4M028 – Equations d'évolution, stabilité, contrôle

TD2

M1 2018–2019

Exercise 1 :

1. Soit $y_0 \in \mathbb{R}$. Justifier l'existence d'une solution maximale sur un intervalle de la forme $]a, b[$ au problème de Cauchy
$$(PC): \quad y'(t) = -y(t) + \frac{y^4(t)}{1+t^2}, \quad y(0) = y_0.$$

2. Montrer que pour tout $t \in]a, b[$:
$$y(t) = e^{-t}y_0 + \int_0^t e^{s-t}\frac{y^4(s)}{1+s^2}ds.$$

3. Soit T tel que $0 < T < b$. Supposons que pour tout $t \in [0, T[$, on ait $|y(t)| \leq 1$. A l'aide du lemme de Gronwall, montrer que
$$\forall t \in [0, T[, \quad |y(t)| \leq |y_0|.$$

4. Supposons $|y_0| < 1$. Montrer que $|y(t)| \leq 1$ pour tout $t \in [0, b[$, puis que $b = +\infty$.

Exercise 2 : Soit $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1, strictement positive et croissante.

1. Montrer l'existence et l'unicité d'une solution maximale définie sur $\mathbb{R}$ pour le problème de Cauchy
$$(PC)\ y''(t) + q(t)y(t) = 0, \quad y(0) = y_0, \quad y'(0) = y_0'.$$

2. Soit $V(t) = y(t)^2 + \frac{y'(t)^2}{q(t)}$. Calculer V' et en déduire que toute les solutions de (PC) sont bornées sur $[0, +\infty[$.

Exercise 3 : Résoudre le système différentiel
$$\begin{aligned} x'' &= 2x - 3y \\ y'' &= x - 2y. \end{aligned}$$

Exercise 4 : On pose
$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Résoudre le système différentiel $X' = AX$. En déduire e^A.

Exercise 5 : Soit $A :]0, +\infty[\to M_n(\mathbb{R})$ continue. On considére le système différentiel $X'(t) = A(t)X(t)$ et on note $R(t, t_0)$ la résolvante du système.

1. Montrer que $t_0 \to R(t, t_0)$ est C^1 par rapport à t_0. Calculer $\frac{\partial R}{\partial t_0}$ en fonction de R et A.
2. Montrer que la résolvante du système $Y'(t) = -{}^tA(t)Y(t)$ est $S(t, t_0) = {}^tR(t_0, t)$.
3. On pose
$$A = \begin{pmatrix} 2t + \frac{1}{t} & 0 & \frac{1}{t} - t \\ t - \frac{1}{t} & 3t & t - \frac{1}{t} \\ \frac{2}{t} - 2t & 0 & \frac{2}{t} + t \end{pmatrix}$$
Montrer que $A(t)$ possède une base de vecteurs propres indépendantes de t. En déduire la résolvante $R(t, t_0)$.

Exercise 6 : On suppose que l'équation différentielle

$$X'(t) = AX(t) + B(t),$$

avec $A \in M_n(\mathbb{R})$ et $B : t \in [0, +\infty[\to M_n(\mathbb{R})$ continue, admet une solution X définie globalement et vérifiant
$$\int_0^{+\infty} \left(||X(t)||^2 + ||B(t)||^2 \right) ds.$$

1. Calculer $\frac{d}{dt}||X(t)||^2$.
2. Montrer que $||X(t)||^2$ est de Cauchy lorsque $t \to +\infty$.
3. En déduire que X tend vers 0 lorsque $t \to +\infty$.

Exercise 7 : Soient $A \in M_n(\mathbb{R})$ et $B : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ une fonction continue et périodique de période égale à 1. On considère l'équation différentielle

$$(E) \quad X'(t) = AX(t) + B(t).$$

1. Montrer qu'une solution de (E) est 1-périodique ssi $X(0) = X(1)$.
2. On suppose que les valeurs propres de A sont disjointes de $2ik\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Montrer que $e^{\pm A} - I$ est inversible et en déduire qu'il existe une et seule solution 1-périodique. On pourra utiliser la formule de variation des constantes.

Exercise 8 : Soit $A : [0, +\infty[\to M_n(\mathbb{R})$ continue et T-périodique, $T < 0$. On considère l'équation différentielle
$$(E) \quad X'(t) = A(t)X(t).$$

Soit $M(t)$ la résolvante du système, i.e. la solution de

$$M'(t) = A(t)M(t), \quad M(0) = I_n.$$

1. Montrer que $M(t + T) = M(t)M(T)$.
2. En déduire que $0_{\mathbb{R}^n}$ est asymptotiquement stable, ssi les valeurs propres complexes de $M(T)$ sont de modules strictement plus petit que 1. ($M(T)$ est appelée *matrice de monodromie* du système.)