4M028 – Equations d'évolution, stabilité, contrôle

TD3:correction de quelques exercices

M1 2018–2019

Exercise : Soit $f : U \to \mathbb{R}^n$, locallement Lipschitz, $U \subset \mathbb{R}^n$ ouvert. On suppose qu'il existe $V : \Omega \to \mathbb{R}_+$ continue, $\Omega \subset U$, Ω ouvert, vérifiant les hypothèses du principe d'invariance de LaSalle :

1. V est propre.
2. V décroit le long des portions d'orbites contenues dans Ω.

Montrer que pour tout $x \in \Omega$, $d(\phi_t(x), \omega(x)) \to 0$, lorsque $t \to \sup I_x$.

Correction

Soit $L = V(x)$. La fonction $t \to V(\phi_t(x))$ est décroissante par hypothèse, donc $\forall t \geq 0$, $t \in I_x$, on a $V(\phi_t(x)) \in [0, L]$ et donc $\phi_t(x) \in V^{-1}([0, L])$. Comme V est propre, $V^{-1}([0, L])$ est compact, et l'orbite reste dans un compact en temps positif. D'après un résultat du cours, on a alors que $\omega(x)$ est un compact connexe non-vide. Comme l'orbite reste dans un compact, $\phi_t(x)$ est définie pour tout $t \geq 0$.

On suppose maintenant que $d(\phi_t(x), \omega(x))$ ne tends pas vers 0 lorsque $t \to +\infty$. Alors, il existe un $\epsilon > 0$ et une suite de temps $t_n \to +\infty$ lorsque $n \to +\infty$ tel que $d(\phi_{t_n}(x), \omega(x)) > \epsilon$.

La suite $(\phi_{t_n}(x))$ restant dans un compact, on peut en extraire une sous-suite convergente. Par définition de $\omega(x)$, la limite l doit appartenir à $\omega(x)$. Mais par construiction, $d(l, \omega(x)) \geq \epsilon$, contradiction.

Exercise : Etudier la stabilité par linéarisation pour les systèmes suivant

Système 1 :

$$\begin{aligned} x' &= -x + y + 2\sin z, \\ y' &= -2z + y^3, \\ z' &= \sin y - \tan z. \end{aligned}$$

Système 2 :

$$\begin{aligned} x' &= -x^3 + xy^2 \\ y' &= -y^3. \end{aligned}$$

Système 3 :

$$\begin{aligned} x' &= -2y + yz - x^3 \\ y' &= x - xz - y^3 \\ z' &= xy - z^3 \end{aligned}$$

Système 1 :

Le système est de la forme

$$X' = f(X)$$

avec $X(t) = (x(t), y(t), z(t))$ et $f : (x, y, z) \to (-x + y + 2\sin z, -2z + y^3, \sin y - \tan z)$. Le point $(0, 0, 0)$ est un point stationnaire car $f(0, 0, 0) = 0$.

Par définition, le système linéarisé autour de zéro est le système

$$X' = df_{(0,0,0)}.X$$

où $df_{(0,0,0)}$ est la différentielle de f calculé au point $(0, 0, 0)$.

Sous forme matricielle, on peut représenter df par la matrice Jacobienne, en calculant toutes les dérivées partielles des composantes de f. On trouve la matrice

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2\cos z \\ 0 & 3y^2 & -2 \\ 0 & \cos y & -1 - \tan^2 z \end{pmatrix}$$

Evaluée en $(0, 0, 0)$, on trouve donc

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

et le système linéarisé est donc donné par

$$\begin{aligned} x' &= -x + y + 2z \\ y' &= -2z \\ z' &= y - z \end{aligned}$$

La matrice

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

a pour polynôme caractéristique $-(X + 1)(X^2 + X + 2)$ de racines -1, $\frac{-1 \pm i\sqrt{7}}{2}$. Les parties réelles des racines sont toutes strictement négatives, donc d'après le théorème de stabilité par linéarisation, $(0, 0, 0)$ est asymptotiquement stable.

Système 2 :

Par le même argument que pour le système 1, on détermine le linéarisé autour du point stationnaire $(0, 0)$. Or la matrice Jacobienne en $(0, 0)$ est la matrice nulle. On ne peut donc pas appliquer le théorème de stabilité par linéarisation.

Remarque : En écrivant encore le système sous la forme $X' = f(X)$, la fonction $V : (x, y) \to \frac{x^2+y^2}{2}$ vérifie

$$\nabla V.f = -x^4 - y^4 + x^2y^2.$$

Comme $x^2y^2 \leq \frac{1}{2}\left(x^4 + y^4\right)$ (puisque $2ab \leq a^2 + b^2$), on a que

$$\nabla V.f \leq -x^4 - y^4 + \frac{1}{2}\left(x^4 + y^4\right) = -\frac{1}{2}\left(x^4 + y^4\right) \leq 0.$$

La fonction V est alors une fonction de Lyapunov stricte et le point $(0, 0)$ est asymptotiquement stable.

Système 3 : En reprenant le même argument, on trouve comme système linéarisé autour de $(0,0,0)$

$$\begin{array}{rcl} x' & = & -2y \\ y' & = & x \\ z' & = & 0. \end{array}$$

La matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

admet la valeur propre 0 donc on ne peut pas appliquer le théorème de stabilité par linéarisation.