4M028 – Equations d'évolution, stabilité, contrôle

Corrigé de l'examen du 4 mars

M1 2018–2019

Exercise 1 : On considère un système différentielle de la forme

$$(E) \quad X'(t) = A(t)X(t),$$

où $A : \mathbb{R} \to M_n(\mathbb{R})$ est une fonction continue.

1. Rappeler la définition de la résolvante $R(t, t_0)$ associée à (E).
2. On suppose $n = 2$ et que $A(t)$ est indépendente de t et est donnée par
$$A(t) := A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
Calculer explicitement la résolvante du système.
3. Résoudre le problème aux données initiales
$$X'(t) = AX(t) + B(t),$$
avec $B(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
4. On suppose maintenant que $A(t) = f(t)A$, où $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que
$$R(t, t_0) = e^{F(t,t_0)A}$$
avec $F(t, t_0) = \int_{t_0}^t f(s)ds$.

Correction :

1. La résolvante $R(t, t_0)$ est la solution du problème

$$\frac{\partial}{\partial t} R(t, t_0) = A(t)R(t, t_0),$$

avec comme conditions initiales $R(t_0, t_0) = Id_n$.

2. Pour un système linéaire à coefficients constants, la résolvante est donnée par $e^{(t-t_0)A}$. Pour calculer l'exponentielle de A, on peut diagonaliser A.

On trouve

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que

$$
\begin{aligned}
e^{(t-t_0)} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{t-t_0} & 0 \\ 0 & e^{-(t-t_0)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cosh(t-t_0) & \sinh(t-t_0) \\ \sinh(t-t_0) & \cosh(t-t0) \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

avec $\cosh(t-t_0) = \frac{1}{2}\left(e^{t-t_0} + e^{t_0-t}\right)$ et $\sinh(t-t_0) = \frac{1}{2}\left(e^{t-t_0} - e^{t_0-t}\right)$.

3. D'après la formule de la variation des constantes, on a

$$X(t) = R(t,t_0)X(t_0) + \int_{t_0}^{t} R(t,s)B(s)ds.$$

Il suffit donc de calculer le second terme. On trouve

$$X(t) = \begin{pmatrix} \cosh(t-t_0) & \sinh(t-t_0) \\ \sinh(t-t_0) & \cosh(t-t0) \end{pmatrix} X_0 + \begin{pmatrix} e^{2t-t_0} - e^{t_0} \\ e^{2t-t_0} - 2e^{t} + e^{t_0} \end{pmatrix}.$$

4.

Rappel : en général, pour un système de la forme $X'(t) = A(t)X$, il est faux que $R(t,t_0) = e^{\int_{t_0}^{t} A(s)ds}$. En revanche, si $A(t)A(s) = A(s)A(t)$ quelquesoient t,s dans le domaine de définition de A, alors en effet $R(t,t_0) = e^{\int_{t_0}^{t} A(s)ds}$. Ici, $A(t) = f(t)A$, donc on a bien la propriété de commutation. Le résultat demandé suit alors facilement.

Exercise 2 :

1. Enoncer le théorème de Lyapunov.
2. On considère le système

$$
\begin{aligned}
x' &= -x^5 - y \\
y' &= 2x - y.
\end{aligned}
$$

   Montrer que $V(x,y) = 2x^2 + y^2$ est une fonction de Lyapunov en $(0,0)$ et en déduire les propriétés de stabilité de $(0,0)$.

1. On considère un système différentielle de la forme $X' = f(X)$ avec $f : U \to \mathbb{R}^n$, U ouvert dans $\mathbb{R}^n$ et f Lipschitz. Soit $X_0 \in U$ tel que $f(X_0) = 0$.

On suppose qu'il existe une fonction de Lyapunov en un point X_0, i.e. une fonction V continue définie sur un voisinage de X_0 et vérifiant

1. V admet un minimum stricte en X_0.
2. V décroit le long des portions d'orbites distinctes de X_0 et contenues dans son ensemble de définition.

Alors X_0 est un point d'équilibre stable. Si de plus, V décroit strictement le long des portions d'orbites distinctes de X_0 et contenues dans son ensemble de définition, alors X_0 est asymptotiquement stable.

2. Il suffit d'appliquer le théorème précédent à la fonction V donnée dans l'énoncé. V est C^1 car polynomiale, $(0,0)$ est mininum stricte et, en écrivant le système sous la forme

$$X' = f(X)$$

on a

$$\nabla V.f(x,y) = -4x^6 - 2y^2,$$

ce qui prouve que V décroit strictement le long des orbites distinctes de $(0,0)$. On en déduit que $(0,0)$ est asymptotiquement stable.