4M028 – Equations d'évolution, stabilité, contrôle
TD3

M1 2018–2019

Exercise 1 : On considère le mouvement d'un solide rigide en rotation soumis à une force extérieure,

$$\begin{aligned} I_1\omega_1' &= (I_2 - I_3)\omega_2\omega_3 - \omega_1, \\ I_2\omega_2' &= (I_3 - I_1)\omega_1\omega_3 - \omega_2, \\ I_3\omega_3' &= (I_1 - I_2)\omega_1\omega_2 - \omega_3, \end{aligned}$$

où $I_1, I_2, I_3 > 0$ sont les moments d'inertie du solide. Construire une fonction de Lyapunov et en déduire que l'équilibre $(0, 0, 0)$ est asymptotiquement stable.

Exercise 2 : Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que $g(0) = 0$ et $xg(x) > 0$ si $x \neq 0$. On considère l'équation différentielle.

$$x'' + x' + g(x) = 0.$$

Montrer que $V(x, y) = \int_0^x g(s)ds + \frac{y^2}{2}$ est une fonction de Lyapunov pour le point d'équilibre $x = 0$, $x' = 0$ et en déduire la stabilité asymptotique de $x = 0$, $x' = 0$.

Exercise 3 : Soit $f : U \to \mathbb{R}^n$, locallement Lipschitz, $U \subset \mathbb{R}^n$ ouvert. On suppose que toute solution de $X' = f(X)$ est de norme constante.

1. Montrer que $f(0) = 0$.
2. Montrer que $f(Y).Y = 0$, $\forall Y \in \mathbb{R}^n$. En déduire que 0 est asymptotiquement stable pour le système $X' = f(X) - X$.

Exercise 4 : Soit $f : U \to \mathbb{R}^n$, locallement Lipschitz, $U \subset \mathbb{R}^n$ ouvert. On suppose que $f(x_0) = 0$ et que $L : V_{x_0} \to \mathbb{R}$ est une fonction de Lyapunov stricte en x_0 pour le système différentiel associé définie sur un voisinage V_{x_0} de x_0. Montrer que x_0 est le seul point stationnaire dans V_{x_0}.

Exercise 5 : Soit $f : U \to \mathbb{R}^n$, locallement Lipschitz, $U \subset \mathbb{R}^n$ ouvert. On suppose qu'il existe $V : \Omega \to \mathbb{R}_+$ continue, $\Omega \subset U$, Ω ouvert, vérifiant les hypothèses du principe d'invariance de LaSalle :

1. V est propre.
2. V décroit le long des portions d'orbites contenues dans Ω.

Montrer que pour tout $x \in \Omega$, $d(\phi_t(x), \omega(x)) \to 0$, lorsque $t \to \sup I_x$.

Exercise 6 : Soit $f : U \to \mathbb{R}^n$, locallement Lipschitz, $U \subset \mathbb{R}^n$ ouvert. On note ϕ le flot associé à l'équation différentielle $X' = f(X)$. Soit $V : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction C^1, avec $\Omega \subset U$, Ω ouvert. On suppose qu'il existe un compact $K \subset \Omega$ tel que K est invariant par le flot en temps positif : $\phi_t(K) \subset K$, pour tout $t \geq 0$. Soit E l'ensemble des points x de K tel que $\nabla V(x).f(x) = 0$. Soit M le plus grand ensemble invariant en temps positif inclus dans E. Montrer que toute solution commençant dans K approche M.

Exercise 7 : On considère le sytème de la forme

$$\begin{aligned} x' &= y - x^7 \left(x^4 + 2y^2 - 10\right) \\ y' &= -x^3 - 3y^5 \left(x^4 + 2y^2 - 10\right). \end{aligned}$$

1. Montrer que $V(x, y) = \left(x^4 + 2y^2 - 10\right)^2$ définie sur $\mathbb{R}^2$ vérifie les hypothèses du principe d'invariance de LaSalle.
2. En déduire que toute solution du système tend asymptotiquement vers $(0, 0)$ ou $\{(x, y) \ : \ x^4 + 2y^2 = 10\}$.
3. Soit maintenant $c > 0$ et $d > 10$. Montrer que $K = \{(x, y) \ : \ c \leq x^4 + 2y^2 \leq d\}$ est un compact invariant par le flot en temps positif. On pourra considérer une orbite $t \to \phi_t(x)$ démarrant dans K et intersectant le bord de K et étudier le comportement de $V(\phi_t(x))$, lorsque $\phi_t(x) \in \partial K$.
4. Déduire de l'exercise précédent que toute solution différente de $(0, 0)$ tends vers l'ensemble $\{(x, y) \ : x^4 + 2y^2 = 10\}$.

Exercise 8 : Etudier la stabilité de $(0, 0)$ par linéarisation pour les systèmes suivant

Système 1 :

$$\begin{aligned} x' &= -x + y + 2\sin z, \\ y' &= -2z + y^3, \\ z' &= \sin y - \tan z. \end{aligned}$$

Système 2 :

$$\begin{aligned} x' &= -x^3 + xy^2 \\ y' &= -y^3. \end{aligned}$$

Système 3 :

$$\begin{aligned} x' &= -2y + yz - x^3 \\ y' &= x - xz - y^3 \\ z' &= xy - z^3 \end{aligned}$$