einstein est invariant par la transformation

$$\bar{\gamma}_{\alpha\beta} \rightarrow \bar{\gamma}_{\alpha\beta} + \partial_\alpha \xi_\beta + \partial_\beta \xi_\alpha - \partial^\mu \xi_\mu m_{\alpha\beta}$$

pour tout champ de vecteurs ξ .

f) Montrer que l'on peut choisir ξ tel que

$$\partial^\beta \bar{\gamma}_{\alpha\beta} = 0.$$

g) Comment s'écrivent les équations d'Einstein linéarisées dans cette jauge ?

CHAPITRE 6

Exemples de solutions explicites

On va présenter dans cette section trois exemples célèbres d'espaces-temps qui sont des solutions explicites des équations d'Einstein dans le vide (5.12). On va reparler d'abord de l'espace-temps de Minkowski afin d'introduire la notion de diagramme de Carter-Penrose. Puis on introduira la solution de Schwarzschild [10], et on terminera par la solution de Kerr [6].

6.1. Espace-temps de Minkowski

6.1.1. Description. L'espace-temps de Minkowski (\mathbb{R}^{1+3}, m) est la solution la plus simple de l'équation d'Einstein dans un espace-temps vide. On rappelle que cet espace-temps est le cadre de la relativité restreinte. Dans les coordonnées cartésiennes (x^0, x^1, x^2, x^3) de \mathbb{R}^4 , on a

$$\mathbf{g} = -(dx^0)^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2. \quad (6.1)$$

On peut aussi se placer en coordonnées sphériques (t, r, θ, ϕ) , telles que

$$x^0 = t, \quad x^1 = r \sin \theta \cos \phi, \quad x^2 = r \sin \theta \sin \phi, \quad x^3 = r \cos \theta.$$

Dans ces coordonnées, la métrique s'écrit :

$$\mathbf{g} = -dt^2 + dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2).$$

REMARQUE 6.1. *La métrique de Minkowski en coordonnées sphériques comporte une singularité en $r = 0$ et $\sin \theta = 0$. Il ne s'agit pas d'une vraie singularité, mais d'une singularité de coordonnées. Pour obtenir des coordonnées régulières, il suffit de se restreindre à*

$$0 < r < +\infty, \quad 0 < \theta < \pi, \quad 0 < \phi < 2\pi.$$

On a alors besoin de deux tels systèmes de coordonnées pour couvrir tout l'espace-temps de Minkowski.

6.1.2. Représentation de Carter-Penrose. On va maintenant donner une représentation de l'espace-temps de Minkowski qui permet de mieux comprendre le comportement des géodésiques nulles à l'infini. Pour cela, on se place en coordonnées sphériques et on effectue le changement de coordonnées suivant :

$$v = t + r, \quad w = t - r.$$

Pour ce système de coordonnées, on a :

$$\mathbf{g} = -dvdw + \frac{1}{4}(v-w)^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2).$$

REMARQUE 6.2. On appelle v et w des coordonnées nulles respectivement avancées et retardées. L'absence de termes dv^2 et dw^2 dans l'expression de la métrique dans ces coordonnées vient du fait que les hypersurfaces $\{w = w_0\}$ et $\{v = v_0\}$ pour $w_0, v_0 \in \mathbb{R}$ sont nulles.

Les coordonnées v et w varient dans \mathbb{R} entier. En posant $\tan p = v$, $\tan q = w$, on obtient des coordonnées p, q variant dans $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ (avec $p \geq q$) et telles que :

$$\mathbf{g} = \frac{1}{\cos^2 p \cos^2 q} \left(-dpdq + \frac{1}{4} \sin^2(p-q)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right).$$

On peut réécrire cette expression sous une forme plus standard en posant :

$$t' = p + q, \quad r' = p - q,$$

où

$$-\pi < t' + r' < \pi \quad \text{et} \quad -\pi < t' - r' < \pi, \quad r' \geq 0.$$

Alors :

$$\mathbf{g} = \frac{1}{4 \cos^2(\frac{1}{2}(t' + r')) \cos^2(\frac{1}{2}(t' - r'))} \bar{\mathbf{g}},$$

où la métrique conforme $\bar{\mathbf{g}}$ est donnée par

$$\bar{\mathbf{g}} = -(dt')^2 + (dr')^2 + \sin^2 r' (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2).$$

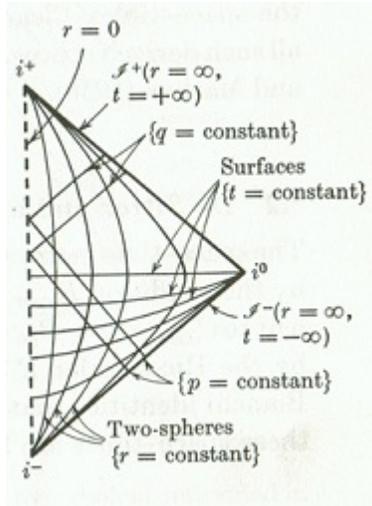


FIGURE 1. Représentation de Carter-Penrose de l'espace-temps de Minkowski

On peut représenter la structure conforme à l'infini en traçant un diagramme dans le plan (t', r') (voir la figure 1). Chaque point de ce diagramme représente donc une sphère \mathbb{S}^2 , et les géodésiques nulles radiales correspondent aux lignes droites d'angle $\pm\pi/4$. La structure à l'infini de n'importe quel espace-temps à symétrie sphérique peut être représenté par un tel diagramme, appelé *diagramme de Carter-Penrose*. Sur ces diagrammes, l'infini est représenté par une ligne simple, l'origine des coordonnées polaire par une ligne en pointillé, et une vraie singularité (par opposition à une singularité de coordonnées) par une ligne double.

Sur ce diagramme, le point i^0 représente le point asymptotique des géodésiques de genre espace : toutes les géodésiques de genre espace aboutissent au point i^0 . De même, les points i^+ et i^- représentent respectivement les points asymptotiques des géodésiques de genre temps orientées vers le futur, et orientées vers le passé. Les hypersurfaces \mathcal{I}^+ et \mathcal{I}^- représentent les hypersurfaces asymptotiques des géodésiques de genre lumière : toute géodésique de genre lumière orientée vers le futur (resp. vers le passé) aboutit en \mathcal{I}^+ (resp. \mathcal{I}^-).

6.2. Solution de Schwarzschild

6.2.1. Solution et extension maximale. La solution de Schwarzschild, introduite dans [10], constitue un modèle simple de trou noir sans rotation. Il s'agit d'une solution des équations d'Einstein dans le vide à l'extérieur d'un corps massif à symétrie sphérique. On peut exprimer la métrique dans un système de coordonnées (t, r, θ, ϕ) :

$$\mathbf{g} = - \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (6.2)$$

où $m > 0$ représente la masse du corps. Il s'agit d'une solution à symétrie sphérique. On note que $\frac{\partial}{\partial t}$ est un champ de Killing qui est parallèle à son gradient. On appelle un tel espace-temps un espace-temps statique.

On remarque que cette métrique diverge dans deux régions de l'espace-temps :

- (1) en $r = 0$,
- (2) en $r = 2m$.

On peut montrer que la singularité en $r = 0$ est une vraie singularité, c'est à dire qu'elle existe quel que soit le système de coordonnées choisi. En effet, un calcul montre que

$$K = \mathbf{R}^{\alpha\beta\mu\nu}\mathbf{R}_{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{48m^2}{r^6}, \quad r > 0$$

où K est une fonction scalaire appelée invariant de Kretschmann. Comme K est indépendant du système de coordonnées choisi, on voit que le tenseur de courbure \mathbf{R} diverge en $r = 0$ dans tout système de coordonnées.

Par contre, la singularité en $r = 2m$ (cette valeur est appelée *rayon de Schwarzschild*) est une singularité de coordonnées, c'est à dire qu'il existe un plongement isométrique de cette variété dans une variété d'espace-temps plus large, sans singularité en ces points.

Pour voir cela, on se place dans un système de coordonnées (t, r, θ, ϕ) :

$$\mathbf{g} = - \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2).$$

On pose à présent :

$$r^* = \int \frac{dr}{1 - \frac{2m}{r}} = r + 2m \log |r - 2m|.$$

On définit les coordonnées lumière avancées et retardées :

$$v = t + r^*, \quad w = t - r^*.$$

On peut exprimer la métrique en fonction des coordonnées (v, r, θ, ϕ) , ce qui donne pour \mathbf{g} la forme suivante, dite d'Eddington-Finkelstein :

$$\mathbf{g} = - \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dv^2 + 2dvdr + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2).$$

Cette métrique est définie pour tout v et pour $r \in]0, +\infty[$. Cela permet de définir un espace-temps plus large $(\mathcal{M}', \mathbf{g}')$, sur lequel on a des coordonnées (r, v, θ, ϕ) qui varient dans ces intervalles. La solution de Schwarzschild est isométrique à la région de $(\mathcal{M}', \mathbf{g}')$ pour laquelle $r > 2m$. On a donc trouvé une *extension* de la métrique de Schwarzschild, appelée *extension de Finkelstein avancée*. En procédant de la même manière avec la coordonnée w , on peut trouver une autre extension de la solution de Schwarzschild, appelée *extension de Finkelstein retardée* :

$$\mathbf{g} = - \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dw^2 - 2dwdr + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2).$$

On va maintenant voir que ces deux extensions sont des sous-extensions d'une même extension maximale de la solution de Schwarzschild, en un sens qui sera précisé plus loin. Dans les coordonnées (v, w, θ, ϕ) , la métrique prend la forme suivante :

$$\mathbf{g} = - \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dvdw + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2),$$

où r est déterminé par l'équation :

$$\frac{1}{2}(v - w) = r + 2m \log(r - 2m).$$

Si on définit

$$v' = \exp\left(\frac{v}{4m}\right), \quad w' = -\exp\left(-\frac{w}{4m}\right),$$

on peut procéder de la même façon que pour l'espace-temps de Minkowski et prendre :

$$x' = \frac{1}{2}(v' - w'), \quad t' = \frac{1}{2}(v' + w').$$

Alors :

$$\mathbf{g} = F^2(t', x')(-dt'^2 + dx'^2) + r^2(t', x')(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2).$$

où r est déterminé implicitement par la relation :

$$(t')^2 - (x')^2 = -(r - 2m) \exp\left(\frac{r}{2m}\right),$$

et F est donné par :

$$F^2 = \exp\left(-\frac{r}{2m}\right) \frac{16m^2}{r}.$$

Sur la variété \mathcal{M}^* définie par les coordonnées (t', x', θ, ϕ) pour $(t')^2 - (x')^2 < 2m$, les fonctions r et F sont positives et analytiques. Si on définit sur cette variété la métrique par la formule précédente, en fonction des coordonnées (t', r', θ, ϕ) , alors la région définie par $x' > |t'|$ (région I figure 2), est isométrique à la région de la solution de Schwarzschild pour laquelle $r > 2m$. La région pour laquelle $x' > -t'$ (régions I et II figure 2) est isométrique à l'extension de Finkelstein avancée, tandis que la région pour laquelle $x' > t'$ (régions I et II' figure 2) est isométrique à la solution de Finkelstein retardée. Finalement, la région pour laquelle $x' < -|t'|$ (région I' figure 2) est isométrique à la solution de Schwarzschild extérieure (pour laquelle $r > 2m$).

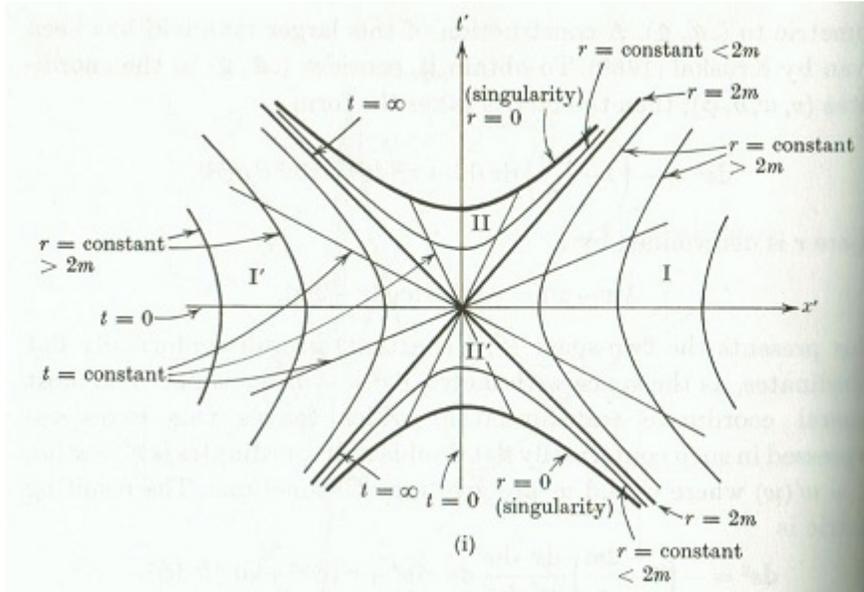


FIGURE 2. Représentation de l'espace-temps de Schwarzschild dans les coordonnées (t', x')

Sur la figure 2, les géodésiques de genre lumière restant dans les plans $\theta = \text{cte}$, $\phi = \text{cte}$ sont les droites d'équation $t' = \pm x' + c$. On voit facilement que si une géodésique de genre lumière part d'un point de la région II, elle ne peut pas s'en échapper. La région II piège donc la lumière, et pour cette raison, est appelé *trou noir*.

On appelle cette extension $(\mathcal{M}^*, \mathbf{g}^*)$, l'*extension de Kruskal*. On peut montrer que c'est l'unique extension de la solution de Schwarzschild qui soit analytique et localement inextensible, c'est-à-dire qu'il n'existe pas d'ouvert $\mathcal{U} \subset \mathcal{M}^*$ non relativement compact, tel que $(\mathcal{U}, \mathbf{g}^*|_{\mathcal{U}})$ admette une extension dans laquelle \mathcal{U} serait relativement compacte.

6.2.2. Représentation de Carter-Penrose. On peut déterminer la représentation de Carter-Penrose de l'extension de Kruskal en définissant de nouvelles coordonnées de lumière avancées et retardées par :

$$v'' = \arctan(v'(2m)^{-1/2}) \text{ et } w'' = \arctan(w'(2m)^{-1/2}),$$

avec :

$$-\frac{\pi}{2} < v'' + w'' < \frac{\pi}{2} \text{ et } -\frac{\pi}{2} < v'' < \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} < w'' < \frac{\pi}{2}.$$

De même que pour la solution de Minkowski, on peut établir le diagramme de Carter-Penrose, en prenant comme coordonnée horizontale $v - w$ et comme coordonnée verticale $v + w$. On retrouve les régions I, II, II' et I' du diagramme précédent. La encore, les points i^0 représentent les points asymptotiques des géodésiques de genre espace et les points i^+ (resp. i^-) ceux des géodésiques de genre temps dirigées vers le futur (resp. vers le passé) des régions I et I'. Les particules tombées dans la région II ne peuvent s'en échapper et terminent en temps propre fini dans la singularité future, de même que les particules se trouvant dans la région II' proviennent nécessairement de la singularité passée et s'échappent de II' en temps propre fini. La région II' ayant le comportement inverse de la région II (c'est à dire du trou noir), elle est appelée *trou blanc*.

6.3. Solution de Kerr

La solution de Kerr, introduite dans [6], fournit un modèle de trou noir en rotation, c'est à dire doté d'un moment cinétique interne. Sa métrique s'écrit, dans les coordonnées de Boyer-Lindquist (r, θ, ϕ, t) :

$$\mathbf{g} = \rho^2 \left(\frac{dr^2}{\Delta} + d\theta^2 \right) + (r^2 + a^2) \sin^2 \theta d\phi^2 - dt^2 + \frac{2mr}{\rho^2} (a \sin^2 \theta d\phi - dt)^2, \quad (6.3)$$

où :

$$\rho^2(r, \theta) = r^2 + a^2 \cos^2 \theta \text{ et } \Delta(r) = r^2 - 2mr + a^2.$$

Ici, m représente la masse et ma le moment cinétique du corps massif, mesurés à l'infini. Il s'agit d'une solution à symétrie axiale. On note que $\frac{\partial}{\partial t}$ est un champs de Killing. On appelle un tel espace-temps un espace-temps stationnaire.

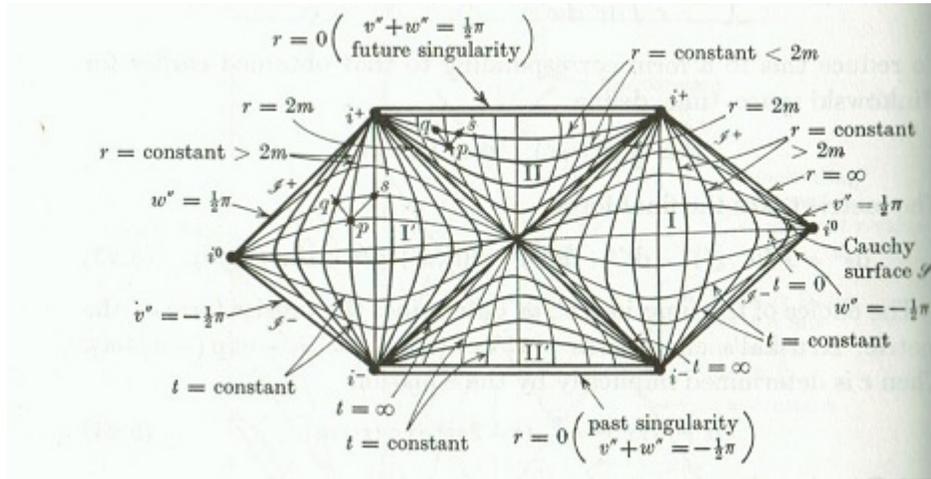


FIGURE 3. Représentation de Carter-Penrose de l'espace-temps de Schwarzschild

REMARQUE 6.3. *L'importance de cette famille de solutions vient en particulier du fait qu'il est conjecturé (et prouvé sous certaines hypothèses) que les seuls trous noirs stationnaires solutions des équations d'Einstein dans le vide sont précisément les membres de la famille de Kerr.*

REMARQUE 6.4. *Quand $a = 0$, on retrouve la solution de Schwarzschild.*

On peut supposer $a \neq 0$ puisque $a = 0$ correspond à Schwarzschild qui a déjà été traité dans la section précédente. On considère de plus la restriction suivante sur a

$$a^2 \leq m^2$$

qui correspond au cas pertinent du point de vue de la physique. Dans ce cas :

- (1) La métrique a une singularité là où $\Delta(r)$ s'annule, c'est à dire en

$$r_+ = m + (m^2 - a^2)^{1/2} \text{ et } r_- = m - (m^2 - a^2)^{1/2}$$

où

$$0 < r_- < r_+ \text{ si } 0 < a^2 < m^2$$

et

$$0 < r_- = r_+ \text{ si } a^2 = m^2.$$

- (2) Par ailleurs, la métrique a aussi une singularité lorsque $\rho(r, \theta)$ s'annule, c'est à dire en

$$(r, \theta) = \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

La situation est analogue à Schwarzschild au sens où :

- (1) La singularité en $(r, \theta) = (0, \frac{\pi}{2})$ est une vraie singularité, ce qui se prouve de nouveau en montrant la divergence de l'invariant de Kretschmann.
- (2) Les singularités en $r = r_-$ et $r = r_+$ sont des singularités de coordonnées.

Pour voir que les singularités en $r = r_-$ et $r = r_+$ sont des singularités de coordonnées, on introduit les coordonnées de Kerr (r, θ, ϕ_+, u_+) , où :

$$du_+ = dt + (r^2 + a^2)\Delta^{-1}dr, \quad d\phi_+ = d\phi + a\Delta^{-1}dr.$$

La métrique prend alors la forme :

$$\begin{aligned} \mathbf{g} = & \rho^2 d\theta^2 - 2a \sin^2 \theta dr d\phi_+ + 2dr du_+ + \rho^{-2} [(r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \theta] \sin^2 \theta d\phi_+^2 \\ & - 4a\rho^{-2} mr \sin^2 \theta d\phi_+ du_+ - (1 - 2mr\rho^{-2}) du_+^2. \end{aligned}$$

Cette métrique est analytique en $r = r_+$ et $r = r_-$. On peut aussi étendre la métrique à la variété définie par les coordonnées (r, θ, ϕ_-, u_-) , où :

$$du_- = dt - (r^2 + a^2)\Delta^{-1}dr, \quad d\phi_- = d\phi - a\Delta^{-1}dr.$$

L'extension analytique maximale est construite en combinant ces extensions, et en remarquant que l'on peut prolonger r aux valeurs négatives malgré la vraie singularité en $(r, \theta) = (0, \frac{\pi}{2})$. En recollant un nombre infini des ces extensions, on obtient l'extension maximale dont la figure 4 représente le diagramme de Carter-Penrose.

Les régions I sont celles pour lesquelles $r > r_+$, les régions II sont celles pour lesquelles $r \in]r_-, r_+[$, et les régions III sont celles pour lesquelles $-\infty < r < r_-$. Dans le cas où $a^2 = m^2$, il n'y a pas de région II car $r_+ = r_-$, et les régions I et III se recollent donc directement, comme on peut le voir sur le schéma (ii) de la figure 4.

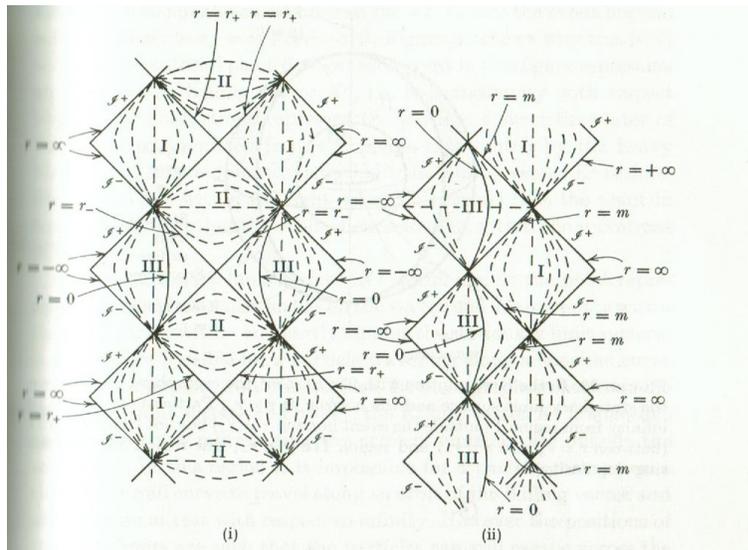


FIGURE 4. Représentation de Carter-Penrose de l'espace-temps de Kerr, dans les cas où $0 < a^2 < m^2$ (à gauche) et $a^2 = m^2$ (à droite)

CHAPITRE 7

Le problème de Cauchy en relativité générale

Dans ce dernier chapitre, on montre que les équations d'Einstein correspondent à un problème d'évolution pour un système d'équations aux dérivées partielles de nature hyperbolique. L'exemple le plus élémentaire d'un tel problème est l'équation des ondes, et on commence par montrer que pour un système de coordonnées bien choisi, les équations d'Einstein se réécrivent sous la forme d'un système d'équations d'ondes non linéaires. Pour simplifier l'exposition, on se limitera dans ce chapitre aux équations d'Einstein dans le vide (5.12).

7.1. Les équations d'Einstein en coordonnées d'ondes

Rappelons que l'espace-temps $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$ solution des équations d'Einstein est défini à invariance par difféomorphisme près (voir section 5.1). $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$ correspond donc en fait à une classe d'équivalence d'espace-temps, et on a par conséquent la liberté du choix du représentant dans cette classe, ce qui correspond à avoir la liberté du choix du système de coordonnées. Pour motiver le fait que les équations d'Einstein correspondent à un problème d'évolution, on va considérer dans cette section un système de coordonnées appelées *coordonnées d'ondes*. Commençons par définir le d'Alembertien.

DÉFINITION 7.1. *Soit f une fonction scalaire sur \mathcal{M} . On définit le d'Alembertien de f par*

$$\square_{\mathbf{g}} f = \mathbf{D}^\alpha \mathbf{D}_\alpha f.$$

EXEMPLE 7.2. *Dans le cas de l'espace-temps de Minkowski (\mathbb{R}^{1+3}, m) , le d'Alembertien est donné par*

$$\square_m f = -\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 f}{(\partial x^1)^2} + \frac{\partial^2 f}{(\partial x^2)^2} + \frac{\partial^2 f}{(\partial x^3)^2}.$$

On utilise généralement la notation \square pour ce d'Alembertien.

LEMME 7.3. *Dans un système de coordonnées x^α , $\alpha = 0, 1, 2, 3$, $\square_{\mathbf{g}}$ est donné par*

$$\square_{\mathbf{g}} f = \frac{1}{\sqrt{|\det \mathbf{g}|}} \partial_\beta (\mathbf{g}^{\beta\alpha} \sqrt{|\det \mathbf{g}|} \partial_\alpha f).$$

DÉMONSTRATION. Soit \mathcal{U} l'ouvert de coordonnées correspondant, et soit h une fonction scalaire sur \mathcal{M} à support compact dans \mathcal{U} . On a

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{U}} \square_{\mathbf{g}} f h d\mathcal{M} &= \int_{\mathcal{M}} \square_{\mathbf{g}} f h d\mathcal{M} \\ &= \int_{\mathcal{M}} \mathbf{D}_{\alpha} \mathbf{D}^{\alpha} f h d\mathcal{M} \\ &= \int_{\mathcal{M}} \mathbf{D}_{\alpha} \mathbf{X}^{\alpha} d\mathcal{M} - \int_{\mathcal{M}} \mathbf{D}^{\alpha} f \mathbf{D}_{\alpha} h d\mathcal{M}, \end{aligned} \quad (7.1)$$

où on a défini le champ de vecteurs \mathbf{X} par

$$\mathbf{X}^{\alpha} = h \mathbf{D}^{\alpha} f.$$

Notons que $\mathbf{D}_{\alpha} \mathbf{X}^{\alpha}$ est la divergence du champ de vecteurs \mathbf{X} . On a donc par le Théorème de Gauss

$$\int_{\mathcal{M}} \mathbf{D}^{\alpha} \mathbf{X}_{\alpha} d\mathcal{M} = 0.$$

Au vu de (7.1), on en déduit

$$\int_{\mathcal{U}} \square_{\mathbf{g}} f h d\mathcal{M} = - \int_{\mathcal{M}} \mathbf{D}^{\alpha} f \mathbf{D}_{\alpha} h d\mathcal{M}, \quad (7.2)$$

pour tout h à support compact dans \mathcal{U} .

Par ailleurs, en utilisant l'expression de la forme volume dans un système de coordonnées (voir section 3.8), on a

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{U}} \frac{1}{\sqrt{|\det \mathbf{g}|}} \partial_{\beta} (\mathbf{g}^{\beta\alpha} \sqrt{|\det \mathbf{g}|} \partial_{\alpha} f) h d\mathcal{M} &= \int_{\mathcal{U}} \frac{1}{\sqrt{|\det \mathbf{g}|}} \partial_{\beta} (\mathbf{g}^{\beta\alpha} \sqrt{|\det \mathbf{g}|} \partial_{\alpha} f) h \sqrt{|\det \mathbf{g}|} dx \\ &= \int_{\mathcal{U}} \partial_{\beta} (\mathbf{g}^{\beta\alpha} \sqrt{|\det \mathbf{g}|} \partial_{\alpha} f) h dx \\ &= - \int_{\mathcal{U}} \mathbf{g}^{\beta\alpha} \sqrt{|\det \mathbf{g}|} \partial_{\alpha} f \partial_{\beta} h dx \\ &= - \int_{\mathcal{U}} \mathbf{g}^{\beta\alpha} \partial_{\alpha} f \partial_{\beta} h \sqrt{|\det \mathbf{g}|} dx \\ &= - \int_{\mathcal{U}} \mathbf{D}^{\alpha} f \mathbf{D}_{\alpha} h d\mathcal{M} \\ &= - \int_{\mathcal{M}} \mathbf{D}^{\alpha} f \mathbf{D}_{\alpha} h d\mathcal{M}. \end{aligned}$$

Au vu de (7.2), on en déduit donc que

$$\int_{\mathcal{U}} \left(\square_{\mathbf{g}} f - \frac{1}{\sqrt{|\det \mathbf{g}|}} \partial_{\beta} (\mathbf{g}^{\beta\alpha} \sqrt{|\det \mathbf{g}|} \partial_{\alpha} f) \right) h d\mathcal{M} = 0$$

pour tout h à support compact dans \mathcal{U} et donc

$$\square_{\mathbf{g}} f = \frac{1}{\sqrt{|\det \mathbf{g}|}} \partial_{\beta} (\mathbf{g}^{\beta\alpha} \sqrt{|\det \mathbf{g}|} \partial_{\alpha} f)$$

en tout point de l'ouvert de coordonnées \mathcal{U} , ce qui conclut la preuve du lemme. \square

DÉFINITION 7.4. *Un système de coordonnées d'ondes sur $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$ est la donnée de 4 fonctions scalaires x^0, x^1, x^2, x^3 sur un ouvert \mathcal{U} de \mathcal{M} vérifiant*

$$\square_{\mathbf{g}} x^{\alpha} = 0, \alpha = 0, \dots, 3.$$

REMARQUE 7.5. *Les coordonnées d'ondes sont le pendant Lorentzien des coordonnées harmoniques en géométrie Riemannienne. Ces dernières sont définies sur une variété Riemannienne $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$ de dimension n par les conditions*

$$\Delta_{\mathbf{g}} x^j = 0, j = 1, \dots, n$$

où $\Delta_{\mathbf{g}}$ est l'opérateur de Laplace-Beltrami :

$$\Delta_{\mathbf{g}} f = \mathbf{D}^j \mathbf{D}_j f.$$

LEMME 7.6. *Soit $\mathbf{g}_{\alpha\beta}$ les coefficients de la métrique \mathbf{g} dans les coordonnées d'ondes. Alors on a*

$$\mathbf{g}^{\beta\mu} \partial_{\beta} \mathbf{g}_{\mu\alpha} = \frac{1}{2} \mathbf{g}^{\mu\nu} \partial_{\alpha} \mathbf{g}_{\mu\nu}, \alpha = 0, \dots, 3.$$

DÉMONSTRATION. On a

$$\square_{\mathbf{g}} x^{\alpha} = 0, \alpha = 0, \dots, 3.$$

En utilisant le Lemme 7.3, on en déduit

$$\partial_{\beta} (\mathbf{g}^{\beta\alpha} \sqrt{|\det \mathbf{g}|}) = 0, \alpha = 0, \dots, 3.$$

On a donc

$$\partial_{\beta} \mathbf{g}^{\beta\alpha} + \frac{1}{2} \mathbf{g}^{\beta\alpha} \mathbf{g}^{\mu\nu} \partial_{\beta} \mathbf{g}_{\mu\nu} = 0, \alpha = 0, \dots, 3.$$

Or on a

$$\partial_{\beta} \mathbf{g}^{\beta\alpha} = -\mathbf{g}^{\alpha\nu} \mathbf{g}^{\beta\mu} \partial_{\beta} \mathbf{g}_{\mu\nu}.$$

Par conséquent, on obtient

$$\mathbf{g}^{\alpha\nu} \mathbf{g}^{\beta\mu} \partial_{\beta} \mathbf{g}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \mathbf{g}^{\beta\alpha} \mathbf{g}^{\mu\nu} \partial_{\beta} \mathbf{g}_{\mu\nu}, \alpha = 0, \dots, 3$$

ce qui conclut la preuve du lemme après multiplication de l'égalité par $\mathbf{g}_{\gamma\alpha}$. \square

On va maintenant exprimer le tenseur de Ricci dans les coordonnées d'ondes.

PROPOSITION 7.7. *Le tenseur de Ricci s'écrit dans les coordonnées d'ondes*

$$\mathbf{Ric}_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2} \mathbf{g}^{\gamma\mu} \frac{\partial^2 \mathbf{g}_{\alpha\beta}}{\partial x^{\gamma} \partial x^{\mu}} + F(\mathbf{g})(\partial \mathbf{g})^2$$

où $F(\mathbf{g})$ est une fonction des coefficients de \mathbf{g} , et $(\partial \mathbf{g})^2$ une expression quadratique en les dérivées premières des coefficients de \mathbf{g} .

DÉMONSTRATION. On rappelle (5.7) qui donne la forme du tenseur de Ricci dans un système de coordonnées arbitraire

$$\mathbf{Ric}_{\alpha\beta} = \frac{\partial\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma} - \frac{\partial\Gamma^\gamma_{\gamma\alpha}}{\partial x^\beta} + \Gamma^2$$

où Γ^2 désigne des termes quadratiques en Γ . En développant les coefficients de Christoffel des deux premier termes à l'aide de la formule (3.2), on obtient après quelques calculs

$$\mathbf{Ric}_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}\mathbf{g}^{\gamma\mu}\frac{\partial^2\mathbf{g}_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma\partial x^\mu} + \frac{1}{2}\mathbf{g}^{\gamma\mu}\left(\frac{\partial^2\mathbf{g}_{\mu\beta}}{\partial x^\gamma\partial x^\alpha} + \frac{\partial^2\mathbf{g}_{\gamma\alpha}}{\partial x^\mu\partial x^\beta} - \frac{\partial^2\mathbf{g}_{\gamma\mu}}{\partial x^\alpha\partial x^\beta}\right) + F(\mathbf{g})(\partial\mathbf{g})^2 \quad (7.3)$$

où $F(\mathbf{g})$ est une fonction des coefficients de \mathbf{g} , et $(\partial\mathbf{g})^2$ une expression quadratique en les dérivées premières des coefficients de \mathbf{g} .

On se place maintenant dans un système de coordonnées d'ondes. En injectant le Lemme 7.6 dans (7.3), on obtient

$$\mathbf{Ric}_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}\mathbf{g}^{\gamma\mu}\frac{\partial^2\mathbf{g}_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma\partial x^\mu} + F(\mathbf{g})(\partial\mathbf{g})^2$$

ce qui conclut la preuve de la proposition. \square

En utilisant la Proposition 7.7, on voit que les équations d'Einstein dans le vide (5.12) s'écrivent dans les coordonnées d'ondes

$$\mathbf{g}^{\gamma\mu}\frac{\partial^2\mathbf{g}_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma\partial x^\mu} = F(\mathbf{g})(\partial\mathbf{g})^2$$

où $F(\mathbf{g})$ est une fonction des coefficients de \mathbf{g} , et $(\partial\mathbf{g})^2$ une expression quadratique en les dérivées premières des coefficients de \mathbf{g} . En utilisant la définition du d'Alembertien, on obtient finalement

$$\square_{\mathbf{g}}\mathbf{g}_{\alpha\beta} = F(\mathbf{g})(\partial\mathbf{g})^2.$$

On a donc la proposition suivante.

PROPOSITION 7.8. *Dans les coordonnées d'ondes, les équations d'Einstein sont équivalentes au système d'équations d'ondes non linéaires suivant en les coefficients de la métrique*

$$\square_{\mathbf{g}}\mathbf{g}_{\alpha\beta} = \mathcal{N}_{\alpha\beta}(\mathbf{g}, \partial\mathbf{g}), \quad \alpha, \beta = 0, \dots, 3 \quad (7.4)$$

où la nonlinéarité $\mathcal{N}_{\alpha\beta}$ est quadratique par rapport à $\partial\mathbf{g}$.

REMARQUE 7.9. *Comme \mathcal{M} est une variété de dimension 4 et que $\mathbf{g}_{\alpha\beta}$ est symétrique en α, β , (7.4) est donc un système de 10 équations d'ondes non linéaires indépendantes. On note que ces équations sont non linéaires même par rapport aux dérivées d'ordre le plus élevé, c'est à dire les dérivées d'ordres 2 en \mathbf{g} du terme $\square_{\mathbf{g}}\mathbf{g}_{\alpha\beta}$.*

REMARQUE 7.10. *Dans les coordonnées d'ondes, on obtient le système d'équations d'ondes (7.4), ce qui illustre le caractère hyperbolique des équations d'Einstein. On note que les équations d'Einstein ne sont pas d'un type particulier dans un système de coordonnées général. En particulier, elles peuvent être mises sous la forme d'un système*

couplé hyperbolique-elliptique pour d'autres choix de systèmes de coordonnées (ou plus généralement pour d'autres choix de jauge).

7.2. Les données de Cauchy

On a vu dans la section précédente que les équations d'Einstein prennent la forme d'un système d'équations d'ondes non linéaires. Ceci suggère d'introduire le problème modèle de l'équation d'onde usuelle, c'est à dire dans l'espace de Minkowski (\mathbb{R}^{1+3}, m) . On a

$$\square u = 0, u : \mathbb{R}^{1+3} \rightarrow \mathbb{R} \quad (7.5)$$

où \square est le d'Alembertien usuel sur \mathbb{R}^{1+3} (voir exemple 7.2). On rappelle que pour résoudre (7.5), il faut se donner des conditions initiales, appelées *données de Cauchy*, par exemple en $t = 0$. Le problème de Cauchy correspondant est alors

$$\begin{cases} \square u &= 0, (t, x) \in \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}^3, \\ u|_{t=0} &= u_0, x \in \mathbb{R}^3, \\ \partial_t u|_{t=0} &= u_1, x \in \mathbb{R}^3, \end{cases} \quad (7.6)$$

où $u_0, u_1 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ sont les données de Cauchy pour l'équation des ondes (7.5).

Dans le cas des équations d'Einstein dans les coordonnées d'ondes (7.4), on s'attend donc au vu du problème modèle (7.6) à devoir prescrire les données de Cauchy suivantes

$$\left((\mathbf{g}_{\alpha\beta})|_{x^0=0}, (\partial_{x^0} \mathbf{g}_{\alpha\beta})|_{x^0=0} \right) \quad (7.7)$$

où on a pris pour fonction temps la coordonnée x^0 .

On cherche désormais une formulation des données de Cauchy inspirée par (7.7), mais ne nécessitant pas de référence à un système de coordonnées particulier. On veut d'abord généraliser le choix de $\{t = 0\}$ dans (7.6) comme hypersurface où on prescrit les données de Cauchy. On rappelle (voir exemple 3.45) que $\{t = 0\}$ est une hypersurface de type espace de l'espace-temps de Minkowski. On va donc en général considérer une hypersurface Σ de type espace de \mathcal{M} . On note que Σ est une variété de dimension 3. La généralisation naturelle $(\mathbf{g}_{\alpha\beta})|_{x^0=0}$ est de se donner une métrique g sur Σ telle que g est la métrique induite par \mathbf{g} sur Σ . On rappelle (voir section 3.6) que la métrique induite par \mathbf{g} sur Σ est Riemannienne puisque Σ est une hypersurface de type espace.

On a donc pour l'instant pour les données de Cauchy une hypersurface de type espace Σ et la donnée d'une métrique Riemannienne g sur Σ correspondant à la métrique induite par \mathbf{g} sur Σ . Il reste à généraliser $(\partial_{x^0} \mathbf{g}_{\alpha\beta})|_{x^0=0}$. On note \mathbf{T} le champ de vecteurs tel que en tout point $p \in \Sigma$, \mathbf{T} est la normale unitaire à Σ orientée vers le futur. La généralisation naturelle de $(\partial_{x^0} \mathbf{g}_{\alpha\beta})|_{x^0=0}$ est de se donner la dérivée de \mathbf{g} dans la direction \mathbf{T} restreinte à Σ . Il ne peut s'agir de la dérivée covariante, puisque $\mathbf{D}\mathbf{g} = 0$. On utilise donc la dérivée

de Lie, et on prescrit

$$\mathcal{L}_{\mathbf{T}\mathbf{g}}|_{\Sigma}.$$

On note e_j , $j = 1, 2, 3$ une base de $T\Sigma$. On rappelle que l'on a par la Proposition 3.40

$$\mathcal{L}_{\mathbf{T}\mathbf{g}}e_j = \mathbf{D}_i \mathbf{T}_j + \mathbf{D}_j \mathbf{T}_i.$$

On introduit la seconde forme fondamentale k de l'hypersurface Σ de \mathcal{M} . On rappelle (voir section 3.6) que k est donnée par

$$k_{ij} = -\mathbf{D}_i \mathbf{T}_j.$$

De plus, d'après le Lemme 3.46, k est un 2-tenseur symétrique. On en déduit que

$$\mathcal{L}_{\mathbf{T}\mathbf{g}}e_j = -2k_{ij}.$$

Finalement, les données de Cauchy pour les équations d'Einstein dans le vide (5.12) sont les triplets (Σ, g, k) tels que

- (1) Σ est une variété de dimension 3,
- (2) g est une métrique Riemannienne sur Σ ,
- (3) k est un 2-tenseur symétrique sur Σ .

De plus, soit $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$ l'espace-temps solution des équations d'Einstein dans le vide (5.12) et correspondant aux données de Cauchy (Σ, g, k) , alors

- (1) Σ est une hypersurface de type espace de \mathcal{M} ,
- (2) g est la métrique induite par \mathbf{g} sur Σ ,
- (3) k est la seconde forme fondamentale de l'hypersurface Σ de \mathcal{M} .

REMARQUE 7.11. *Au vu de la discussion informelle ayant mené à (7.7), il semble qu'il faille imposer 10 conditions sur \mathbf{g} , ainsi que 10 conditions sur sa dérivée première en temps. Or la formulation du problème de Cauchy que l'on vient de donner porte sur la métrique induite sur Σ et la seconde forme fondamentale, c'est à dire dans les deux cas sur 6 conditions. On note qu'il est normal de ne prescrire à l'instant initial que 6 des 10 degrés de liberté des équations d'Einstein. En effet, les 4 derniers degrés de liberté correspondent à l'invariance par difféomorphisme de la solution, et sont donc fixés par le choix du système de coordonnées (ou par le choix de jauge).*

7.3. Les équations de contrainte

On vient de décrire dans la section précédente les données de Cauchy pour les équations d'Einstein dans le vide (5.12). On souhaite maintenant formuler le problème de Cauchy correspondant. Pour cela, on va d'abord montrer que les données de Cauchy doivent satisfaire des conditions de compatibilité appelées équations de contrainte. On commence par dériver les équations de Gauss et de Codazzi.

PROPOSITION 7.12. *Soit Σ une hypersurface de \mathcal{M} de genre espace. Soit g la métrique induite par \mathbf{g} sur Σ , \mathbf{T} la normale unitaire à Σ orientée vers le futur, k la seconde forme fondamentale, ∇ la dérivée covariante induite, et R le tenseur de courbure induit. Alors on a l'équation de Gauss*

$$\mathbf{R}_{ijlm} = R_{ijlm} + k_{mj}k_{li} - k_{lj}k_{mi} \quad (7.8)$$

et l'équation de Codazzi

$$\mathbf{R}_{i0jl} = -\nabla_j k_{il} + \nabla_l k_{ij}. \quad (7.9)$$

DÉMONSTRATION. (7.8) et (7.9) sont des égalités entre tenseurs et il suffit de les démontrer dans une base $e_i, i = 1, 2, 3$ de $T\Sigma$ bien choisie. Pour simplifier les calculs, on prend une base orthonormée de $T\Sigma$. On note au vu de la définition de \mathbf{T} et k , et du fait que $e_i, i = 1, 2, 3$ est une base orthonormée de $T\Sigma$ que l'on a

$$\begin{cases} \mathbf{D}_i \mathbf{T} &= -k_{ij} e_j \\ \mathbf{D}_i e_j &= \nabla_i e_j - k_{ij} \mathbf{T}. \end{cases} \quad (7.10)$$

On commence par l'équation de Gauss. On a

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{ijlm} &= \mathbf{g}(\mathbf{D}_l \mathbf{D}_m e_j, e_i) - \mathbf{g}(\mathbf{D}_m \mathbf{D}_l e_j, e_i) - \mathbf{g}(\mathbf{D}_{\mathbf{D}_l e_m - \mathbf{D}_m e_l} e_j, e_i) \\ &= \mathbf{D}_l(\mathbf{g}(\mathbf{D}_m e_j, e_i)) - \mathbf{g}(\mathbf{D}_m e_j, \mathbf{D}_l e_i) - \mathbf{D}_m(\mathbf{g}(\mathbf{D}_l e_j, e_i)) + \mathbf{g}(\mathbf{D}_l e_j, \mathbf{D}_m e_i) \\ &\quad - \mathbf{g}(\mathbf{D}_{\nabla_l e_m - \nabla_m e_l} e_j, e_i) \\ &= \nabla_l(g(\nabla_m e_j, e_i)) - \mathbf{g}(\nabla_m e_j - k_{mj} \mathbf{T}, \nabla_l e_i - k_{li} \mathbf{T}) - \nabla_m(g(\nabla_l e_j, e_i)) \\ &\quad + \mathbf{g}(\nabla_l e_j - k_{lj} \mathbf{T}, \nabla_m e_i - k_{mi} \mathbf{T}) - g(\nabla_{\nabla_l e_m - \nabla_m e_l} e_j, e_i) \\ &= g(\nabla_l \nabla_m e_j, e_i) - g(\nabla_m \nabla_l e_j, e_i) - g(\nabla_{\nabla_l e_m - \nabla_m e_l} e_j, e_i) + k_{mj}k_{li} - k_{lj}k_{mi} \\ &= R_{ijlm} + k_{mj}k_{li} - k_{lj}k_{mi}, \end{aligned}$$

où on a utilisé (7.10), le fait que \mathbf{T} est la normale unitaire à Σ et le fait que k est symétrique. Ceci conclut la preuve de l'équation de Gauss.

On considère maintenant l'équation de Codazzi. On a

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{i0jl} &= \mathbf{g}(\mathbf{D}_j \mathbf{D}_l \mathbf{T}, e_i) - \mathbf{g}(\mathbf{D}_l \mathbf{D}_j \mathbf{T}, e_i) - \mathbf{g}(\mathbf{D}_{\mathbf{D}_j e_l - \mathbf{D}_l e_j} \mathbf{T}, e_i) \\ &= \mathbf{D}_j(\mathbf{g}(\mathbf{D}_l \mathbf{T}, e_i)) - \mathbf{g}(\mathbf{D}_l \mathbf{T}, \mathbf{D}_j e_i) - \mathbf{D}_l(\mathbf{g}(\mathbf{D}_j \mathbf{T}, e_i)) + \mathbf{g}(\mathbf{D}_j \mathbf{T}, \mathbf{D}_l e_i) \\ &\quad - \mathbf{g}(\mathbf{D}_{\nabla_j e_l - \nabla_l e_j} \mathbf{T}, e_i) \\ &= -\nabla_j(k_{li}) - \mathbf{g}(-k_{lm} e_m, \nabla_j e_i - k_{ij} \mathbf{T}) + \nabla_l(k_{ij}) + \mathbf{g}(-k_{jm} e_m, \nabla_l e_i - k_{il} \mathbf{T}) \\ &\quad + k_{mi}(\nabla_j e_l - \nabla_l e_j)_m \\ &= -\nabla_j k_{li} + \nabla_l k_{ij} \end{aligned}$$

où on a utilisé (7.10), le fait que \mathbf{T} est la normale unitaire à Σ et la définition de k . Ceci conclut la preuve de l'équation de Codazzi, et donc de la proposition. \square

On va maintenant utiliser la Proposition 7.12 pour calculer \mathbf{G}_{00} et \mathbf{G}_{0i} .

PROPOSITION 7.13. *On a*

$$2\mathbf{G}_{00} = Rscal + (Tr_g k)^2 - |k|^2,$$

et

$$\mathbf{G}_{0i} = -\nabla^l k_{il} + \nabla_i Tr_g k,$$

où $Rscal$ désigne la courbure scalaire de R , et où on a défini

$$Tr_g k = k^i{}_i \text{ et } |k|^2 = k^{ij} k_{ij}.$$

DÉMONSTRATION. On commence par \mathbf{G}_{00} . On a

$$\begin{aligned} \mathbf{Ric}_{00} &= \mathbf{R}^\alpha{}_{0\alpha 0} \\ &= -\mathbf{R}_{0000} + \mathbf{R}^i{}_{0i0} \\ &= \mathbf{R}^i{}_{0i0} \\ &= -\mathbf{Ric}^i{}_i + \mathbf{R}^{ij}{}_{ij} \\ &= -\mathbf{Ric}_{00} - \mathbf{Rscal} + \mathbf{R}^{ij}{}_{ij} \end{aligned}$$

où on a utilisé les symétries de \mathbf{R} . Grace à l'équation de Gauss (7.8), on en déduit

$$\begin{aligned} 2\mathbf{G}_{00} &= 2\mathbf{Ric}_{00} + \mathbf{Rscal} \\ &= \mathbf{R}^{ij}{}_{ij} \\ &= \mathbf{g}^{il} \mathbf{g}^{jm} \mathbf{R}_{lmij} \\ &= g^{il} g^{jm} (R_{ijlm} + k_{mj} k_{li} - k_{lj} k_{mi}) \\ &= Rscal + (Tr_g k)^2 - |k|^2 \end{aligned}$$

ce qui est bien l'identité recherchée.

On calcule maintenant \mathbf{G}_{0i} . On a

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_{0i} &= \mathbf{Ric}_{0i} \\ &= \mathbf{R}^\alpha{}_{0\alpha i} \\ &= -\mathbf{R}_{000i} + \mathbf{R}^j{}_{0ji} \\ &= \mathbf{R}^j{}_{0ji} \end{aligned}$$

où on a utilisé les symétries de \mathbf{R} . Grace à l'équation de Codazzi (7.9), on en déduit

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_{0i} &= \mathbf{g}^{jl} \mathbf{R}_{l0ji} \\ &= g^{jl} (-\nabla_j k_{il} + \nabla_i k_{lj}) \\ &= -\nabla^l k_{il} + \nabla_i Tr_g k \end{aligned}$$

ce qui est bien l'identité recherchée. Ceci conclut la preuve de la proposition. \square

On peut maintenant définir les équations de contrainte.

DÉFINITION 7.14. Soit un triplet (Σ, g, k) où Σ est une variété de dimension 3, g est une métrique Riemannienne sur Σ et k est un 2-tenseur symétrique sur Σ . On appelle équations de contrainte le système d'équations suivantes sur Σ

$$\begin{cases} R_{\text{scal}} + (Tr_g k)^2 - |k|^2 &= 0, \\ \nabla^l k_{il} - \nabla_i Tr_g k &= 0, \end{cases} \quad (7.11)$$

où R_{scal} désigne la courbure scalaire de R , et où on a défini

$$Tr_g k = k^i{}_i \text{ et } |k|^2 = k^{ij} k_{ij}.$$

REMARQUE 7.15. On suppose que $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$ satisfait les équations d'Einstein dans le vide (5.12). Alors on note, au vu de la Proposition 7.13, qu'une condition nécessaire pour qu'un triplet (Σ, g, k) corresponde aux données de Cauchy associées à $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$ est que (g, k) satisfasse les équations de contrainte (7.11) sur Σ .

REMARQUE 7.16. Notons que les équations de contrainte (7.11) forment un système de quatre équations nonlinéaires avec pour inconnues g et k . Comme g et k ont chacun 6 composantes indépendantes, il s'agit donc d'un système sous déterminé, qui admet a priori une large classe de solutions.

EXEMPLE 7.17. Les données de Cauchy correspondant à l'espace-temps de Minkowski (\mathbb{R}^{1+3}, m) sont données par $(\mathbb{R}^3, \delta, 0)$ où δ est la métrique Euclidienne sur \mathbb{R}^3 . On note que

$$(g, k) = (\delta, 0)$$

vérifie bien les équations de contrainte (7.11).

7.4. La formulation du problème de Cauchy

Finalement, terminons ce chapitre par l'énoncé du problème de Cauchy pour les équations d'Einstein dans le vide (5.12).

Soit (Σ, g, k) donné tel que :

- (1) Σ est une variété de dimension 3,
- (2) g est une métrique Riemannienne sur Σ ,
- (3) k est un 2-tenseur symétrique sur Σ ,
- (4) (g, k) satisfait les équations de contrainte (7.11) sur Σ (cette condition est nécessaire au vu de la remarque 7.15).

Alors, le problème de Cauchy pour les équations d'Einstein dans le vide consiste à chercher un espace-temps $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$ tel que :

- (1) $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$ est solution de (5.12) :

$$\mathbf{Ric}_{\alpha\beta} = 0, \alpha, \beta = 0, \dots, 3,$$

- (2) Σ est une hypersurface de type espace de \mathcal{M} ,

- (3) g est la métrique induite par \mathbf{g} sur Σ ,
 (4) k est la seconde forme fondamentale de l'hypersurface Σ de \mathcal{M} .

REMARQUE 7.18. *On peut montrer que si on a*

$$\mathbf{Ric}_{ij} = 0, \quad i, j = 1, 2, 3,$$

et si les équations de contraintes (7.11) sont satisfaites sur Σ , alors les équations de contraintes sont satisfaites sur \mathcal{M} , ce qui implique d'après la Proposition 7.13 que :

$$\mathbf{Ric}_{0\alpha} = 0, \quad \alpha = 0, \dots, 3$$

sur \mathcal{M} . En particulier, la partie des équations d'Einstein dans le vide correspondant au problème d'évolution est

$$\mathbf{Ric}_{ij} = 0, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Il y a donc seulement 6 équations d'évolution, ce qui est cohérent avec le fait que les données de Cauchy g et k ne comportent que 6 degrés de liberté chacune (voir aussi la remarque 7.11).

Grâce à la formulation du problème de Cauchy pour les équations d'Einstein établie dans ce chapitre, nous sommes maintenant arrivés aux portes de l'étude du problème d'évolution en relativité générale. La prochaine étape naturelle consisterait à

- établir l'existence et l'unicité locale des solutions, voir les travaux de Choquet-Bruhat [1],
- établir l'existence de solutions maximales, voir les travaux de Choquet-Bruhat et Geroch [2].

Ces travaux fournissent un cadre permettant la formulation de nombreux problèmes fascinants au coeur de la recherche actuelle en relativité mathématique. On peut citer à titre d'exemple la formation des trous noirs, la stabilité des trous noirs et le comportement asymptotique en temps grand des solutions. Nous renvoyons par exemple à [5] et [11] pour une présentation de certains de ces problèmes.

7.5. Exercices

Exercice 1. Soit $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$ une solution des équations d'Einstein dans le vide. Soit x^α un système de coordonnées, et soit H^α défini dans ce système de coordonnées par

$$H^\alpha = \mathbf{g}^{\lambda\beta} \Gamma_{\lambda\beta}^\alpha.$$

- a) Montrer que pour toute fonction scalaire $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$, on a :

$$\square_{\mathbf{g}} f = \mathbf{g}^{\alpha\beta} \partial_\alpha \partial_\beta f - H^\rho \partial_\rho f.$$

En déduire que $H^\alpha = 0$ si et seulement si $\square_{\mathbf{g}} x^\alpha = 0$.

b) Montrer que

$$\mathbf{Ric}_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\mathbf{g}^{\alpha\rho}\partial_\alpha\partial_\rho\mathbf{g}_{\mu\nu} + \frac{1}{2}(\mathbf{g}_{\mu\rho}\partial_\nu H^\rho + \mathbf{g}_{\nu\rho}\partial_\mu H^\rho) + P_{\mu\nu}(\mathbf{g})(\partial\mathbf{g}, \partial\mathbf{g})$$

où $P_{\mu\nu}(\mathbf{g})(\partial\mathbf{g}, \partial\mathbf{g})$ est une expression quadratique en les dérivées de $\mathbf{g}_{\alpha\beta}$.

c) Montrer que l'on peut toujours choisir un système de coordonnées tel que à $t = 0$ on ait $H^\alpha = 0$.

d) On considère maintenant que $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$ satisfait

$$-\frac{1}{2}\mathbf{g}^{\alpha\rho}\partial_\alpha\partial_\rho\mathbf{g}_{\mu\nu} + P_{\mu\nu}(\mathbf{g})(\partial\mathbf{g}, \partial\mathbf{g}) = 0.$$

Montrer que les équations de contraintes impliquent que $\partial_t H^\alpha = 0$ à $t = 0$.

e) Montrer que $\mathbf{D}^\alpha \mathbf{G}_{\alpha\beta} = 0$ induit un système de type ondes sur H .

f) Conclure.

Exercice 2. Soit $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$ une solution des équations d'Einstein dans le vide. Soit t une fonction temps et soit g et k respectivement la métrique et la seconde forme fondamentale des hypersurfaces de niveau de t .

a) Montrer qu'il existe un système de coordonnées (t, x^1, x^2, x^3) tel que la métrique \mathbf{g} prend la forme

$$\mathbf{g} = -n^2(dt)^2 + g_{ij}dx^i dx^j,$$

où n est une fonction.

b) Trouver un système d'équations vérifiées par $\partial_t g_{ij}$ et $\partial_t k_{ij}$ faisant intervenir en particulier n et le tenseur de courbure induit R .

c) Supposons que $g^{ij}k_{ij} = 0$. Trouvez une équation satisfaite par n .

Formulaire

- Expression d'un champ de tenseurs de type (r, s) dans des coordonnées locales :

$$\mathbf{T} = T_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_r}} \otimes dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_s}$$

- Expression des composantes de $\mathcal{L}_{\mathbf{X}}\mathbf{T}$ dans des coordonnées locales, où \mathbf{X} est un champ de vecteurs et \mathbf{T} un champ de tenseurs de type (r, s) :

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_{\mathbf{X}}\mathbf{T})_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} &= \frac{\partial T_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}}{\partial x^i} X^i - T_{j_1 \dots j_s}^{a i_2 \dots i_r} \frac{\partial X^{i_1}}{\partial x^a} - \text{tous les autres indices en haut} \\ &\quad + T_{a j_2 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} \frac{\partial X^a}{\partial x^{j_1}} + \text{tous les autres indices en bas.} \end{aligned}$$

- Expression des composantes de la dérivée covariante $\mathbf{D}_{\frac{\partial}{\partial x^l}}\mathbf{T}$ d'un champ de tenseurs de type (r, s) dans des coordonnées locales :

$$\begin{aligned} \left(\mathbf{D}_{\frac{\partial}{\partial x^l}}\mathbf{T}\right)_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} &= \frac{\partial T_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}}{\partial x^l} + \Gamma_{lk}^{i_1} T_{j_1 \dots j_s}^{k i_2 \dots i_r} + \text{tous les autres indices en haut} \\ &\quad - \Gamma_{lj_1}^k T_{k j_2 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} - \text{tous les autres indices en bas.} \end{aligned}$$

- Expression de la métrique \mathbf{g} dans des coordonnées locales :

$$\mathbf{g} = \mathbf{g}_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$$

- Symboles de Christoffel de la connexion de Levi-Civita associée à \mathbf{g} :

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2} \mathbf{g}^{il} \left(\frac{\partial \mathbf{g}_{jl}}{\partial x^k} + \frac{\partial \mathbf{g}_{kl}}{\partial x^j} - \frac{\partial \mathbf{g}_{jk}}{\partial x^l} \right)$$

- Equation des géodésiques dans un système de coordonnées :

$$\ddot{\gamma}^\alpha(t) + \dot{\gamma}^\mu(t) \dot{\gamma}^\beta(t) \Gamma_{\beta\mu}^\alpha = 0$$

- Le tenseur de courbure \mathbf{R} est défini pour tous champs de vecteurs $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}$ par :

$$\mathbf{R}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})\mathbf{Z} = \mathbf{D}_{\mathbf{X}}\mathbf{D}_{\mathbf{Y}}\mathbf{Z} - \mathbf{D}_{\mathbf{Y}}\mathbf{D}_{\mathbf{X}}\mathbf{Z} - \mathbf{D}_{[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]}\mathbf{Z}.$$

Dans un système de coordonnées, on a

$$\mathbf{R} \left(\frac{\partial}{\partial x^\gamma}, \frac{\partial}{\partial x^\mu} \right) \frac{\partial}{\partial x^\beta} = \mathbf{R}^\alpha{}_{\beta\gamma\mu} \frac{\partial}{\partial x^\alpha}$$

où $\mathbf{R}^\alpha{}_{\beta\gamma\mu}$ est donné par

$$\mathbf{R}^\alpha{}_{\beta\gamma\mu} = \frac{\partial \Gamma^\alpha{}_{\mu\beta}}{\partial x^\gamma} - \frac{\partial \Gamma^\alpha{}_{\gamma\beta}}{\partial x^\mu} + \Gamma^\alpha{}_{\gamma\nu} \Gamma^\nu{}_{\mu\beta} - \Gamma^\alpha{}_{\mu\nu} \Gamma^\nu{}_{\gamma\beta}$$

- Le tenseur de Ricci est défini par :

$$\mathbf{Ric}_{\beta\mu} = \mathbf{R}^\alpha{}_{\beta\alpha\mu}.$$

Dans un système de coordonnées, on a

$$\mathbf{Ric}_{\beta\mu} = \frac{\partial \Gamma^\alpha{}_{\mu\beta}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial \Gamma^\alpha{}_{\alpha\beta}}{\partial x^\mu} + \Gamma^\alpha{}_{\alpha\nu} \Gamma^\nu{}_{\mu\beta} - \Gamma^\alpha{}_{\mu\nu} \Gamma^\nu{}_{\alpha\beta}$$

- Courbure scalaire

$$\mathbf{Rscal} = \mathbf{g}^{\alpha\beta} \mathbf{Ric}_{\alpha\beta}.$$

- Tenseur d'Einstein

$$\mathbf{G}_{\alpha\beta} = \mathbf{Ric}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \mathbf{g}_{\alpha\beta} \mathbf{Rscal}$$

- Equations d'Einstein

$$\mathbf{G}_{\mu\nu} = \mathbf{T}_{\mu\nu}$$

- Le d'Alembertien est défini par :

$$\square_{\mathbf{g}} f = \mathbf{D}^\alpha \mathbf{D}_\alpha f.$$

Dans un système de coordonnées, on a pour une fonction scalaire f

$$\square_{\mathbf{g}} f = \frac{1}{\sqrt{|\det \mathbf{g}|}} \partial_\beta (\mathbf{g}^{\beta\alpha} \sqrt{|\det \mathbf{g}|} \partial_\alpha f)$$

Index

- 1-forme, 15
- action d'Einstein-Hilbert, 56
- application exponentielle, 32
- atlas, 8
- base duale, 16
- champ de Killing, 37
- champ de tenseurs, 18
- champ de vecteurs, 14
- champ scalaire, 61
- classe conforme, 41
- connexion, 23
- connexion de Levi-Civita, 29
- connexion sans torsion, 24
- contraction, 18
- coordonnées d'Eddington-Finkelstein, 68
- coordonnées d'ondes, 75
- coordonnées de Boyer-Lindquist, 70
- coordonnées géodésiques polaires, 33
- coordonnées harmoniques, 77
- coordonnées normales, 33
- courbe de type espace, 28
- courbe de type lumière, 28
- courbe de type temps, 28
- courbure scalaire, 37
- crochet de Lie, 20
- d'Alembertien, 75
- dérivée covariante, 23
- dérivée de Lie, 22
- dérivation, 11
- diagramme de Carter-Penrose, 67
- données de Cauchy, 79
- équation de Codazzi, 81
- équation de Gauss, 81
- équation du mouvement, 56
- équations d'Einstein, 59
- équations d'Einstein dans le vide, 60
- équations de contrainte, 82
- équations de l'électromagnétisme, 48
- équations de Maxwell, 48
- espace tangent, 13
- espace-temps stationnaire, 70
- espace-temps statique, 67
- extension de Kruskal, 68
- fibré cotangent, 15
- fibré tangent, 14
- forme volume, 42
- géodésique, 31
- groupe à un paramètre, 20
- groupe de Poincaré, 46
- hypersurface, 39
- hypersurface de genre espace, 40
- hypersurface de genre lumière, 40
- hypersurface de genre temps, 40
- hypersurface nulle, 40
- identité de Bianchi, 37
- immersion, 10
- invariant de Kretschmann, 67
- isométrie, 37
- Laplace-Beltrami, 77
- localement fini, 8
- loi de conservation locale, 60
- lois de conservation, 51
- longueur d'une courbe, 29
- métrique, 27
- métrique conforme, 41

métrique de Minkowski, 28
métrique Euclidienne, 28
métrique induite, 40
métrique Lorentzienne, 27
métrique Riemannienne, 27

paracompact, 8
poussé en avant, 19
principe d'équivalence, 55
problème de Cauchy, 75
produit tensoriel, 17

rotation hyperbolique, 47

séparé, 8
seconde forme fondamentale, 40
singularité de coordonnées, 68
solution de Kerr, 70
solution de Schwarzschild, 67
submersion, 10
symboles de Christoffel, 30

temps propre, 29
tenseur d'énergie-impulsion, 59
tenseur de courbure, 36
tenseur de déformation, 38
tenseur de Ricci, 37
tiré en arrière, 19
transformations de Lorentz, 46
transport parallèle, 31
trou blanc, 70
trou noir, 70

variété, 8
variété Riemannienne, 27
variété Lorentzienne, 27
vecteur de type espace, 28
vecteur de type lumière, 28
vecteur de type temps, 28
vecteur nul, 28

Bibliographie

- [1] Y. C. Bruhat, Théorème d'existence pour certains systèmes d'équations aux dérivées partielles non-linéaires., *Acta Math.* **88**, 1952, 141–225.
- [2] Y. C. Bruhat, R. Geroch, Global Aspects of the Cauchy Problem in General Relativity. *Comm. Math. Phys.* **14**, 1969, 329–335.
- [3] A. Einstein, Zur Elektrodynamik bewegter Körper, *Annalen der Physik und Chemie* **17**, 1905, 891–921.
- [4] A. Einstein, Der Feldgleichungen des Gravitation, *Preuss. Akad. Wiss. Berlin, Sitzber.*, 1915, 844–847.
- [5] S.W. Hawking, G.F.R. Ellis, *The Large Scale Structure of Space-Time* Cambridge University Press, 1973.
- [6] R. Kerr, Gravitational field of a spinning mass as an example of algebraically special metrics. *Phys. Rev. Lett.* **11**, 1963, 237–238.
- [7] H. Minkowski, “Raum und Zeit”, *Physikalische Zeitschrift*, 10. Jahrgang, 1909, 104–115.
- [8] P. Petersen, *Riemannian geometry*, Graduate Texts in Mathematics, 171, Springer, 1998.
- [9] B. Riemann, Bernhard, Über die Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen, Habilitationsschrift, 1854, *Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, 13 (1868).
- [10] K. Schwarzschild, Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie. *Sitzungen. d. Preuss. Akad. d. Wissenschaften* **1**, 1916, 189–196.
- [11] R. Wald, *General Relativity* The University of Chicago Press, 1984.