4M028 – Equations d'évolution, stabilité, contrôle
TD1

M1 2018–2019

Exercise 1 : Soit I un intervalle non-vide de $\mathbb{R}$ and U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$. Soit $f : I \times U \to \mathbb{R}^n$. On suppose que f vérifie les hypothèses de régularité suivantes

(H1) $\forall x \in U$,

$$\begin{array}{rcl} f(\,.\,, x) : I & \to & \mathbb{R}^n \\ t & \to & f(t, x) \end{array}$$

est mesurable.

(H2) $\forall t \in I$,

$$\begin{array}{rcl} f(t,\,.\,) : U & \to & \mathbb{R}^n \\ x & \to & f(t, x) \end{array}$$

est continue.

Soit $J \subset I$ un sous-intervalle non-vide de I et $\xi : J \to U$.

1. On suppose que ξ est constante par morceaux sur une partition I_1, I_2, ..., I_k de I. Montrer que $s \in J \to f(s, \xi(s))$ est mesurable.
2. On suppose que ξ est continue et $I = [a, b]$. Construire une suite de fonctions ξ_n constantes par morceaux sur I qui converge ponctuellement vers ξ. En déduire que la fonction $s \in J \to f(s, \xi(s))$ est mesurable.
3. Même question avec ξ continue et I un intervalle quelconque.

Exercise 2 : Uniformité du temps de vie des solutions

1. Soit $f : I \times U \to \mathbb{R}^n$ vérifiant les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz du cours. Montrer que pour toutes conditions initiales $(t_0, x_0) \in I \times U$, il existe un voisinage V de (t_0, x_0) dans $I \times U$ et un $\delta > 0$ tels que pour toutes conditions initiales $(t_1, x_1) \in V$, la solution maximale de conditions initiales (t_1, x_1) est définie sur $]t_1 - \delta, t_1 + \delta[\cap I$.
2. Soit K un compact de $I \times U$. En déduire qu'il existe $\delta > 0$ tel que pour toutes conditions initiales $(t_0, x_0) \in K$, la solution maximale de conditions initiales (t_0, x_0) est définie sur $]t_0 - \delta, t_0 + \delta[\cap I$.

Exercise 3 : Soit $f : I \times U \to \mathbb{R}^n$ vérifiant les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz du cours. Soit $x :]t_-, t_+[\subset I \to \mathbb{R}^n$, une solution maximale à droite de l'équation différentielle $x' = f(t, x)$. Montrer que

1. $I = \mathbb{R}$, $U = \mathbb{R}^n$, $t_+ < \infty \implies ||x(t)|| \to +\infty$ lorsque $t \to t_+$.
2. $I = \mathbb{R}$, $U = \mathbb{R}$, $t_+ < \infty \implies x(t) \to +\infty$ ou $x(t) \to -\infty$ lorsque $t \to t_+$.

3. $I =]-\infty, 0[$, $U = B(0,1)$, $t_+ < 0 \implies ||x(t)|| \to 1$ lorsque $t \to t_+$.
4. $I = \mathbb{R}$, $U =]0,1[$, $t_+ < \infty \implies x(t) \to 0$ ou $x(t) \to 1$ lorsque $t \to t_+$.

Exercise 4 : Lemme de Gronwall Soit u, α, β des fonctions continues définies sur $I = [a, b]$ avec β à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. On suppose que, pour tout $t \in [a, b]$,

$$u(t) \leq \alpha(t) + \int_a^t \beta(s)u(s)ds.$$

1. Montrer que pour tout $t \in [a, b]$,

$$u(t) \leq \alpha(t) + \int_a^t \alpha(s)\beta(s) \int_s^t (\exp(\beta(s'))ds')\, ds.$$

2. Vérifier que le résultat ci-dessus reste vrai si on a seulement $u, \alpha \in L^1$ et $\beta \in L^\infty$, $\beta \geq 0$.

Exercise 5 :

1. On considère le système différentielle

$$\begin{aligned} x' &= x - y(x^2 + y^2) \\ y' &= y + x(x^2 + y^2). \end{aligned}$$

   Déterminer le temps de vie des solutions.
2. Même question pour le système

$$\begin{aligned} x' &= \sin y \\ y' &= x^3. \end{aligned}$$

3. Déterminer le temps de vie des solutions de conditions initiales (t_0, x_0) avec $x_0 \in]-1, 1[$ de l'équation

$$x'(t) = \left(x^2(t) - 1\right) \sinh t + t^5 \sin(\pi x(t)).$$

Exercise 6 : On considère l'équation différentielle

$$X'(t) = A(t)X(t) + B(t),$$

où $X : t \in I \to X(t) \in \mathbb{R}^n$ et $A, B, I \to M_n(\mathbb{R})$, avec I un intervalle de $\mathbb{R}$.

1. Sous quelles hypothèses de régularités sur A et B peut-on appliquer le théorème de Cauchy-Lipshitz du cours ?
2. Sous ces hypothèses, montrer que toutes les solutions de cette équations différentielles sont globales.

Exercise 7 : solutions maximales

Dans le cours, nous avons construit une solution maximale en utilisant en particulier l'unicité des solutions locales. Dans ce cadre, une définition raisonable de solutions maximales est "une solution qui prolonge toute autre solution locale". Implicitement, avec une telle définition l'existence implique l'unicité d'une solution maximale. Il vaut mieux prendre comme définition d'une solution maximale, une solution qui n'admet que elle même comme prolongement, ce qui s'écrit

Définition 1. *Une solution* (ξ, J) *est une solution maximale de (PC) si pour toute solution* (ξ', J') *telle que* $J \subset J'$ *et* $\xi'_{|J} = \xi$, *on ait* $J = J'$.

Alternativement, on définit une relation d'ordre sur l'ensemble des solutions : (ξ', J') prolonge (ξ, J) si et seulement si $J \subset J'$ et $\xi'_{|J} = \xi$. Une solution est alors maximale si elle est un élément maximal associé à la relation d'ordre définie ci-dessus.

Le but de l'exercice est de construire des solutions maximales dans un cadre où l'on n'a pas nécessairement l'unicité des solutions. On va prendre ici f continue mais non nécessairement Lipschitz. L'existence de solutions pour f continue est un résultat classique utilisant le schéma d'Euler et le théorème d'Arzela-Ascoli.

Soient donc $f : J \times U \to \mathbb{R}^n$ continue et $x_0 : [a, b_0[\to U$, une solution de $x'(t) = f(t, x(t))$.

1. Construire une suite de solutions $x_k : [a, b_k[\to U$ avec $b_{k+1} \geq b_k$ où x_{k+1} prolonge x_k et avec $b_{k+1} \geq \sup(b_k, B_k - 1/(k+1))$ si $B_k < \infty$ et $b_{k+1} \geq \sup(b_k, k)$ si $B_k = +\infty$, avec
$$B_k := \sup \{\beta \, : \, x_k \text{ se prolonge en une solution définie sur } [a, \beta[\} \, .$$
2. En déduire que toute solution se prolonge en une solution maximale.

Exercise 8 : Fonctions absolument continues, d'après Rudin

On rappelle la définition suivante.

Définition 2. *Une fonction* $\xi : I \to \mathbb{R}$ *est dîte* absolument continue *sur un intervalle* I *(f AC sur* I*) si pour tout* $\epsilon > 0$, *il existe* $\delta > 0$ *telle que pour toute suite de sous-intervalles disjoints de* I, $((a_n, b_n))_{0 \leq n \leq k}$, *on ait*

$$\sum_{n=0}^{k} |b_n - a_n| \leq \delta \implies \sum_{n=0}^{k} |\xi(b_n) - \xi(a_n)| \leq \epsilon.$$

Pour cet exercice, on aura besoin des notions suivantes en théorie de la mesure. On note m la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. On dénote par F_σ l'ensemble des réunions dénombrables d'ensembles fermés de $\mathbb{R}$.

— Si E est mesurable, alors $m(E) = \inf\{m(V) \, , V \text{ ouvert}, \; E \subset V\}$.

— Si E est mesurable, alors $E = E_1 \cup E_0$ avec $m(E_0) = 0$ et $E_1 \in F_\sigma$.

On aura aussi besoin de la conséquence suivante du théorème de Radon-Nikodym. Si μ est une mesure bornée sur I et absolument continue par rapport à m, alors il existe une fonction $h \in L^1(I)$ telle que
$$\mu(A) = \int_A h dm,$$
pour tout $A \subset I$ mesurable. Pour une preuve, voir par ex Rudin, Real and complex analysis, Chap 6.

Finalement, on rappelle que si $h \in L^1[a, b]$, alors $f : x \to \int_a^x h(s)ds$ est dérivable p.p avec $f' = h$.

Partie I. Soit f une fonction continue et croissante sur un intervalle $I = [a, b]$.

On va montrer que les énoncés suivants sont équivalents

AC f est AC sur I.

MN L'image par f d'un ensemble de mesure nulle est un ensemble de mesure nulle.

Dpp f est dérivable presque partout sur I, f' est intégrable et

$$\forall x \in I, \; f(x) = f(a) + \int_a^x f'(s)ds. \tag{1}$$

1. Soit M l'ensemble des parties mesurables pour la mesure de Lebesgue m de $\mathbb{R}$. On suppose que f est AC sur I et on considère $E \subset I$ tel que $E \in M$ et $m(E) = 0$.
   (a) Montrer que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $W \in M$ ouvert tel $E \subset W$ et $m(W) < \delta$.
   (b) En déduire que $f(E) \in M$ et que $m(f(E)) = 0$.
2. Soit $g : x \to x + f(x)$. On suppose que f vérifie MN.
   (a) Montrer que pour tout intervalle $J \subset I$, $m(g(J)) = |J| + m(f(J))$.
   (b) En déduire que g vérifie MN.
   (c) Montrer aussi que g est injective.
   (d) Soit $E \subset I$ mesurable. Montrer que $g(E)$ est mesurable.
   (e) Soit $E \subset I$ mesurable. On définit μ sur M comme $\mu(E) = m(g(E))$. Montrer que g est une mesure positive et bornée sur M qui est absolument continue par rapport à m.
   (f) En déduire qu'il existe $h \in L^1$ telle que $\mu = hdm$.
   (g) En déduire que si $a \leq x \leq b$ alors

   $$f(x) - f(a) = \int_a^x [h(t) - 1]\, dt,$$

   puis que $f'(x) = h(x) - 1$ p.p.
3. Montrer que Dpp $\implies$ AC. (On pourra utiliser que pour λ une mesure complexe absolument continue par rapport à m, $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, tel que $\forall E \in M$, $m(E) \leq \delta \implies |\lambda(E)| < \epsilon$.)

Partie II. On suppose maintenant que f est AC sur $I = [a, b]$ (mais non nécessairement monotone). On définit, pour tout $a \leq x \leq b$,

$$F(x) = \sup \sum_{i=1}^{N} |f(t_i) - f(t_{i-1})|$$

appelée *variation totale de* f, où le supremum est pris sur N et l'ensemble des suites de la forme

$$a = t_0 < t_1 .. < t_N = x.$$

1. Montrer que les fonctions F, $F + f$, $F - f$ sont non-décroissantes et AC sur I.
2. En déduire que f est dérivable pp, $f' \in L^1$ et vérifie (1).