# HOMOGÉNÉISATION ET CONTRÔLABILITÉ DE STRUCTURES MINCES HAUTES

Nassira Benabbas

**Résumé**

Nous étudions la contrôlabilité exacte interne d'une structure tridimensionnelle périodique dans le sens de l'axe $Ox_3$, de période de taille $\varepsilon$ et formée par des barres d'épaisseur $\varepsilon\delta$. Dans un premier temps, on établit par la méthode HUM de J. L. Lions, l'existence d'un contrôle exact. Ensuite on fait tendre vers zéro l'un apreès l'autre les deux petits paramètres $\varepsilon$ et $\delta$. Le premier passage à la limite $\varepsilon \to 0$, est un processus d'homogénéisation. On montre que la suite des contrôles converge vers une fonction qui est le contrôle exact du système homogénéisé qui est unidimensionnel. On fait ensuite $\delta \to 0$. On a encore stabilité par rapport à ce passage à la limite. Le contrôle converge vers un contrôle exact du système limite.

**Abstract**

We study the exact internal controllability for a three-dimensional truss-like beam. It is a structure periodically perforated in only one direction, by holes of size $\varepsilon$ and made by bars of thickness $\varepsilon\delta$. In a first step, we construct by using the HUM method introduced by J. L. Lions, an exact internal control. Then, we study the asymptotic behavior of the system and of the control when passing to the limit as $\varepsilon \to 0$ first, and $\delta \to 0$ afterwards. The first passage to the limit is a classical homogenization process. We show that the control converges to an exact internal control for the homogenized system. The same kind of stability occurs when passing to the limit as $\delta \to 0$, the exact control of the homogenized system converges to an exact control for the limit system obtained by making $\delta \to 0$ in the homogenized problem.

## Introduction

La contrôlabilité exacte interne de l'équation des ondes dans un domaine borné $\Omega$, a été abordé dans J. L. Lions [], où le problème a été traité par la méthode HUM (Hilbert Uniqueness Method). Dans [], D. Cioranescu et P. Donato ont étudié le même problème mais dans un domaine perforé périodiquement par des trous, avec une condition aux limites homogène de Neumann sur le bord des trous. Les résultats de [] montrent en particulier, que lorsqu'on fait tendre $\varepsilon$ vers zéro, le contrôle exact converge vers le contrôle exact du système hogénéisé. Un probl eme du même type a été étudié par J. Saint Jean Paulin, et L. R. Tcheugoué Tébou [] pour des conditions Fourier aux bord des trous, voir aussi L. R. Tcheugoué Tébou [] pour des problèmes de stabilisation.

Le but de notre travil est d'étudier, dans le même esprit, l'équation des ondes posée sur une structure réticulée d'un type particulier: c'est une barre longue, de section carrée $\varepsilon^2$, et perforée périodiquement de période $\varepsilon$, par des trous constitués par des barres fines d'épaisseur $\varepsilon\delta$. La périodicité n'a lieu que dans le sens de la longueur de la barre. Nous étudions le comportement asymptotique de ce syst'eme lorsque $\varepsilon \to 0$ et $\delta \to 0$. Le premier passage à la limite combine deux aspects: l'homogénéisation dans des milieux perforés et le fait que l'on travaille dans un domaine mince. Pour le premier, nous utiliserons les méthodes d'homogénéisation standard de [], [], voir aussi[]. Pour le deuxième, on fait appel à des techniques de domaines minces, voir [], []. Elles consiste à se placer sur un domaine fixe, en dilatant dans les deux directions dans lesquelles la structure est mince, ainsi le paramètre $\varepsilon$ apparaîtra explicitement dans l'équation transformée.

Le deuxième passa à la limite, $\delta \to 0$, sera reéalisé par la technique des structures réticulées de D. Cioranescu et J. Saint Jean Paulin [].

Le plan de la présentation est le suivant. Dans le paragraphe 1, nous démontrons un résultat d'existence et d'unicité de la solution du système donné. Par la méthode HUM, dans le paragraphe 2, nous construisons un contrôle exact interne pour ce notre problème. Dans le paragraphe 3, nous étudions le comportement asymptotique de la solution lorsque $\varepsilon \to 0$, avec $\delta$ fixé. On obtient un problème homogénéisé qui est unidimensionnel. Le comportement du contrôle exact est abordé dans les paragraphe 4 et 5. Nous montrons que sa limite est un contrôle exact pour le système homogénéisé. Enfin, dans le paragraphe 6, nous faisons tendre vers $\delta$ vers zéro et montrons que la propriété de contrôlabilité exacte est préservée par ce passage à la limite.

## 1. Position du problème

On se donne le domaine perforé décrit par la Figure 1. Il est contenu dans l'ouvert

$$\omega_\varepsilon = ]0,\varepsilon[ \times ]0,\varepsilon[ \times ]0,L[$$

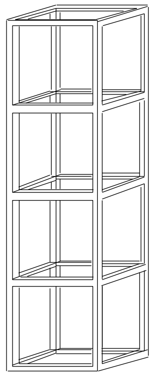

Figure 1. Structure haute mince

Soit $Y = (]0,1[)^3$. Le matérau est concentré le long des arêtes de ce cube unité, ces barres minces sont suposées être d'épaisseur $\delta$. On désigne par $Y_\delta^*$ la partie occupée par le matériau. L'ouvert $\omega_\varepsilon$ est couvert périodiquement par des cubes $\varepsilon Y$ et on note alors par $\omega_{\varepsilon\delta}^*$ la partie de $\omega_\varepsilon$ occupée par le matériau (i.e., l'ensemble des barres minces d'épaisseur $\varepsilon\delta$, voir Figure 1).

On considère le système suivant :

$$(1.1)\qquad \begin{cases} y''_{\varepsilon\delta} - \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\dfrac{\partial y_{\varepsilon\delta}}{\partial x_j}\right) = 0 \qquad \text{dans } \omega_{\varepsilon\delta}^* \times ]0,T[\,, \\ y_{\varepsilon\delta} = 0 \qquad \text{sur } \omega_{\varepsilon\delta}^{*,0} \times ]0,T[\,, \\ \dfrac{\partial}{\partial x_i}\Big(a_{ij}\dfrac{\partial y_{\varepsilon\delta}}{\partial x_j}\Big)\nu_i = 0 \qquad \text{sur } \gamma_{\varepsilon\delta}^* \times ]0,T[\,, \\ y_{\varepsilon\delta}(0) = y^0_{\varepsilon\delta} \qquad \text{dans } \omega_{\varepsilon\delta}^*, \\ y'_{\varepsilon\delta}(0) = y^1_{\varepsilon\delta} \qquad \text{dans } \omega_{\varepsilon\delta}^*. \end{cases}$$

où $\omega_{\varepsilon\delta}^{*,0}$ est la partie de $\omega_{\varepsilon\delta}^*$ qui touche le sol, c'est-à-dire pour $x_3 = 0$ et $\gamma_{\varepsilon\delta}^* = \partial\omega_{\varepsilon\delta}^* - \omega_{\varepsilon\delta}^{*,0}$. $T$ désigne un nombre réel quelconque strictement positif et $\nu = (\nu_i)$, $i = 1,2,3$ est la normale exterieure à $\gamma_{\varepsilon\delta}^*$, $\varepsilon$ est la taille de la période, $\delta$ est l'épaisseur des barres. Ces deux petits paramètres sont destinés à tendre vers zéro séparément.

**Notation.** *Dans tout le travail, nous utilisons de façon systématique la convention de sommation sur les indices répétés. Les indices $\alpha, \beta$ varient dans l'ensemble $\{1,2\}$.*

On suppose que les coefficients $a_{ij}, 1 \leq i, j \leq 3$ sont constants et qu'ils vérifient

$$(1.2) \qquad \begin{cases} a_{ij} = a_{ji} \\ \exists m > 0 \quad \text{tel que } a_{ij}\xi_i\xi_j \geq m\xi_i\xi_i, \quad \forall \xi = (\xi_i) \in \mathbb{R}^3 \end{cases}$$

Maintenant, nous allons nous ramener à un domaine fixe en dilatant $\omega^*_{\varepsilon\delta}$ dans le sens de $x_1, x_2$ et ceci grâce au changement de variables suivant :

$$(x_1, x_2, x_3) \longrightarrow (z_1 = \frac{x_1}{\varepsilon}, z_2 = \frac{x_2}{\varepsilon}, z_3 = x_3)$$

Alors le systéme (1.1) devient

$$(1.3) \qquad \begin{cases} u''_{\varepsilon\delta} + A_{\varepsilon\delta}u_{\varepsilon\delta} = 0 \qquad \text{dans } \Omega^*_{\varepsilon\delta} \times ]0, T[\,, \\ u_{\varepsilon\delta} = 0 \qquad \text{sur } \Omega^{*,0}_{\varepsilon\delta} \times ]0, T[\,, \\ \dfrac{\partial u_{\varepsilon\delta}}{\partial v_{A_{\varepsilon\delta}}} = 0 \qquad \text{sur } \Gamma_{\varepsilon\delta} \times ]0, T[\,, \\ u_{\varepsilon\delta}\,(0) = u^0_{\varepsilon\delta} \qquad \text{dans } \Omega^*_{\varepsilon\delta}, \\ u'_{\varepsilon\delta}\,(0) = u^1_{\varepsilon\delta} \qquad \text{dans } \Omega^*_{\varepsilon\delta}. \end{cases}$$

où $\Omega^*_{\varepsilon\delta}$, $\Omega^{*,0}_{\varepsilon\delta}$, $\Gamma_{\varepsilon\delta}$ sont respectivement les transformés de $\omega^*_{\varepsilon\delta}, \omega^{*,0}_{\varepsilon\delta}, \gamma^*_{\varepsilon\partial}$ par ce changement de variables, et

$$u_{\varepsilon\delta}(z_1, z_2, z_3) = y_{\varepsilon\delta}(x_1, x_2, x_3)$$

$$A_{\varepsilon\delta} = -\left[\varepsilon^{-2}a_{\alpha\beta}\frac{\partial^2}{\partial z_\alpha \partial z_\beta} + \varepsilon^{-1}a_{\alpha 3}\frac{\partial^2}{\partial z_\alpha \partial z_3} + \varepsilon^{-1}a_{3\alpha}\frac{\partial^2}{\partial z_3 \partial z_\alpha} + a_{33}\frac{\partial^2}{\partial z_3^2}\right]$$

$$\frac{\partial}{\partial \nu_{A\varepsilon\delta}} = \left(\varepsilon^{-1}a_{i\alpha}\frac{\partial}{\partial z_\alpha} + a_{i\alpha}\frac{\partial}{\partial z_3}\right) n_i$$

On introduit l'espace

$$(1.4) \qquad V_{\varepsilon\delta} = \left\{u \in H^1\left(\Omega^*_{\varepsilon\delta}\right); u = 0 \text{ sur } \Omega^{*,0}_{\varepsilon\delta}\right\}.$$

muni de norme (et le produit scalaire correspondant)

$$(1.5) \qquad \left\|u_{\varepsilon\delta}\right\|^2_{\varepsilon\delta} = \int_{\Omega^\alpha_{\varepsilon\delta}} \left[\varepsilon^{-2}a_{\alpha\beta}\frac{\partial u_{\varepsilon\delta}}{\partial z_\alpha}\frac{\partial u_{\varepsilon u}}{\partial z_\beta} + 2\varepsilon^{-1}a_{\alpha 3}\frac{\partial u_{\varepsilon\delta}}{\partial z_3}\frac{\partial u_{\varepsilon\delta}}{\partial z_\alpha} + a_{33}\left(\frac{\partial_{u\varepsilon\delta}}{\partial z_3}\right)^2\right] dz.$$

Nous rappelons maintenant un résultat classique en équations des ondes. Pour la démonstration, voir [], [].

**Théorème 1.1** *On se donne $u^0_{\varepsilon\delta} \in V_{\varepsilon\delta}$ et $u^1_{\varepsilon\delta} \in L^2\left(\Omega^*_{\varepsilon\delta}\right)$. Alors le systéme (1.3) posséde une et une seule solution $u_{\varepsilon\delta}$ telle que $u_{\varepsilon\delta} \in C([0,T];V_{\varepsilon\delta}) \cap C^1([0,T];L^2(\Omega^*_{\varepsilon\delta}))$.*

**Lemme 1.2.** *Soit $\varphi_{\varepsilon\delta}$ solution du système*

$$
\left\{
\begin{array}{ll}
\varphi''_{\varepsilon\delta} + A_{\varepsilon\delta}\varphi_{\varepsilon\delta} = 0 \text{ dans } \Omega^*_{\varepsilon\delta} \times ]0,T[ & \\
\varphi_{\varepsilon\delta} = 0 \qquad \Omega^{*,0}_{\varepsilon\delta} \times ]0,T[ & \\
\dfrac{\partial \varphi_{\varepsilon\delta}}{\partial \nu_{A_{\varepsilon\delta}}} = 0 \qquad \text{sur } \Gamma_{\varepsilon\delta} \times ]0,T[ & \\
\varphi_{\varepsilon\delta}\left(0\right) = \varphi^0_{\varepsilon\delta} \qquad \text{dans } \Omega^*_{\varepsilon\delta} & \\
\varphi'_{\varepsilon\delta}\left(0\right) = \varphi^1_{\varepsilon\delta} \qquad \text{dans } \Omega^*_{\varepsilon\delta} &
\end{array}
\right.
\tag{1.6}
$$

*Alors, si $(\varphi^0_{\varepsilon\delta}, \varphi^1_{\varepsilon\delta})$ appartient à $L^2(\Omega^*_{\varepsilon\delta}) \times V'_{\varepsilon\delta}$, $\varphi_{\varepsilon\delta}$ est telle que*

$$\varphi_{\varepsilon\delta} \in C\left([0,T]\,, L^2(\Omega^*_{\varepsilon\delta})\right) \cap C^1\left([0,T]\,, V'_{\varepsilon\delta}\right)$$

*et de plus, vérifie*

$$c_1\left[\left\|\varphi^0_{\varepsilon\delta}\right\|^2 + \left\|\varphi^1_{\varepsilon\delta}\right\|^2\right] \leq \left\|\varphi_{\varepsilon\delta}\right\|^2 \leq c_2\left[\left\|\varphi^0_{\varepsilon\delta}\right\|^2 + \left\|\varphi^1_{\varepsilon\delta}\right\|^2_{V'_{\varepsilon\delta}}\right]$$

*où $c_1$,$c_2$ sont deux constantes strictement positives indépendante de $\varepsilon$, et $V'_{\varepsilon\delta}$ est le dual de l'espace $V_{\varepsilon\delta}$ défini par (1.4).*

**Démonstration.** Dans [2], la démonstration est faite dans le cas d'un ouvert $\Omega$ borné de $\mathbb{R}^n$. Reste à montrer que les constantes $c_1$ et $c_2$ ne dépendent pas de $\varepsilon$. Pour cela, voir la preuve du Lemme 6.2. □

**Remarque 1.2.** La norme définie sur l'espace $V_{\varepsilon\delta}$ vérifie

$$\left\|u_{\varepsilon\delta}\right\|_{H^1\left(\Omega^*_{\varepsilon\delta}\right)} \leq c\left\|u_{\varepsilon\delta}\right\|_{\varepsilon\delta},$$

où $c$ est une constante positive indépendante de $\varepsilon$ et $\delta$. En effet, l'hypothèse (1.2) et la définition (1.5), donne

$$\left\|u_{\varepsilon\delta}\right\|^2_{\varepsilon\delta} \geq m\Big\{\left\|\varepsilon^{-1}\frac{\partial u_{\varepsilon\delta}}{\partial z_1}\right\|^2_{L^2(\Omega^*_{\varepsilon\delta})} + \left\|\varepsilon^{-1}\frac{\partial u_{\varepsilon\delta}}{\partial z_2}\right\|^2_{L^2(\Omega^*_{\varepsilon\delta})} + \left\|\frac{\partial u_{\varepsilon\delta}}{\partial z_3}\right\|^2_{L^2(\Omega^*_{\varepsilon\delta})}\Big\}.$$

D'autre part, comme $\varepsilon \longrightarrow 0$, on a

$$\|u_{\varepsilon\delta}\|_{\varepsilon\delta}^{2} \geq m \|\nabla u_{\varepsilon\delta}\|_{[(L^{2}(\Omega_{\varepsilon\delta}^{*})]^{3}}^{2},$$

Ensuite, comme $u_{\varepsilon\delta} = 0$ et sur $\Omega_{\varepsilon\delta}^{*;0}$, l'inégalité de Poincaré donne

$$\|u\|_{L^{2}(\Omega_{\varepsilon\delta}^{*})} \leq c \|\nabla u\|_{[L^{2}(\Omega_{\varepsilon\delta}^{*})]^{3}},$$

où $c$ est une constante indépendante de $\varepsilon$ et $\delta$ (pour la démonstration voir [1]). En en déduit l'estimation

$$\|u_{\varepsilon\delta}\|_{H^{1}(\Omega_{\varepsilon\delta}^{*})}^{2} = \|u_{\varepsilon\delta}\|_{L^{2}(\Omega_{\varepsilon\delta}^{*})}^{2} + \|\nabla u_{\varepsilon\delta}\|_{[L^{2}(\Omega_{\varepsilon\delta}^{*})]^{3}}^{2} \leq C \|\nabla u_{\varepsilon\delta}\|_{[L^{2}(\Omega_{\varepsilon\delta}^{*})]^{3}}^{2},$$

et par conséquent

$$\|u_{\varepsilon\delta}\|_{\varepsilon\delta} \geq \sqrt{m} \|\nabla u_{\varepsilon\delta}\|_{[L^{2}(\Omega_{\varepsilon\delta}^{*})]^{3}} \geq \sqrt{\frac{m}{c}} \|u_{\varepsilon\delta}\|_{H^{1}(\Omega_{\varepsilon\delta}^{*})}.$$

## 2. Étude de la contrôlabilité exacte

Cette étude est réalisée par la méthode HUM indtroduite par J. L .Lions dans []. On a le résultat suivant :

**Théorème 2.1.** *Soit* $\left(w_{\varepsilon\delta}^{0}, w_{\varepsilon\delta}^{1}\right) \in V_{\varepsilon\delta} \times L^{2}\left(\Omega_{\varepsilon\delta}^{*}\right)$. *Il existe alors un contrôle* $v_{\varepsilon\delta}$ *dans* $L^{2}\left(0, T; L^{2}\left(\Omega_{\varepsilon\delta}^{*}\right)\right)$ *tel que si* $w_{\varepsilon\delta}$ *est la solution du système*

$$(2.1) \qquad \begin{cases} w_{\varepsilon\delta}'' + A_{\varepsilon\delta} w_{\varepsilon\delta} = v_{\varepsilon\delta} \quad \text{dans } \Omega_{\varepsilon\delta}^{*} \times ]0, T[\,, \\ w_{\varepsilon\delta} = 0 \quad \text{dans } \Omega_{\varepsilon\delta}^{*;0} \times ]0, T[\,, \\ \dfrac{\partial w_{\varepsilon\delta}}{\partial v_{A_{\varepsilon\delta}}} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_{\varepsilon\delta} \times ]0, T[\,, \\ w_{\varepsilon\delta}(0) = w_{\varepsilon\delta}^{0} \quad \text{dans } \Omega_{\varepsilon\delta}^{*}, \\ w_{\varepsilon\delta}'(0) = w_{\varepsilon\delta}^{1} \quad \text{dans } \Omega_{\varepsilon\delta}^{*}, \end{cases}$$

*on a*

$$\forall T > 0, \quad w_{\varepsilon\delta}(T) = w_{\varepsilon\delta}'(T) = 0 \text{ dans } \Omega_{\varepsilon\delta}^{*}.$$

**Démonstration.** Nous allons à présent mettre en oeuvre la méthode HUM. Introduisons $\varphi_{\varepsilon\delta}$, solution du système homogène

$$\begin{cases} \varphi''_{\varepsilon\delta} + A_{\varepsilon\delta}\varphi_{\varepsilon\delta} = 0 & \text{dans } \Omega^*_{\varepsilon\delta} \times ]0,T[\,, \\ \varphi_{\varepsilon\delta} = 0 & sur \;\; \Omega^{*,0}_{\varepsilon\delta} \times ]0,T[\,, \\ \dfrac{\partial\varphi_{\varepsilon\delta}}{\partial v_{A_{\varepsilon\delta}}} = 0 & \text{sur } \Gamma_{\varepsilon\delta} \times ]0,T[\,, \\ \varphi_{\varepsilon\delta}(0) = \varphi^0_{\varepsilon\delta} & \text{dans } \Omega^*_{\varepsilon\delta}, \\ \varphi'_{\varepsilon\delta}(0) = \varphi^1_{\varepsilon\delta} & \text{dans } \Omega^*_{\varepsilon\delta}, \end{cases} \tag{2.2}$$

et $\psi_{\varepsilon\delta}$, solution du système rétrogrode

$$\begin{cases} \psi''_{\varepsilon\delta} + A_{\varepsilon\delta}\psi_{\varepsilon\delta} = -\varphi_{\delta} & \text{dans } \Omega^*_{\varepsilon\delta} \times ]0,T[\,, \\ \psi_{\varepsilon\delta} = 0 & sur \;\; \Omega^{*,0}_{\varepsilon\delta} \times ]0,T[\,, \\ \dfrac{\partial\psi_{\varepsilon\delta}}{\partial v_{A_{\varepsilon\delta}}} = 0 & \text{sur } \Gamma_{\varepsilon\delta} \times ]0,T[\,, \\ \psi_{\varepsilon\delta}(T) = 0 & \text{dans } \Omega^*_{\varepsilon\delta}, \\ \psi'_{\varepsilon\delta}(T) = 0 & \text{dans } \Omega^*_{\varepsilon\delta}. \end{cases} \tag{2.3}$$

Posons

$$F_{\varepsilon\delta} = L^2(\Omega^*_{\varepsilon\delta}) \times V'_{\varepsilon\delta}, \;\; F'_{\varepsilon\delta} = L^2(\Omega^*_{\varepsilon\delta}) \times V_{\varepsilon\delta}. \tag{2.4}$$

Définisons l'application

$$\begin{cases} \Lambda_{\varepsilon\delta} : F_{\varepsilon\delta} \longrightarrow F'_{\varepsilon\delta}, \\ \left(\varphi^0_{\varepsilon\delta}, \varphi^1_{\varepsilon\delta}\right) \longmapsto \Lambda_{\varepsilon\delta}\left(\varphi^0_{\varepsilon\delta}, \varphi^1_{\varepsilon\delta}\right) = \left(\psi'_{\varepsilon\delta}(0), -\psi_{\varepsilon\delta}(0)\right). \end{cases}$$

Multiplions $(2.3)_1$ par $\varphi_{\varepsilon\delta}$ solution de (2.2). On a

$$\int_{\Omega^*_{\varepsilon\delta}}\int_0^T \psi''_{\varepsilon\delta}\,\varphi_{\varepsilon\delta} dzdt + \int_{\Omega^*_{\varepsilon\delta}}\int_0^T A_{\varepsilon\delta}\psi_{\varepsilon\delta}\,\varphi_{\varepsilon\delta}\, dzdt = -\int_{\Omega^*_{\varepsilon\delta}}\int_0^T \varphi_{\varepsilon\delta}\,\varphi_{\varepsilon\delta}\, dzdt.$$

On intègre par parties par rapport à $z$, on trouve

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^*_{\varepsilon\delta}}\int_0^T \psi''_{\varepsilon\delta}\,\varphi_{\varepsilon\delta}\, dzdt + \int_{\Omega^*_{\varepsilon\delta}}\int_0^T \Big[\varepsilon^{-2} a_{\alpha\beta}\frac{\partial\psi_{\varepsilon\delta}}{\partial z_\beta}\frac{\partial\varphi_{\varepsilon\delta}}{\partial z_\alpha} + 2a_{\alpha 3}\frac{\partial\psi_{\varepsilon\delta}}{\partial z_3}\frac{\partial\varphi_{\varepsilon\delta}}{\partial z_\alpha} \\ + a_{33}\frac{\partial\psi_{\varepsilon\delta}}{\partial z_3}\frac{\partial\varphi_{\varepsilon\delta}}{\partial z_3}\Big]\, dzdt = -\int_{\Omega^*_{\varepsilon\delta}}\int_0^T \varphi^2_{\varepsilon\delta}\, dzdt. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Le terme sur le bord est nul grâce à $(2.2)_2$ et $(2.3)_3$ . On utilise maintenant une deuxième fois une intégration par parties par rapport à $z$. Comme l'intégrale sur $\partial\Omega^*_{\varepsilon\delta}$ est nulle grâce à $(2.3)_2$ et $(2.2)_3$, on a

$$(2.6) \qquad \int_{\Omega^*_{\varepsilon\delta}} \int_0^T \psi''_{\varepsilon\delta}\ \varphi_{\varepsilon\delta}\ dzdt + \int_{\Omega^*_{\varepsilon\delta}} \int_0^T \psi_{\varepsilon\delta}\ A_{\varepsilon\delta}\varphi_{\varepsilon\delta}\ dzdt = -\int_{\Omega^*_{\varepsilon\delta}} \int_0^T \varphi^2_{\varepsilon\delta}\ dzdt.$$

De (2.5) et (2.7), en utilisant $(2.2)_1$ , on obtient

$$\int_{\Omega^*_{\varepsilon\delta}} \int_0^T \psi''_{\varepsilon\delta}\ \varphi_{\varepsilon\delta}\ dzdt - \int_{\Omega^*_{\varepsilon\delta}} \int_0^T \psi_{\varepsilon\delta}\ \varphi''_{\varepsilon\delta}\ dzdt = -\int_{\Omega^*_{\varepsilon\delta}} \int_0^T \varphi^2_{\varepsilon\delta}\ dzdt,$$

soit

$$\int_{\Omega^*_{\varepsilon\delta}} \int_0^T \left[(\psi'_{\varepsilon\delta}\ \varphi_{\varepsilon\delta})' - (\psi_{\varepsilon\delta}\ \varphi'_{\varepsilon\delta})'\right] dzdt = -\int_{\Omega^*_{\varepsilon\delta}} \int_0^T \varphi^2_{\varepsilon\delta}\ dzdt.$$

Grâce à $(2.3)_4$ et $(2.3)_5$, par une intégration par parties par rapport à $t$, on a

$$\int_{\Omega^*_{\varepsilon\delta}} \left[ -\psi'_{\varepsilon\delta}(0)\ \varphi_{\varepsilon\delta}(0) + \psi_{\varepsilon\delta}(0)\ \varphi'_{\varepsilon\delta}(0)\right] dz = -\int_{\Omega^*_{\varepsilon\delta}} \int_0^T \varphi^2_{\varepsilon\delta}\ dzdt$$

Ensuite $(2.2)_4$ et $(2.2)_5$ donnent

$$\int_{\Omega^*_{\varepsilon\delta}} \big(\psi'_{\varepsilon\delta}(0), -\psi_{\varepsilon\delta}(0)\big)\ (\varphi^0_{\varepsilon\delta}, \varphi^1_{\varepsilon\delta})]\ dz = \int_{\Omega^*_{\varepsilon\delta}} \int_0^T \varphi^2_{\varepsilon\delta}\ dzdt,$$

donc

$$\big\langle \Lambda_{\varepsilon\delta}(\varphi^0_{\varepsilon\delta}, \varphi^1_{\varepsilon\delta}), (\varphi^0_{\varepsilon\delta}, \varphi^1_{\varepsilon\delta})\big\rangle = \int_{\Omega^*_{\varepsilon\delta}} \int_0^T \varphi^2_{\varepsilon\delta}\ dzdt.$$

On peut alors définir une norme sur $F_{\varepsilon\delta}$ par

$$\left\|(\varphi^0_{\varepsilon\delta}, \varphi^1_{\varepsilon\delta})\right\|^2_{F_{\varepsilon\delta}} = \int_{\Omega^*_{\varepsilon\delta}} \int_0^T \varphi^2_{\varepsilon\delta}\ dzdt = \|\varphi_{\varepsilon\delta}\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega^*_{\varepsilon\delta}))}.$$

En appliquant le Lemme 1.2, il vient

$$c_1\left[\left\|\varphi^0_{\varepsilon\delta}\right\|^2 + \left\|\varphi^1_{\varepsilon\delta}\right\|^2\right] \leq \|\varphi_{\varepsilon\delta}\|^2 \leq c_2\left[\left\|\varphi^0_{\varepsilon\delta}\right\|^2 + \left\|\varphi^1_{\varepsilon\delta}\right\|^2\right],$$

qui mène alors à l'inégalité suivante :

$$k_1 \left\|(\varphi^0_{\varepsilon\delta}, \varphi^1_{\varepsilon\delta})\right\|_{F_{\varepsilon\delta}} \leq \frac{\left\langle \Lambda_{\varepsilon\delta}(\varphi^0_{\varepsilon\delta}, \varphi^1_{\varepsilon\delta}), (\varphi^0_{\varepsilon\delta}, \varphi^1_{\varepsilon\delta}) \right\rangle}{\left\|(\varphi^0_{\varepsilon\delta}, \varphi^1_{\varepsilon\delta})\right\|_{F_{\varepsilon\delta}}} \leq k_2 \left\|(\varphi^0_{\varepsilon\delta}, \varphi^1_{\varepsilon\delta})\right\|_{F_{\varepsilon\delta}}.$$

Par conséquent, on a

$$k_1 \left\|(\varphi^0_{\varepsilon\delta}, \varphi^1_{\varepsilon\delta})\right\|_{F_{\varepsilon\delta}} \leq \left\|\Lambda_{\varepsilon\delta}(\varphi^0_{\varepsilon\delta}, \varphi^1_{\varepsilon\delta})\right\|_{F'_{\varepsilon\delta}} \leq k_2 \left\|(\varphi^0_{\varepsilon\delta}, \varphi^1_{\varepsilon\delta})\right\|_{F_{\varepsilon\delta}},$$

uniformément par rapport à $\varepsilon$ et $\delta$, d'où l'on déduit que $\Lambda_{\varepsilon\delta}$ est un isomorphisme de $F_{\varepsilon\delta}$ sur $F'_{\varepsilon\delta}$. Comme $\left(w^1_{\varepsilon\delta}, -w^0_{\varepsilon\delta}\right) \in F^{'}_{\varepsilon\delta}$, l'équation

$$\Lambda_{\varepsilon\delta}(\varphi^0_{\varepsilon\delta}, \varphi^1_{\varepsilon\delta}) = \left(w^1_{\varepsilon\delta}, -w^0_{\varepsilon\delta}\right) \tag{2.7}$$

possède une et une seule solution dans $F_{\varepsilon\delta}$. Compte tenu de la définition de $\Lambda_{\varepsilon\delta}$, on a

$$\begin{cases} \psi^{'}_{\varepsilon\delta}(0) = w^1_{\varepsilon\delta}, \\ \psi_{\varepsilon\delta}(0) = w^0_{\varepsilon\delta}. \end{cases}$$

Alors, si on a choisi $v_{\varepsilon\delta} = -\varphi_{\varepsilon\delta}$, on remarque que $\psi_{\varepsilon\delta}$ est solution de (2.1). Mais ce système n'admettant qu'une solution unique, à savoir $w_{\varepsilon\delta}$, on a $\psi_{\varepsilon\delta} = w_{\varepsilon\delta}$, ce qui achève la preuve du Théorème 2.1. □

## 3. Comportement asymptotique pour $\varepsilon \longrightarrow 0$. Homogénéisation

Dans la suite du travail, nous aurons besoin des deux lemmes suivants :

**Lemme 3.1.** **[1]** *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un opérateur de prolongement*

$$Q_\varepsilon \in \mathcal{L}(H^k(\Omega_\varepsilon), H^k(\Omega)), \ (k = 0, 1),$$

*vérifiant pour tout $u \in H^1(\Omega_\varepsilon)$*

(i). $Q_\varepsilon u = u$ *dans* $\Omega_\varepsilon$,

(ii). $\|Q_\varepsilon u\|_{L^2(\Omega)} \leq c \|u\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}$,

(iii). $\|\nabla Q_\varepsilon u\|_{[L^2(\Omega)]^N} \leq c \|\nabla u\|_{[L^2(\Omega_\varepsilon)]^N}$,

*où $c$ est une constante indépendante de $\varepsilon$.*

**Lemme 3.2** [4] . *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un opérateur de prolongement*

$$P_\varepsilon \in \mathcal{L}\left(L^\infty\left(0,T;H^k(\Omega_\varepsilon)\right), L^\infty 0,T;L^2(\Omega_\varepsilon)\right) \quad (k=0,1),$$

*vérifiant pour tout $u \in L^\infty\left(0,T;H^1(\Omega_\varepsilon)\right), u' \in L^\infty\left(0,T;L^2(\Omega_\varepsilon)\right)$,*

(i). $P_\varepsilon u = u$ *dans* $\Omega_\varepsilon \times ]0,T[$.

(ii). $P_\varepsilon(u') = (P_\varepsilon u)'$ *dans* $\Omega \times ]0,T[$.

(iii). $\|P_\varepsilon u\|_{L^\infty(0,T;\ L^2(\Omega))} \leq c\,\|u\|_{L^\infty(0,T\ ;L^2(\Omega_\varepsilon))}$.

(iv). $\|\nabla P_\varepsilon(u)\|_{L^\infty 0,T;(L^2(\Omega))^N} \leq c\,\|\nabla u\|_{L^\infty(0,T;(L^2(\Omega_\varepsilon))^N}$.

(v). $\|P_\varepsilon u'\|_{L^\infty(0,T;(L^2(\Omega)))} \leq c\,\|u'\|_{L^\infty(0,T;(L^2(\Omega_\varepsilon))}$,

*où $c$ est une constante positive indépendante de $\varepsilon$.*

On a alors le résultat suivant:

**Théorème 3.1.** *Soit $u_{\varepsilon\delta}$ la solution du système (1.3). On supose que les données initiales $u^0_{\varepsilon\delta}, u^1_{\varepsilon\delta}$ vérifient*

$$\text{(3.1)} \qquad \begin{cases} \left\|u^0_{\varepsilon\delta}\right\|_{\varepsilon\delta} \leq c\delta^2 & \text{et} \quad \widetilde{u}^0_{\varepsilon\delta} \rightharpoonup u^0_\delta \text{ faiblement dans } H^1_0(\Omega), \\ \left\|u^0_{\varepsilon\delta}\right\|_{L^2(\Omega^*_{\varepsilon\delta})} \leq c\delta^2 & \text{et} \quad \widetilde{u}^1_{\varepsilon\delta} \longrightarrow u^1_\delta \text{ faiblement dans } L^2(\Omega), \end{cases}$$

*où $\sim$ désigne le prolongement par zéro de toute fonction définie dans $\Omega^*_{\varepsilon\delta}$, et $c$ est une constante positive indépendante de $\varepsilon$ et $\delta$. Alors, pour $\varepsilon \longrightarrow 0$ avec $\delta$ fixe, on a*

$$\text{(3.2)} \qquad \begin{cases} P_{\varepsilon\delta} u_{\varepsilon\delta} \rightharpoonup u_\delta & \text{faible} * \text{ dans} \quad L^\infty(0,T;H^1_0(\Omega)), \\ P_{\varepsilon\delta} u'_{\varepsilon\delta} \rightharpoonup u'_\delta & \text{faible} * \text{ dans} \quad L^\infty(0,T;L^2(\Omega)), \end{cases}$$

*où $u_\delta$ est une fonction indépendante de $z_1$ et $z_2$, et est solution du système homogéneisé*

$$\text{(3.4)} \qquad \begin{cases} |Y^*_\delta|\,u''_\delta - \dfrac{\partial}{\partial z_3}\left(q_\delta \dfrac{\partial u_\delta}{\partial z_3}\right) = 0 & \text{dans } ]0,L[\times]0,T[, \\ u_\delta(0) = u_\delta(L) = 0 & \text{dans } ]0,T[, \\ u_\delta(0) = \dfrac{u^0_\delta}{|Y^*_\delta|} & \text{dans } ]0,L[, \\ u'_\delta(0) = \dfrac{\overline{u}^1_\delta}{|Y^*_\delta|} & \text{dans } ]0,L[, \end{cases}$$

*avec*

$$\text{(3.5)} \qquad |Y^*_\delta| = 8\delta^2(1-\delta),$$

et

$$\overline{u}_\delta^1 = \int_0^1 \int_0^1 u_\delta^1 \; dz_1 dz_2.$$

*Le coefficient homogéneisé est donné par*

$$q_\delta = \int_{Y_\delta^*} a_{3j} \frac{\partial}{\partial y_j} \left(-\chi^\delta + y_3\right) \; dy, \tag{3.6}$$

*où $\chi^\delta$est solution de*

$$\begin{cases} a_{ij} \dfrac{\partial^2 \left(-\chi^\delta + y_3\right)}{\partial y_i \partial y_j} = 0 \qquad \text{dans} \quad Y_\delta^*, \\ a_{ij} \dfrac{\partial \left(-\chi^\delta + y_3\right)}{\partial y_j} n_i = 0 \qquad \text{sur} \quad \partial_N Y_\delta^*, \\ \chi^\delta \text{ périodique en } y_3 \text{ et de moyenne nulle,} \end{cases} \tag{3.7}$$

*où*

$$\partial_N Y_\delta^* = \partial Y_\delta^* - \left\{ y \in Y_\delta^* : y_3 = 0 \text{ ou } y_3 = 1 \right\}.$$

**Démonstration.** On commence par évaluer l'énergie du système (1.3); pour cela on multiplie $(1.3)_1$ par $u'_{\varepsilon\delta}$ et on intègre, on a

$$\int_0^T \int_{\Omega_{\varepsilon\delta}^*} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(u'_{\varepsilon\delta}\right)^2 \; dzdt + \int_0^T \int_{\Omega_{\varepsilon\delta}^*} A_{\varepsilon\delta} u_{\varepsilon\delta} \; u'_{\varepsilon\delta} \; dzdt = 0.$$

On intègre par parties par rapport à $z$, pour avoir

$$\begin{aligned} \int_0^T \frac{1}{2} \int_{\Omega_{\varepsilon\delta}^*} \frac{d}{dt} \left(u'_{\varepsilon\delta}\right)^2 \; dzdt + \int_0^T \int_{\Omega_{\varepsilon\delta}^*} \Big[ \varepsilon^{-2} a_{\alpha\beta} \frac{\partial u_{\varepsilon\delta}}{\partial z_\beta} \frac{\partial u'_{\varepsilon\delta}}{\partial z_\alpha} \\ + \varepsilon^{-1} a_{\alpha 3} \frac{\partial u_{\varepsilon\delta}}{\partial z_3} \frac{\partial u'_{\varepsilon\delta}}{\partial z_\alpha} + \varepsilon^{-1} a_{3\alpha} \frac{\partial u_{\varepsilon\delta}}{\partial z_\alpha} \frac{\partial u'_{\varepsilon\delta}}{\partial z_3} + a_{33} \frac{\partial u_{\varepsilon\delta}}{\partial z_3} \frac{\partial u'_{\varepsilon\delta}}{\partial z_3} \Big] \; dzdt = 0, \end{aligned}$$

car le terme sur le bord est nul gâce a $(1.5)_2$ et $(1.5)_3$. On en déduit

$$\begin{aligned} \int_0^T \frac{1}{2} \int_{\Omega_{\varepsilon\delta}^*} \frac{d}{dt} \left(u'_{\varepsilon\delta}\right)^2 \; dzdt + \int_0^T \int_{\Omega_{\varepsilon\delta}^*} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \Big[ \varepsilon^{-2} a_{\alpha\beta} \frac{\partial u_{\varepsilon\delta}}{\partial z_\beta} \frac{\partial u_{\varepsilon\delta}}{\partial z_\alpha} \\ + 2\varepsilon^{-1} a_{\alpha 3} \frac{\partial u_{\varepsilon\delta}}{\partial z_3} \frac{\partial u_{\varepsilon\delta}}{\partial z_\alpha} + a_{33} \Big( \frac{\partial u_{\varepsilon\delta}}{\partial z_3^2} \Big)^2 \Big] \; dzdt = 0, \end{aligned}$$

car $a_{ij} = a_{ji}$. Alors, si on pose

$$
\begin{aligned}
E(t) = \frac{1}{2}\int_{\Omega^*_{\varepsilon\delta}} (u'_{\varepsilon\delta})^2\,dz + \frac{1}{2}\int_{\Omega^*_{\varepsilon\delta}} \Big[\varepsilon^{-2} a_{\alpha\beta}\frac{\partial u_{\varepsilon\delta}}{\partial z_\beta}\frac{\partial u_{\varepsilon\delta}}{\partial z_\alpha} \\
+ 2\varepsilon^{-1} a_{\alpha 3}\frac{\partial u_{\varepsilon\delta}}{\partial z_3}\frac{\partial u_{\varepsilon\delta}}{\partial z_\alpha} + a_{33}\Big(\frac{\partial u_{\varepsilon\delta}}{\partial z_3^2}\Big)^2\Big]\,dz,
\end{aligned}
\tag{3.8}
$$

on obtient

$$
\int_0^T \frac{d}{dt}E(t)\,dt = 0, \qquad \text{et donc } E(T) = E(0).
\tag{3.9}
$$

Ainsi, on a conservation de l'énergie et par conséquent, grâce à (1.5),

$$
\begin{aligned}
E(0) = \frac{1}{2}\int_{\Omega^*_{\varepsilon\delta}} \left(u^1_{\varepsilon\delta}\right)^2\,dz + \frac{1}{2}\int_{\Omega^*_{\varepsilon\delta}} \Big[\varepsilon^{-2} a_{\alpha\beta}\frac{\partial u^0_{\varepsilon\delta}}{\partial z_\beta}\frac{\partial u^0_{\varepsilon\delta}}{\partial z_\alpha} \\
+ 2\varepsilon^{-1} a_{\alpha 3}\frac{\partial u^0_{\varepsilon\delta}}{\partial z_3}\frac{\partial u^0_{\varepsilon\delta}}{\partial z_\alpha} + a_{33}\Big(\frac{\partial u^0_{\varepsilon\delta}}{\partial z_3^2}\Big)^2\Big]\,dz.
\end{aligned}
\tag{3.10}
$$

En utilisant (3.1), on a $E(0) \le c$, où (comme dans toute la démonstration de ce théorème) $c$ est une constante indépendante de $\varepsilon$ mais dépendant de $\delta$. Alors, de (3.8), (3.9) et (3.10) on obtient les estimations

$$
\|u'_{\varepsilon\delta}\|^2_{L^2(\Omega^*_{\varepsilon\delta})} \le c,
\tag{3.11}
$$

et

$$
\|u_{\varepsilon\delta}\|^2_{\varepsilon\delta} \le c.
\tag{3.12}
$$

De la Remarque 1.2 et de (3.11-12) on a ensuite

$$
\begin{cases}
\|u'_{\varepsilon\delta}\|^2_{L^\infty\left(0,T;L^2(\Omega^*_{\varepsilon\delta})\right)} \le c, \\
\|u_{\varepsilon\delta}\|^2_{L^\infty(0,T;H^1(\Omega^*_{\varepsilon\delta})} \le c.
\end{cases}
\tag{3.13}
$$

Grâce au Lemme 3.2, on sait alors qu'à une sous suite près, on a les convergences

$$
\begin{cases}
P_{\varepsilon\delta}u_{\varepsilon\delta} \rightharpoonup u_\delta & \text{faible} * \text{dans} \quad L^\infty(0,T;H^1(\Omega)), \\
P_{\varepsilon\delta}u'_{\varepsilon\delta} \rightharpoonup u'_\delta & \text{faible} * \text{dans} \ L^\infty(0,T;L^2(\Omega)).
\end{cases}
\tag{3.14}
$$

Par ailleurs, (1.2) et (3.12) impliquent les estimations suivantes:

$$(3.15)\qquad \begin{cases} \left\| \varepsilon^{-1} \dfrac{\partial u_{\varepsilon\delta}}{\partial z_1} \right\|_{L^2(\Omega^*_{\varepsilon\delta})} \leq c, \\ \left\| \varepsilon^{-1} \dfrac{\partial u_{\varepsilon\delta}}{\partial z_2} \right\|_{L^2(\Omega^*_{\varepsilon\delta})} \leq c, \\ \left\| \dfrac{\partial u_{\varepsilon\delta}}{\partial z_3} \right\|_{L^2(\Omega^*_{\varepsilon\delta})} \leq c, \end{cases}$$

ce qui montre que $u_\delta$ est indépendante de $z_1$ et $z_2$ (voir [1]).
Maintenant, on cherche l'équation vérifiée par $u_\delta$. Pour cela, posons

$$\xi^i_\varepsilon = \varepsilon^{-1} a_{i\beta} \frac{\partial u_{\varepsilon\delta}}{\partial z_\beta} + a_{i3} \frac{\partial u_{\varepsilon\delta}}{\partial z_3}, \qquad i = 1, 2, 3.$$

En vertu de (3.15), on a

$$\left\| \widetilde{\xi^i_\varepsilon} \right\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leq c.$$

Par conséquent

$$(3.16)\qquad \widetilde{\xi^i_\varepsilon} \rightharpoonup \xi^i \quad \text{faible} * \text{dans} \quad L^\infty(0, T; L^2(\Omega)).$$

On observe que le prolongement de $\xi^i_\varepsilon$ à $\Omega$ tout entier, vérifie le système suivant:

$$(3.17)\qquad \begin{cases} (Pu_{\varepsilon\delta})'' \chi_{\Omega^*_{\varepsilon\delta}} - \left[ \varepsilon^{-1} \dfrac{\partial \widetilde{\xi^1_\varepsilon}}{\partial z_1} + \varepsilon^{-1} \dfrac{\partial \widetilde{\xi^2_\varepsilon}}{\partial z_2} + \dfrac{\partial \widetilde{\xi^3_\varepsilon}}{\partial z_3} \right] = 0 & \text{dans } \Omega \times ]0, T[\,, \\ \widetilde{\xi^1_\varepsilon} n_1 + \widetilde{\xi^2_\varepsilon} n_2 + \widetilde{\xi^3_\varepsilon} n_3 = 0 & \text{sur } (\partial\Omega - ]0, 1[ \times ]0, 1[ \times \{0\}) \times ]0, T[\,, \end{cases}$$

où $\chi_{\Omega^*_{\varepsilon\delta}}$ désigne la fonction caracteristique de $\Omega^*_{\varepsilon\delta}$.

Soit maintenant $\varphi \in \mathcal{D}\,(]0, L[)$, $v \in \mathcal{D}\,(]0, T[)$. On multiple $(3.17)_1$ par $\varphi\, v$. On intègre dans le premier terme par rapport à $t$ et dans le second par rapport $z$, pour obtenir

$$(3.18)\qquad \int_0^T \int_\Omega P_\varepsilon u_{\varepsilon\delta}\, \varphi\, v''\, \chi_{\Omega^*_{\varepsilon\delta}}\, dzdt + \int_0^T \int_\Omega \widetilde{\xi^3_\varepsilon}\, \frac{\partial \varphi}{\partial z_3}\, v\, dzdt = 0,$$

le terme sur le bord etant nul grâce à $(3.17)_2$.

D'autre part, on sait que (pour les détails des calculs, voir[1]),

$$(3.19)\qquad \chi_{\Omega^*_{\varepsilon\delta}} \rightharpoonup |Y^*_\delta|\,.$$

Maintenant, en utilisant les convergences $(3.14)_2$, (3.19), et (3.16) on a

$$\int_0^T \int_\Omega u_\delta \, \varphi \, v'' \, |Y_\delta^*| \; dzdt + \int_0^T \int_\Omega \xi^3 \, \frac{\partial \varphi}{\partial z_3} \, v \, dzdt = 0.$$

En posant $H = ]0,1[ \times ]0,1[$, on a

$$|Y_\delta^*| \int_0^T \Big( \int_0^L \Big( \int_H dz_1 dz_2 \Big) u_\delta \, \varphi \, dz_3 \Big) v'' \, dt + \int_0^T \Big( \int_0^L \Big( \int_H \xi^3 dz_1 dz_2 \Big) \frac{\partial \varphi}{\partial z_3} dz_3 \Big) v dt = 0.$$

Alors, au sens des distributions sur $\mathcal{D}\left(]0,T[\right) \times \mathcal{D}\left(]0,L[\right)$, on en déduit

$$|Y_\delta^*| \, u_\delta'' - \frac{\partial}{\partial z_3} \Big( \int_H \xi^3 dz_1 dz_2 \Big) = 0 \tag{3.20}$$

Il reste à identifier $\int_H \xi^3 \; dz_1 dz_2$ en fonction de $u_\delta$. Pour cela on introduit la fonction $\chi^\delta$ définie par (3.7). On pose $g(y) = -\chi^\delta(y) + y_3$, et $g_\varepsilon(z) = \varepsilon Q_g(z_1, z_2, z_3/\varepsilon)$. Il est clair qu'on a les estimations

$$\left\| \chi^\delta \right\|_{H^1(Y_\delta^*)} \leq c\,(\delta)\,, \quad \|g\|_{H^1(Y_\delta^*)} \leq c\,(\delta)\,, \quad \|g_\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} \leq c\,(\delta)\,.$$

Par conséquent (pour les details voir [1]),

$$g_\varepsilon \rightharpoonup z_3 \quad \text{faiblement dans } H^1(\Omega) \tag{3.21}$$

D'autre part, posons

$$\eta^i(y) = a_{ij} \frac{\partial g}{\partial y_j}, \quad \eta^i_\varepsilon(z) = \eta^i(z_1, z_2, \frac{z_3}{\varepsilon}).$$

Alors $\eta^i_\varepsilon$ vérifie le système

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial \eta^i}{\partial y_j} = 0 \qquad \text{dans } Y_\delta^*, \\ \eta^1 . n_1 = \eta^2 . n_2 = \eta^3 . n_3 \qquad \text{sur } \partial_N Y_\delta^*, \\ \eta^i \quad \text{périodique en } y_3, \end{cases}$$

et $\widetilde{\eta}_\varepsilon^i$ est solution de

$$(3.22)\qquad \begin{cases} -\left[\varepsilon^{-1}\dfrac{\partial\widetilde{\eta}_\varepsilon^1}{\partial z_1}+\varepsilon^{-1}\dfrac{\partial\widetilde{\eta}_\varepsilon^2}{\partial z_2}+\dfrac{\partial\widetilde{\eta}_\varepsilon^3}{\partial z_3}\right]=0 & \text{dans } \Omega, \\ \widetilde{\eta}_\varepsilon^1.n_1=\widetilde{\eta}_\varepsilon^2.n_2=\widetilde{\eta}_\varepsilon^3.n_3 & \text{sur } \partial\Omega-(]0,1[\times]0,1[\times\{0\}). \end{cases}$$

De plus

$$\left\|\eta^i\right\|_{L^2\left(Y_\delta^*\right)}\leq c(\delta), \quad \left\|\widetilde{\eta}_\varepsilon^i\right\|_{L^2(\Omega)}\leq c(\delta).$$

Donc (pour les details des calculs, voir [1]),

$$(3.23)\qquad \widetilde{\eta}_\varepsilon^i \rightharpoonup \mathcal{M}\left(\widetilde{\eta}^i\right) \qquad \text{faiblement dans } L^2(\Omega).$$

Maintenant, on multiplie le système (3.17) par $v\ \varphi\ g_\varepsilon$ avec $v\in\mathcal{D}(]0,T[),\ \varphi\in\mathcal{D}(]0,L[)$ et on intègre par parties par rapport à $z$. Il vient

$$(3.24)\qquad \begin{aligned} &\int_0^T\int_\Omega\Big(P_\varepsilon(u_{\varepsilon\delta})''\Big)\,\chi_{\Omega_{\varepsilon\delta}^*}\ v\ \varphi\ g_\varepsilon\ dzdt+\int_0^T v\Big(\varepsilon^{-1}\int_\Omega\widetilde{\xi}_\varepsilon^1\varphi\frac{\partial g_\varepsilon}{\partial z_1}\ dz\Big)dt \\ &\quad+\int_0^T v\Big(\varepsilon^{-1}\int_\Omega\widetilde{\xi}_\varepsilon^2\varphi\frac{\partial g_\varepsilon}{\partial z_2}dz\Big)\ dt+\int_0^T v\Big(\int_\Omega\widetilde{\xi}_\varepsilon^3\varphi\frac{\partial g_\varepsilon}{\partial z_3}dz\Big)\ dt \\ &\quad+\int_0^T v\Big(\int_\Omega\widetilde{\xi}_\varepsilon^3\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial z_3}\ g_\varepsilon dz\Big)\ dt=0. \end{aligned}$$

De même, multiplions (3.22) par $v\ \varphi\ P_\varepsilon\ u_{\varepsilon\delta}$ et intégrons par parties sur $\Omega\times]0,T[$. On a

$$(3.25)\qquad \begin{aligned} &\int_0^T v(\varepsilon^{-1}\int_\Omega\widetilde{\eta}_\varepsilon^1\varphi\frac{\partial\left(P_\varepsilon u_{\varepsilon\delta}\right)}{\partial z_1}dz)dt+\int_0^T v\Big(\varepsilon^{-1}\int_\Omega\widetilde{\eta}_\varepsilon^2\varphi\frac{\partial\left(P_\varepsilon u_{\varepsilon\delta}\right)}{\partial z_2}dz\Big)\ dt \\ &\quad+\int_0^T v\Big(\int_\Omega\widetilde{\eta}_\varepsilon^3\varphi\frac{\partial\left(P_\varepsilon u_{\varepsilon\delta}\right)}{\partial z_3}dz\Big)\ dt+\int_0^T v\Big(\int_\Omega\widetilde{\eta}_\varepsilon^3\frac{\partial\varphi}{\partial z_3}P_\varepsilon u_{\varepsilon\delta}dz\Big)\ dt=0. \end{aligned}$$

En soustrayant (3.25) de (3.24), on obtient

$$\begin{aligned} &\int_0^T\int_\Omega\left(P_\varepsilon u_{\varepsilon\delta}\right)\,\chi_{\Omega_{\varepsilon\delta}^*}\ v''\ \varphi\ g_\varepsilon\ dzdt+\int_0^T v\Big(\int_\Omega\widetilde{\xi}_\varepsilon^3\frac{\partial\varphi}{\partial z_3}g_\varepsilon dz\Big)\ dt \\ &\quad-\int_0^T v\Big(\int_\Omega\widetilde{\eta}_\varepsilon^3\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial z_3}\ P_\varepsilon u_{\varepsilon\delta}dz)dt=0. \end{aligned}$$

Passant à la limite, en utilisant les convergences (3.16), (3.19), (3.21), (3.23) et $(3.14)_1$, on trouve

$$\int_0^T \Big(\int_0^L |Y_\delta^*|\, u_\delta\, v''\, \varphi\, z_3\, dz_3\Big) dt + \int_0^T v\Big[\int_0^L \Big(\int_H \xi^3 dz_1 dz_2\Big) \frac{\partial \varphi}{\partial z_3}\, z_3\, dz_3\Big] dt$$
$$+ \int_0^T v\, \mathcal{M}\left(\widetilde{\eta}^3\right) \Big(\int_0^L \frac{\partial \varphi}{\partial z_3}\, u_\delta\, dz_3\Big)\, dt = 0.$$

Intégrant par parties, il vient

$$\int_0^T \Big(\int_0^L |Y_\delta^*|\;\, z_3\, u_\delta''\, v\, \varphi\, dz_3\Big) dt - \int_0^T v\Big\{\frac{\partial}{\partial z_3}\Big[\Big(\int_H \xi^3\, dz_1 dz_2\Big)\, z_3\Big] \varphi\, dz_3\Big\} dt$$
$$+ \int_0^T v\, \mathcal{M}\left(\widetilde{\eta}^3\right) \Big[\int_0^L \frac{\partial u_\delta}{\partial z_3}\, \varphi\, dz_3\Big]\, dt = 0.$$

Par conséquent, on a

$$|Y_\delta^*|\, u_\delta'' z_3 + \mathcal{M}\left(\widetilde{\eta}^3\right) \frac{\partial u_\delta}{\partial z_3} - \frac{\partial}{\partial z_3}\left[\Big(\int_H \xi^3 dz_1 dz_2\Big)\, z_3\right] = 0,$$

et donc

$$|Y_\delta^*|\, u_\delta''\, z_3 + \mathcal{M}\left(\widetilde{\eta}^3\right) \frac{\partial u_\delta}{\partial z_3} - \frac{\partial}{\partial z_3}\left[\int_H \xi^3 dz_1 dz_2\right] z_3 - \int_H \xi^3\, dz_1 dz_2 = 0. \tag{3.26}$$

d'où l'on déduit aisement, grâce à (3.20) que

$$\mathcal{M}\left(\widetilde{\eta}^3\right) \frac{\partial u_\delta}{\partial z_3} = \int_H \xi^3 dz_1 dz_2,$$

qu'on remplace dans (3.4), pour avoir

$$|Y_\delta^*|\, u_\delta'' - \frac{\partial}{\partial z_3}\left(\mathcal{M}\left(\widetilde{\eta}^3\right) \frac{\partial u_\delta}{\partial z_3}\right) = 0.$$

En posant

$$q_\delta = \mathcal{M}\left(\widetilde{\eta}^3\right) = \int_{Y_\delta^*} \eta^3 dy = \int_{Y_\delta^*} a_{3j} \frac{\partial\left(-\chi^\delta + y_3\right)}{\partial y_j} dy.$$

on retrouve la première équation de (3.4), dite équation homogénéisée.

Par la suite, il nous reste à chercher les conditions intiales de $u_\delta$. Pour cela, multiplions (3.26) par $v\ \varphi$, où $\varphi \in \mathcal{D}\left(]0,L[\right)$ et $v \in \mathcal{D}\left([0,T]\right)$, telle que $v(T)=0$ et $v(0)\neq 0$. Aprés avoir prolongée à $\Omega \times ]0,T[$, on a

$$\int_0^T \int_\Omega \widetilde{u}''_{\varepsilon\delta}\ v\ \varphi\ dzdt - \int_0^T \int_\Omega \Big[\varepsilon^{-1}\frac{\partial \widetilde{\xi}^1_\varepsilon}{\partial z_1} + \varepsilon^{-1}\frac{\partial \widetilde{\xi}^2_\varepsilon}{\partial z_2} + \frac{\partial \widetilde{\xi}^3_\varepsilon}{\partial z_3}\Big] v\ \varphi\ dzdt = 0.$$

En intégant par parties par rapport à $t$ dans la première inté grale et par rapport à $z$ dans l'autre, on obtient

$$-\int_0^T \int_\Omega \widetilde{u}'_{\varepsilon\delta}\ v'\ \varphi\ dzdt - \int_\Omega \widetilde{u}^1_{\varepsilon\delta}(0)\ v\,(0)\,\varphi\ dz + \int_0^T \int_\Omega \widetilde{\xi}^3_\varepsilon\ v\ \frac{\partial \varphi}{\partial z_3}\ dzdt = 0, \tag{3.27}$$

car

$$\left(\widetilde{u}_{\varepsilon\delta}\right)'(0) = \widetilde{u'_{\varepsilon\delta}}\,(0) = \widetilde{u'_{\varepsilon\delta}\,(0)} = \widetilde{u}^1_{\varepsilon\delta}\,(0)\,.$$

D'autre part, remarquons que l'on a

$$\widetilde{u'_{\varepsilon\delta}} = \widetilde{u}'_{\varepsilon\delta} \rightharpoonup |Y^*_\delta|\, u'_\delta = U \quad \text{faible} * \ \text{dans}\ L^\infty\left(0,T;L^2(\Omega)\right). \tag{3.28}$$

En effet, cette limite existe d'après (3.13) et de plus,

$$\int_0^T \int_{\Omega^*_{\varepsilon\delta}} u''_{\varepsilon\delta}\ \psi\ h\ dzdt = \int_0^T \int_{\Omega^*_{\varepsilon\delta}} u_{\varepsilon\delta}\ \psi h''\ dzdt = \int_0^T \int_\Omega P_\varepsilon u_{\varepsilon\delta}\ \chi_{\Omega^*_{\varepsilon\delta}}\ \psi\ h''\ dzdt,$$

et

$$\int_0^T \int_{\Omega^*_{\varepsilon\delta}} u''_{\varepsilon\delta}\ \psi\ h\ dzdt = \int_0^T \int_{\Omega^*_{\varepsilon\delta}} \widetilde{u''_{\varepsilon\delta}}\ \psi\ h\ dzdt = -\int_0^T \int_\Omega \widetilde{u}'_{\varepsilon\delta}\ \psi\ h'\ dzdt,$$

où $\psi \in \mathcal{D}\,(\Omega)$ et $h \in \mathcal{D}\left(]0,T[\right)$. Par conséquent,

$$\int_0^T \int_\Omega P_\varepsilon u_{\varepsilon\delta}\ \chi_{\Omega^*_{\varepsilon\delta}}\ \psi.h''\ dzdt = -\int_0^T \int_\Omega \widetilde{u}'_{\varepsilon\delta}\ \psi\ h'\ dzdt.$$

En passant à la limite, on obtient

$$-\int_0^T \int_\Omega u'_\delta\ |Y^*_\delta|\ \ \psi\ h'\ dzdt = \int_0^T \int_\Omega U\ \psi\ h'\ dzdt \Longrightarrow U = u'_\delta\ |Y^*_\delta|\,.$$

Revenons à (3.27) où l'on passe à la limite en utilisant les convergences (3.28), $(3.1)_2$ et (3.16), pour avoir

$$-\int_0^T \int_\Omega |Y_\delta^*| \; u'_\delta \; v' \; \varphi \; dzdt - \int_\Omega u_\delta^1 \; v(0) \; \varphi \; dzdt + \int_0^T \int_\Omega \xi^3 \; v \; \frac{\partial \varphi}{\partial z_3} \; dzdt = 0.$$

On intègre comme précedement par rapport à $t$ et $z$, ce qui donne

$$\int_0^T \int_\Omega |Y_\delta^*| \; u''_\delta \; v \; \varphi \; dzdt + \int_\Omega |Y_\delta^*| \; u'_\delta (0) \; v' (0) \; \varphi dz - \int_\Omega u_\delta^1 \; v(0) \; \varphi \; dz$$
$$+ \int_0^T v \left( \int_0^L \frac{\partial}{\partial z_3} \left( \int_H \xi^3 dz_1 dz_2 \right) \varphi dz_3 \right) dt = 0.$$

En vertu de (3.20), il reste

$$v(0) \left[ \int_\Omega |Y_\delta^*| \; u'_\delta (0) \; \varphi \; dz + \int_\Omega u_\delta^1 \; \varphi \; dz \right] = 0,$$

ce qui se réécrit

$$|Y_\delta^*| \int_0^L u'_\delta(0) \; \varphi \; dz_3 - \int_0^L \left( \int_H u_\delta^1 \; dz_1 dz_2 \right) \varphi \; dz_3 = 0,$$

d'où l'on déduit

$$u'_\delta(0) = |Y_\delta^*| \int_H u_\delta^1 \; dz_1 dz_2.$$

Maintenant cherchons la condition sur $u_\delta(0)$. On refait les mêmes calculs qu'avant, mais cette fois-ci on prend $v \in \mathcal{D}(]0,T[)$ tel que $v'(T) = 0$ et $v'(0) \neq 0$. Et donc on a

$$\int_0^T \int_\Omega P_\varepsilon u_{\varepsilon\delta} \; \chi_{\Omega^*_{\varepsilon u}} \; \varphi \; v'' \; dzdt + \int_\Omega \widetilde{u}^0_{\varepsilon\delta} \; v' (0) \; \varphi \; dz + \int_0^T \int_\Omega \widetilde{\xi}^3_\varepsilon \; \frac{\partial \varphi}{\partial z_3} \; v \; dzdt = 0.$$

En passant à la limite, on a

$$\int_0^T \int_\Omega u_\delta \; |Y_\delta^*| \; \varphi \; v'' \; dzdt + \int_\Omega u_\delta^0 \; v' (0) \; \varphi \; dz + \int_0^T \int_\Omega \xi^3 \frac{\partial \varphi}{\partial z_3} v \; dzdt = 0,$$

et donc

$$\int_0^T \int_\Omega u''_\delta . \left| Y^*_\delta \right| .v'.\varphi \; dzdt - \int_\Omega \left| Y^*_\delta \right| u_\delta \left( 0 \right) v' \left( 0 \right) \varphi dz + \int_\Omega u^0_\delta v' \left( 0 \right) \varphi dz$$
$$+ \int_\Omega v \int_0^L \frac{\partial \varphi}{\partial z_3} \left( \int_H \xi^3 dz_1 dz_2 \right) \varphi dz_3 dt = 0.$$

Alors, comme précédement, on a

$$\int_0^L u^0_\delta \varphi dz_3 = \int_0^L \left| Y^*_\delta \right| u_\delta \left( 0 \right) \varphi dz_3,$$

car $u^0_\delta$ dépend uniquement de $z_3$ (ce qui se montre de la même façon que pour $u_\delta$, en utilisant $(3\text{-}1)_1$). Finalement, $u_\delta \left( 0 \right) = u^0_\delta / \left| Y^*_\delta \right|$, ce qui achève la preuve du théorème. □

**Remarque 3.2.** Dans le Théorème 3.1, on a pris le second membre de $(1.5)_1$ égal à zéro. En fait, on peut le prendre égal à $f_{\varepsilon\delta} \in L^2(\Omega^*_{\varepsilon\delta} \times ]0, T[)$ tel que $f_{\varepsilon\delta} \rightharpoonup f_\delta$ faiblement dans $L^2(\Omega \times ]0, T[)$ et on obtient $(3.4)_1$ avec $f_\delta$ au lieu de zéro.

Dans la suite, nous allons homogénéiser le problème (1.5) avec le second membre vérifiant une hypothèse trés faible. Précisons que si ce dernier est régulier, le théorème suivant est l'objet du travail fait dans [1]. Nous aurons besoin de ce théorème dans le paragraphe 4 où on étudie la convergence du contrôle quand $\varepsilon$ tend vers zéro.

**Proposition 3.3.** *Soit $f_{\varepsilon\delta} \in V'_{\varepsilon\delta}$ . On suppose qu'il existe une constante $c$, positive et indépendante de $\varepsilon$, telle que*

$$\left\| f_\varepsilon \right\|_{V'_{\varepsilon\delta}} \leq c. \tag{3.29}$$

*Soit $\tau_{\varepsilon\delta} \in V_{\varepsilon\delta}$, la solution de*

$$\begin{cases} A_{\varepsilon\delta} \tau_{\varepsilon\delta} = f_{\varepsilon\delta} \quad \text{dans} \ \ \Omega^*_{\varepsilon\delta}, \\ \tau_{\varepsilon\delta} = 0 \quad \text{sur} \ \Omega^{*,0}_{\varepsilon\delta}, \\ \dfrac{\partial \tau_{\varepsilon\delta}}{\partial \nu_{\varepsilon\delta}} = 0 \quad \text{sur} \ \Gamma_{\varepsilon\delta}. \end{cases} \tag{3.30}$$

*Alors il existe $f^*_\delta \in H^{-1}(]0, L[)$ et une sous-suite extraite de $\varepsilon$, encore notée $\varepsilon$, tels que si $Q_\varepsilon$ est l'opérateur de prolongement du Lemme 3.1, on ait*

$$Q_\varepsilon \tau_{\varepsilon\delta} \rightharpoonup \tau_\delta \qquad \text{dans} \quad H^1_0 \left( ]0, L[ \right) \quad \text{faible},$$

*avec $\tau$ vérifiant*

$$\begin{cases} -q_\delta \dfrac{\partial^2 \tau_\delta}{\partial z_3^2} = f_\delta^* & \textit{dans } ]0,L[, \\ \tau_\delta(0) = \tau_\delta(L) = 0, \end{cases}$$

*où*

$$f^* = -\frac{\partial g\delta^*}{\partial z_3},$$

*avec $g_\delta^*$ donné par (3.42).*

**Démonstration**. Remarquons que $(3.30)_1$ s'ecrit

$$-\left[\varepsilon^{-1}\frac{\partial A_\alpha}{\partial z_\alpha} + \frac{\partial A_3}{\partial z_3}\right] = f_{\varepsilon\delta} \quad \text{dans} \quad \Omega_{\varepsilon\delta}^*,$$

avec

$$A_i = \varepsilon^{-1} a_{i\alpha}\frac{\partial \tau_{\varepsilon\delta}}{\partial z_\alpha} + a_{i3}\frac{\partial \tau_{\varepsilon\delta}}{\partial z_3}. \tag{3.31}$$

Le terme $f_{\varepsilon\delta}$ est trop peu régulier, pour éliminer cette dificulté on introduit la fonction $\rho_\varepsilon$, solution de

$$\begin{cases} -\left[\varepsilon^{-1}\dfrac{\partial^2 \rho_\varepsilon}{\partial z_1^2} + \varepsilon^{-1}\dfrac{\partial^2 \rho_\varepsilon}{\partial z_2^2} + \dfrac{\partial^2 \rho_\varepsilon}{\partial z_3^2}\right] = f_{\varepsilon\delta} \quad \text{dans } \Omega_{\varepsilon\delta}^*, \\ \rho_\varepsilon = 0 \quad \text{sur } \Omega_{\varepsilon\delta}^{*,0}, \\ \dfrac{\partial \rho_\varepsilon}{\partial \nu} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_{\varepsilon\delta}. \end{cases} \tag{3.32}$$

En soustrayant $(3.32)_1$ et $(3.31)_1$, on obtient

$$\varepsilon^{-1}\frac{\partial}{\partial z_\alpha}\left(A_\alpha - \frac{\partial \rho_\varepsilon}{\partial z_\alpha}\right) + \frac{\partial}{\partial z_3}\left(A_3 - \frac{\partial \rho_\varepsilon}{\partial z_3}\right) = 0.$$

Posons pour $i = 1, 2, 3$,

$$\sigma_{\varepsilon\delta}^i = A_i - \frac{\partial \rho_\varepsilon}{\partial z_i} = \left(\varepsilon^{-1} a_{i\alpha}\frac{\partial \tau_{\varepsilon\delta}}{\partial z_\alpha} + a_{i3}\frac{\partial \tau_{\varepsilon\delta}}{\partial z_3}\right) - \frac{\partial \rho_\varepsilon}{\partial z_i}.$$

Alors $\sigma_{\varepsilon\delta}^i$ vérifie

$$\varepsilon^{-1}\frac{\partial \sigma_{\varepsilon\delta}^\alpha}{\partial z_\alpha} + \frac{\partial \sigma_{\varepsilon\delta}^3}{\partial z_3} = 0 \tag{3.33}$$

D'autre part on a les estimations a priori suivantes :

$$\|\tau_{\varepsilon\delta}\|_{\varepsilon\delta} \leq c, \quad \|\nabla\rho_\varepsilon\|_{\left(L^2\left(\Omega^*_{\varepsilon\delta}\right)\right)^3} \leq c,$$

et puis

$$\|\widetilde{\sigma}_{\varepsilon\delta}\|_{(L^2(\Omega))^3} \leq c \ (c \text{ constante indépendante de } \varepsilon). \tag{3.34}$$

Pour cela, il suffit de multiplier $(3.30)_1$ par $\tau_{\varepsilon\delta}$ et d'intégrer par parties pour avoir

$$|\tau_{\varepsilon\delta}|^2 = \langle f_{\varepsilon\delta}, \tau_{\varepsilon\delta}\rangle_{V'_{\varepsilon\delta}, V_{\varepsilon\delta}}.$$

Grâce à (3.29) et à la Remarque 1.2, on a

$$\|\tau_{\varepsilon\delta}\|_{H^1\left(\Omega^*_{\varepsilon\delta}\right)} \leq c. \tag{3.35}$$

Puis on refait le même travail pour $\rho_\varepsilon$ dans le système (3.32), alors (3.35) nous donne

$$Q_\varepsilon \tau_{\varepsilon\delta} \rightharpoonup \tau_\delta \quad \text{faiblement dans } H^1_0(\Omega), \tag{3.36}$$

où $\tau_\delta$ est une fonction indépendante de $z_1$ et $z_2$. De même,

$$\widetilde{\sigma}_{\varepsilon\delta} \rightharpoonup \sigma_\delta \quad \text{faiblement dans } \left(L^2(\Omega)\right)^3, \ \text{avec } \frac{\partial}{\partial z_3}\left(\int_0^1 \int_0^1 \sigma^3_\delta \, dz_1 dz_2\right) = 0. \tag{3.37}$$

Ces calculs sont faits dans [1]. Mais on ne peut plus continuer à utiliser la demarche de [1], car nous avons une terme $\dfrac{\partial \rho_\varepsilon}{\partial z_i}$ de plus. Pour contourner cette difficulté, on introduit la fonction $\eta_\varepsilon$ définie par

$$\eta_\varepsilon = \widetilde{\sigma}^\alpha_{\varepsilon\delta}\left(\varepsilon^{-1}\frac{\partial\left(Q_\varepsilon w_{\varepsilon\delta}\right)}{\partial z_\alpha}\right) + \widetilde{\sigma}^3_{\varepsilon\delta}\left(\varepsilon^{-1}\frac{\partial\left(Q_\varepsilon w_{\varepsilon\delta}\right)}{\partial z_3}\right),$$

où $w_{\varepsilon\delta}$ est solution de

$$\begin{cases} A_{\varepsilon\delta} w_{\varepsilon\delta} = h \text{ dans } \ \Omega^*_{\varepsilon\delta}, \\ w_{\varepsilon\delta} = 0 \text{ sur } \ \Omega^{*,0}_{\varepsilon\delta}, \\ \dfrac{\partial w_{\varepsilon\delta}}{\partial \nu_{A_{\varepsilon\delta}}} = 0 \text{ sur } \ \Gamma_{\varepsilon\delta}, \end{cases},$$

avec $h \in \mathcal{D}(\Omega)$. En remarquant que

$$\forall i, j \qquad \frac{\partial \widetilde{\tau}_{\varepsilon\delta}}{\partial z_i} \frac{\partial (Q_\varepsilon w_{\varepsilon\delta})}{\partial z_j} = \frac{\partial (Q_\varepsilon \tau_{\varepsilon\delta})}{\partial z_i} \frac{\partial \widetilde{w}_{\varepsilon\delta}}{\partial z_j},$$

et

$$\begin{aligned} \eta_\varepsilon = & \left[ A_\alpha \left( \varepsilon^{-1} \frac{\partial (Q_\varepsilon w_{\varepsilon\delta})}{\partial z_\alpha} \right) + A_3 \frac{\partial (Q_\varepsilon w_{\varepsilon\delta})}{\partial z_3} \right] \\ & - \left[ \frac{\partial \widetilde{\rho}_\varepsilon}{\partial z_\alpha} \left( \varepsilon^{-1} \frac{\partial (Q_\varepsilon w_{\varepsilon\delta})}{\partial z_\alpha} \right) + \frac{\partial \widetilde{\rho}_\varepsilon}{\partial z_3} \frac{\partial (Q_\varepsilon w_{\varepsilon\delta})}{\partial z_3} \right], \end{aligned} \tag{3.38}$$

alors

$$A_\alpha \left( \varepsilon^{-1} \frac{\partial (Q_\varepsilon w_{\varepsilon\delta})}{\partial z_\alpha} \right) + A_3 \frac{\partial (Q_\varepsilon w_{\varepsilon\delta})}{\partial z_3} = \varepsilon^{-1} \widetilde{\xi}^\alpha_\varepsilon \frac{\partial (Q_\varepsilon \tau_{\varepsilon\delta})}{\partial z_\alpha} + \widetilde{\xi}^3_\varepsilon \frac{\partial (Q_\varepsilon w_{\varepsilon\delta})}{\partial z_3},$$

où

$$\begin{cases} \widetilde{\xi}^\alpha_\varepsilon = \varepsilon^{-1} a_{\beta i} \dfrac{\partial \widetilde{w}_{\varepsilon\delta}}{\partial z_\beta} + a_{\alpha 3} \dfrac{\partial \widetilde{w}_{\varepsilon\delta}}{\partial z_3}; \ \alpha, \beta = 1, 2, \\ \widetilde{\xi}^3_\varepsilon = \varepsilon^{-1} a_{\beta 3} \dfrac{\partial \widetilde{w}_{\varepsilon\delta}}{\partial z_\beta} + a_{33} \dfrac{\partial \widetilde{w}_{\varepsilon\delta}}{\partial z_3}. \end{cases}$$

Maintenant, soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\varphi$ dépendant de $z_3$ seulement, on a successivement

$$\begin{aligned} & \int_\Omega \left[ \varepsilon^{-1} \widetilde{\xi}^\alpha_\varepsilon \frac{\partial (Q_\varepsilon \tau_{\varepsilon\delta})}{\partial z_\alpha} + \widetilde{\xi}^3_\varepsilon \frac{\partial (Q_\varepsilon w_{\varepsilon\delta})}{\partial z_3} \right] \varphi \, dz \\ & = - \int_\Omega \left( \varepsilon^{-1} \frac{\partial \widetilde{\xi}^\alpha_\varepsilon}{\partial z_\alpha} + \frac{\partial \widetilde{\xi}^3_\varepsilon}{\partial z_3} \right) (Q_\varepsilon \tau_{\varepsilon\delta}) \varphi dz - \int_\Omega^3 \widetilde{\xi} \varepsilon (Q_\varepsilon \tau_{\varepsilon\delta}) \frac{\partial \varphi}{\partial z_3} \, dz \\ & \longrightarrow \int_\Omega |Y^*_\delta| \, h \, \tau_\delta \, \varphi dz - \int_\Omega \xi^3 \, \tau_\delta \, \frac{\partial \varphi}{\partial z_3} \, dz. \end{aligned} \tag{3.39}$$

En intégrant par parties dans la dernière intégrale on a

$$\begin{aligned} & \int_0^L \tau_\delta \frac{\partial \varphi}{\partial z_3} \left( \int_0^1 \int_0^1 \xi^3 dz_1 dz_2 \right) \, dz_3 \\ & \quad = - \int_0^L \varphi \frac{\partial \tau_\delta}{\partial z_3} \left( q_\delta \, \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial z_3} \right) \, dz_3 + \int_0^L \varphi \, \tau_\delta \, q_\alpha \frac{\partial^2 w_\varepsilon}{\partial z_3^2} dz_3 \\ & \quad = - \int_0^L \frac{\partial \tau_\delta}{\partial z_3} \left( q_\delta \, \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial z_3} \right) \varphi dz_3 - \int_0^L \varphi \, \tau_\delta \, |Y^*_\delta| \, h \, dz_3, \end{aligned}$$

qui remplacé dans (3.39), conduit à la convergence

$$(3.40)\quad A_\alpha \varepsilon^{-1}\frac{\partial\left(Q_\varepsilon w_{\varepsilon\delta}\right)}{\partial z_\alpha}+A_3\varepsilon^{-1}\frac{\partial\left(Q_\varepsilon w_{\varepsilon\delta}\right)}{\partial z_3}\rightharpoonup q_\delta\frac{\partial w_\delta}{\partial z_3}\frac{\partial \tau_\delta}{\partial z_3}\quad \text{faiblement dans } \mathcal{D}'\left(\Omega\right).$$

Par la suite, on s'intéresse au deuxiéme terme de $\eta_\varepsilon$ dans (3.38).En utilisant la méthode des échelles multiples (voir par exemple, [1]), on obtient

$$(3.41)\qquad w_{\varepsilon\delta}=w_\delta+\varepsilon\left(-\chi_\delta\left(y\right)\right)\frac{\partial w_\delta}{\partial z_3}+\varepsilon^2\left(\frac{\partial^2 w_\delta}{\partial z_3^2}\theta_\delta\left(y\right)+\dots\right),$$

où $w_\delta$ est la limite de $w_{\varepsilon\delta}$ pour $\varepsilon\longrightarrow 0$, $\chi_\delta$ est la fonction donné par le système (3.8), et $\theta^\delta$ est solution de

$$\begin{cases} -a_{ij}\dfrac{\partial}{\partial y_i}\left(\dfrac{\partial\theta^\delta}{\partial y_j}-\chi^\delta\delta_j^3\right)=-q_\delta\left|Y_\delta^*\right|-a_{3i}\dfrac{\partial\left(\chi^\delta-y_3\right)}{\partial y_i} & \text{dans } Y_\delta^*,\\ a_{ij}\left(\dfrac{\partial\theta^\delta}{\partial y_j}-\chi^\delta\delta_j^3\right)n_i=0\quad \text{sur } \partial_N Y_\delta^*, & \\ \theta^\delta \text{ périodique en } y_3 \text{ et de moyenne nulle.} & \end{cases}$$

De plus,

$$\left\|\nabla\theta^\delta\right\|_{(Y_u^*)^3}\le c\delta,\ (c \text{ constante indépendante de } \varepsilon).$$

De (3.41) on déduit

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\widetilde{w}_{\varepsilon\delta}}{\partial z_\alpha}=\left(-\varepsilon\dfrac{\partial\widetilde{\chi^\delta}}{\partial y_\alpha}\right)\dfrac{\partial\widetilde{w}_\delta}{\partial z_3}+\varepsilon^2R_\alpha; & \left\|R_\alpha\right\|_{H^1\left(\Omega_{\varepsilon\delta}^*\right)}\le c,\\ \dfrac{\partial\widetilde{w}_{\varepsilon\delta}}{\partial z_3}=\left(1-\dfrac{\partial\widetilde{\chi^\delta}}{\partial y_3}\right)\dfrac{\partial\widetilde{w}_\delta}{\partial z_3}+\varepsilon R_3; & \left\|R_3\right\|_{H^1\left(\Omega_{\varepsilon\delta}^*\right)}\le c. \end{cases}$$

Puisque

$$\frac{\partial\widetilde{\rho}_\varepsilon}{\partial z_i}\frac{\partial\left(Q_\varepsilon w_{\varepsilon\delta}\right)}{\partial z_i}=\frac{\partial\widetilde{\rho}_\varepsilon}{\partial z_i}\frac{\partial\widetilde{w}_{\varepsilon\delta}}{\partial z_i},$$

on a

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\widetilde{\rho}_\varepsilon}{\partial z_\alpha}\left(\varepsilon^{-1}\frac{\partial\left(Q_\varepsilon w_{\varepsilon\delta}\right)}{\partial z_\alpha}\right)+\frac{\partial\widetilde{\rho}_\varepsilon}{\partial z_3}\left(\frac{\partial\left(Q_\varepsilon w_{\varepsilon\delta}\right)}{\partial z_3}\right)\\ &\qquad=\frac{\partial\widetilde{\rho}_\varepsilon}{\partial z_\alpha}\left(-\frac{\partial\widetilde{\chi^\delta}}{\partial y_\alpha}\right)\frac{\partial\widetilde{w}_\delta}{\partial z_3}+\frac{\partial\widetilde{\rho}_\varepsilon}{\partial z_3}\left(1-\frac{\partial\widetilde{\chi^\delta}}{\partial y_3}\right)\frac{\partial\widetilde{w}_\delta}{\partial z_3}+\varepsilon R,\end{aligned}$$

avec

$$\|R\|_{H^1(\Omega^*_{\varepsilon\delta})} \leq c, \ (c \text{ constante indépendante de } \varepsilon).$$

Par conséquent

$$\frac{\partial \widetilde{\rho}_\varepsilon}{\partial z_\alpha}\left(\varepsilon^{-1}\frac{\partial\left(Q_\varepsilon w_{\varepsilon\delta}\right)}{\partial z_\alpha}\right)+\frac{\partial \widetilde{\rho}_\varepsilon}{\partial z_3}\left(\frac{\partial\left(Q_\varepsilon w_{\varepsilon\delta}\right)}{\partial z_3}\right)=\left(\delta^i_\varepsilon-\frac{\partial \widetilde{\chi^\delta}}{\partial y_i}\right)\frac{\partial \widetilde{\rho}_\varepsilon}{\partial z_i}\,\frac{\partial \widetilde{w}_\delta}{\partial z_3}+\varepsilon R.$$

Par ailleurs, on a la convergence

$$g_{\varepsilon\delta}=\left(\delta^i_3-\frac{\partial \widetilde{\chi^\delta}}{\partial y_i}\right)\frac{\partial \widetilde{\rho}_\varepsilon}{\partial z_i}\rightharpoonup g^*_\delta \quad \text{faiblement dans } \mathcal{D}'(\Omega),$$

car

$$\|g_{\varepsilon\delta}\|_{L^1(\Omega)} \leq c, \ (c \text{ constante indépendante de } \varepsilon\ ).$$

Par conséquent,

$$\frac{\partial \widetilde{\rho}_\varepsilon}{\partial z_\alpha}\left(\varepsilon^{-1}\frac{\partial\left(Q_\varepsilon w_{\varepsilon\delta}\right)}{\partial z_\alpha}\right)+\frac{\partial \widetilde{\rho}_\varepsilon}{\partial z_3}\left(\frac{\partial\left(Q_\varepsilon w_{\varepsilon\delta}\right)}{\partial z_3}\right)\rightharpoonup g^*_\delta\frac{\partial \widetilde{w}_\delta}{\partial z_3} \quad \text{faiblement dans } \mathcal{D}'(\Omega). \tag{3.42}$$

D'autre part, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, dépendant de $z_3$ seulement, (3.33) et (3.35) on a ,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \eta_\varepsilon\ \varphi dz &= \int_\Omega \sigma^\alpha_{\varepsilon\delta}\left(\varepsilon^{-1}\frac{\partial\left(Q_\varepsilon w_{\varepsilon\delta}\right)}{\partial z_\alpha}\right)\varphi dz+\int_\Omega \sigma^3_{\varepsilon\delta}\frac{\partial\left(Q_\varepsilon w_{\varepsilon\delta}\right)}{\partial z_3}\varphi dz\\
&= -\int_\Omega\left(\varepsilon^{-1}\frac{\partial \sigma^\alpha_\varepsilon}{\partial z_\alpha}+\frac{\partial \sigma^3_\varepsilon}{\partial z_3}\right)\left(Q_\varepsilon w_{\varepsilon\delta}\right)\varphi dz-\int_\Omega \sigma^3_{\varepsilon\delta}\left(Q_\varepsilon w_{\varepsilon\delta}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial z_3}dz\\
&\rightharpoonup -\int_\Omega \sigma^3_\delta\ w_\delta\ \frac{\partial \varphi}{\partial z_3}dz\\
&= \int_0^L \frac{\partial}{\partial z_3}\Big(\int_0^1\int_0^1 \sigma^3_\delta dz_1 dz_2\Big)w_\delta dz_3+\int_0^L\Big(\int_0^1\int_0^1 \sigma^3_\delta dz_1 dz_2\Big)\frac{\partial w_\delta}{\partial z_3}\varphi dz_3.
\end{aligned}$$

En utilisant maintenant (3.36), on obtient

$$\int_\Omega \eta_\varepsilon\ \varphi dz \longrightarrow \int_\Omega\left(\int_0^1\int_0^1 \sigma^3_\delta dz_1 dz_2\right)\frac{\partial w_\delta}{\partial z_3}\varphi dz_3.$$

Ainsi,

$$\eta_\varepsilon \rightharpoonup \Big(\int_0^1\int_0^1 \sigma^3_\delta dz_1 dz_2\Big)\frac{\partial w_\delta}{\partial z_3} \quad \text{faiblement dans } \mathcal{D}'(\Omega). \tag{3.43}$$

En rassemblant (3.38), (3.40) et (3.43), on obtient

$$q_\delta \frac{\partial \tau_\delta}{\partial z_3} \frac{\partial w_\delta}{\partial z_3} - g_\delta^* \frac{\partial w_\delta}{\partial z_3} = \Big( \int_0^1 \int_0^1 \sigma_\delta^3 \, dz_1 dz_2 \Big) \frac{\partial w_\delta}{\partial z_3}.$$

Comme le choix de $w_\delta$ est arbitraire, cela implique

$$q_\delta \frac{\partial \tau_\delta}{\partial z_3} - g_\delta^* = \int_0^1 \int_0^1 \sigma_\delta^3 \, dz_1 dz_2. \tag{3.44}$$

Alors, grâce à (3.37), on a

$$-q_\delta \frac{\partial^2 \tau_\delta}{\partial z_3^2} = -\frac{\partial g_\delta^*}{\partial z_3}.$$

En vertu de (3.44), on sait que $g_\delta^* \in L^2(]0, L[)$, donc

$$\frac{\partial g_\delta^*}{\partial z_3} \in H^{-1}(]0, 1[).$$

On prends alors

$$f_\delta^* = -\frac{\partial g_\delta^*}{\partial z_3},$$

et la preuve de la Proposition 3.3 est terminée. □

## 4. Convergence des contrôles

Le Théorème 2.1 montre que le contrôle $v_{\varepsilon\delta}$ est égal à $-\varphi_{\varepsilon\delta}$, où $\varphi_{\varepsilon\delta}$ est solution de (2.2). Ce dernier système est le même que (1.5), mais avec des conditions initiales plus faibles. Ceci nous conduit au résultat suivant :

**Théorème 4.1** *Soit $\varphi_{\varepsilon\delta}$ solution du systè me (2.2). Alors, lorsque $\varepsilon$ tend vers zéro, on a les convergences*

$$\widetilde{\varphi}^0_{\varepsilon\delta} \rightharpoonup \varphi^0_\delta \quad \text{faiblement dans } L^2(\Omega), \tag{4.1}$$

et

$$\widetilde{\varphi}_{\varepsilon\delta} \rightharpoonup \varphi_\delta \quad \text{faiblement dans } L^2(\Omega \times ]0, T[), \tag{4.2}$$

*où $\varphi_\delta$ est indépendante de $z_1$ et de $z_2$ et est solution du problème*

$$
\left\{
\begin{array}{l}
|Y_\delta^*|\,\varphi_\delta'' - \dfrac{\partial}{\partial z_3}\left(q_\delta \dfrac{\partial \varphi}{\partial z_3}\right) = 0 \quad \text{dans } \left]0, L\right[ \times \left]0, T\right[, \\
\varphi_\delta\left(0\right) = \varphi\left(L\right) = 0 \quad \textit{dans } \left]0, T\right[, \\
\varphi_\delta\left(0\right) = \overline{\varphi}_\delta^0 = \displaystyle\int_0^1 \int_0^1 \varphi_\delta^0 \, dz_1 dz_2 \quad \text{dans } \left]0, L\right[, \\
\varphi_\delta'\left(0\right) = \varphi_\delta^{1,*} \quad \textit{dans } \left]0, L\right[,
\end{array}
\right.
\tag{4.3}
$$

*avec*

$$
\varphi_\delta^{1,*} = -\frac{\partial g_\delta^*}{\partial z_3},
$$

*où $g_\delta^*$ est donné par le Théorème 3.3.*

**Démonstration.** Grâce à (2.4), (2.7) et (2.19), on a

$$
\left\|\varphi_{\varepsilon\delta}^0\right\|_{L^2\left(\Omega_{\varepsilon\delta}^*\right)} + \left\|\varphi_{\varepsilon\delta}^1\right\|_{V_{\varepsilon\delta}'} \le c\left(\left\|u_{\varepsilon\delta}^1\right\|_{L^2\left(\Omega_{\varepsilon\delta}^*\right)} + \left|u_{\varepsilon\delta}^0\right|_{\varepsilon\delta}\right),
$$

et en utilisant l'hypothèse (3.1), on en déduit les estimations

$$
\left\|\varphi_{\varepsilon\delta}^0\right\|_{L^2\left(\Omega_{\varepsilon\delta}^*\right)} \le c, \quad \left\|\varphi_{\varepsilon\delta}^1\right\|_{V_{\varepsilon\delta}'} \le c,
\tag{4.4}
$$

où $c$ est une constante indépendante de $\varepsilon$. En appliquant, le Théorème 1.2, on obtient

$$
\left\|\varphi_{\varepsilon\delta}\right\|_{L^2\left(\Omega_{\varepsilon\delta}^* \times \left]0,T\right[\right)} \le c,
\tag{4.5}
$$

de sorte qu'à une extraction de sous suite prés, on a les convergences (4.1) et (4.2).

Comme les données sont peu réguliéres, on ne peut pas utiliser le Théorème 3.1. On est ainsi amené à introduire la fonction ré gularisatisante $R_{\varepsilon\delta}$ définie par

$$
R_{\varepsilon\delta}\left(z, t\right) = \int_0^t \varphi_{\varepsilon\delta}\left(z, t\right) ds + \tau_{\varepsilon\delta},
\tag{4.6}
$$

où $\tau_{\varepsilon\delta}$ est la la solution du système

$$
\left\{
\begin{array}{l}
A_{\varepsilon\delta}\tau_{\varepsilon\delta} = -\varphi_{\varepsilon\delta}^1 \quad \text{dans } \Omega_{\varepsilon\delta}^*, \\
\tau_{\varepsilon\delta} = 0 \quad \text{sur } \Omega_{\varepsilon\delta}^{*,0}, \\
\dfrac{\partial \tau_{\varepsilon\delta}}{\partial \nu_{A_{\varepsilon\delta}}} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_{\varepsilon\delta}.
\end{array}
\right.
\tag{4.7}
$$

L'égalité (4.6) nous donne alors,

$$R'_{\varepsilon\delta}\,(z,t) = \varphi_{\varepsilon\delta}\,(z,t)\,, \quad R''_{\varepsilon\delta}\,(z,t) = \varphi'_{\varepsilon\delta}\,(z,t)\,. \tag{4.8}$$

De plus,

$$\begin{aligned} A_{\varepsilon\delta}R_{\varepsilon\delta} &= \int_0^t A_{\varepsilon\delta}\varphi_{\varepsilon\delta}\,(z,s)\,ds + A_{\varepsilon\delta}\tau_{\varepsilon\delta} = \int_0^t -\varphi''_{\varepsilon\delta}\,(z,s)\,ds + \varphi^1_{\varepsilon\delta} \\ &= -\varphi'_{\varepsilon\delta}\,(z,t) + \varphi'_{\varepsilon\delta}\,(z,0) - \varphi^1_{\varepsilon\delta} = -\varphi'_{\varepsilon\delta} = -R''_{\varepsilon\delta}\,(z,t)\,. \end{aligned} \tag{4.9}$$

On voit alors facilement que $R_{\varepsilon\delta}$ est solution de

$$\begin{cases} R''_{\varepsilon\delta} + A_{\varepsilon\delta}R_{\varepsilon\delta} = 0 \quad \text{dans} \;\; \Omega^*_{\varepsilon\delta}\times]0,T[, \\ R_{\varepsilon\delta} = 0 \quad \text{sur}\; \Omega^{*,0}_{\varepsilon\delta}, \\ \dfrac{\partial R_{\varepsilon\delta}}{\partial \nu_{A_{\varepsilon\delta}}} = 0 \quad \text{sur}\; \Gamma_{\varepsilon\delta}, \\ R_{\varepsilon\delta}\,(0) = \tau_{\varepsilon\delta} \quad \text{dans}\; \Omega^*_{\varepsilon\delta}, \\ R'_{\varepsilon\delta}\,(0) = \varphi^0_{\varepsilon\delta} \quad \text{dans}\; \Omega^*_{\varepsilon\delta}. \end{cases} \tag{4.10}$$

En effet, la première équation ainsi que les conditions initiales se déduisent de (4.9). Les conditions aux limites $(4.10)_2$ et $(4.10)_3$ s'obtiennent en utilisant d'abord $(2.2)_2$ et $(4.7)_2$, et ensuite $(2.2)_3$ et $(4.7)_3$.

D'autre part, de (3.34) et (4.4), et en appliquant le Théorè me 3.1 au système (4.10), on a les convergences

$$\begin{cases} P_\varepsilon R_{\varepsilon\delta} \rightharpoonup R_\delta \quad \textit{faible} * \textit{dans} \quad L^\infty(0,T;H^1_0(\Omega)), \\ P_\varepsilon R'_{\varepsilon\delta} \rightharpoonup R'_\delta \quad \textit{faible} * \textit{dans} \quad L^\infty(0,T;L^2(\Omega)), \end{cases}$$

avec $R_\delta$ solution du problème

$$\begin{cases} |Y^*_\delta|\,R''_\delta - \dfrac{\partial}{\partial z_3}\left(q_\delta \dfrac{\partial R_\delta}{\partial z_3}\right) \quad \text{dans}\;\; ]0,L[\times]0,T[\,, \\ R_\delta\,(0) = R_\delta\,(L) = 0 \quad \text{dans}\;\; ]0,T[\,, \\ R_\delta\,(0) = \tau_\delta \quad \text{dans}\;\; ]0,L[\,, \\ R'_\delta\,(0) = \dfrac{1}{|Y^*_\delta|}\overline{\varphi^0_\delta} = \dfrac{1}{|Y^*_\delta|}\displaystyle\int_0^1\int_0^1 \varphi^0_\delta\,dz_1dz_2 \quad \text{dans}\;\; ]0,L[\,, \end{cases} \tag{4.11}$$

où $\widetilde{\tau_{\varepsilon\delta}} = Q_{\varepsilon\delta}\tau_{\varepsilon\delta}.\chi_{\Omega_\varepsilon^*} \rightharpoonup \tau_\delta \left|Y_\delta^*\right|$, et $\tau_\delta$ est donné par la Proposition 3.3.

Comme l'on a (voir (4.8)), $R'_{\varepsilon\delta} = \varphi_{\varepsilon\delta}$, il vient

$$\widetilde{R'_{\varepsilon\delta}} = \chi_{\Omega_\varepsilon^*} P_\varepsilon\ R'_{\varepsilon\delta}.\chi_{\Omega_\varepsilon^*} \rightharpoonup .\left|Y_\delta^*\right|\ R'_\delta \quad \textit{faible} * \textit{dans} \quad L^\infty(0,T;L^2(\Omega)),$$

et en vertu de (4.2), on a alors,

$$\left|Y_\delta^*\right|\ R'_\delta = \varphi_\delta, \tag{4.12}$$

et par conséquent, $\varphi_\delta(0) = \left|Y_\delta^*\right|\ R'_\delta(0) = \overline{\varphi_0} = \int_0^1\int_0^1 \varphi_\delta^0\, dz_1 dz_2$, ce qui est la première des conditions initiales de (4.3).

Par ailleurs, on sait que

$$R_\delta \in C\left([0,T];H_0^1(]0,L[)\right) \cap C^1\left([0,T];L^2(]0,L[)\right) \cap C^2\left([0,T];H^{-1}(]0,L[)\right),$$

ce qui, par la Proposition 3.3 implique

$$\varphi'_\delta(0) = \left|Y_\delta^*\right|\ R''_\delta(0) = \frac{\partial}{\partial z_3}\left(q_\delta\,\frac{\partial R_\delta(0)}{\partial z_3}\right) = \frac{\partial}{\partial z_3}\left(q_\delta\,\frac{\partial \tau_\delta}{\partial z_3}\right) = \varphi_\delta^{1,*},$$

i.e., la deuxième condition initiale de (4.3).

Enfin, la combinaison de (4.12) et de $(4.11)_1$, donne l'équation $(4.3)_1$. □

## 5. Contrôlabilité exacte du prolème homogéneisé

**Théorème 5.1** *On suppose que les données initiales de (2.1) vérifient*

$$\begin{cases} \left\|w_{\varepsilon\delta}^0\right\|_{\varepsilon\delta} \leq c\delta^2 & \text{et } \widetilde{w}_{\varepsilon\delta}^0 \rightharpoonup w_\delta^0 \quad \text{faiblement dans } H_0^1(\Omega), \\ \left\|w_{\varepsilon\delta}^1\right\|_{L^2(\Omega_{\varepsilon\delta}^*)} \leq c\delta^2 & \text{et } w_{\varepsilon\delta} \rightharpoonup w_\delta^1 \quad \text{faiblement dans } L^2(\Omega). \end{cases} \tag{5.1}$$

*Soit $v_{\varepsilon\delta}$le contrôle exact donné par H.U.M du système (2.1). Alors, lorsque $\varepsilon$ tend vers zéro, on a la convergence*

$$\widetilde{v}_{\varepsilon\delta} \rightharpoonup v_\delta \quad \text{faiblement dans } L^2(0,T;L^2(\Omega)), \tag{5.2}$$

*où* $v_\delta$ *est le contrôle exact du système homogéneisé*

$$(5.3)\qquad \begin{cases} |Y_\delta^*|\, w_\delta'' - \dfrac{\partial}{\partial z_3}\left(q_\delta \dfrac{\partial w_\delta}{\partial z_3}\right) = v_\delta \quad \text{dans } ]0,L[\times]0,T[, \\ w_\delta\,(0) = w_\delta\,(L) = 0, \\ w_\delta\,(0) = \dfrac{w_\delta^0}{|Y_\delta^*|}, \\ w_\delta'\,(0) = \dfrac{\overline{w}_\delta^1}{|Y_\delta^*|} = \dfrac{1}{|Y_{\varepsilon\delta}^*|}\displaystyle\int_0^1\int_0^1 w_\delta^1\, dz_1 dz_2, \end{cases}$$

*avec* $w_{\varepsilon\delta}$ *défini comme dans le Théorème 3.1, par les convergences*

$$(5.4)\qquad \begin{cases} P_{\varepsilon\delta} w_{\varepsilon\delta} \rightharpoonup w_\delta \quad \textit{faible} * \textit{dans } L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)), \\ P_{\varepsilon\delta} w_{\varepsilon\delta}' \rightharpoonup w_\delta' \quad \textit{faible} * \textit{dans } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)). \end{cases}$$

*Le coefficient* $q_\delta$ et $|Y_\delta^*|$ *sont donnés par (3.6) et (3.5).*

**Démonstration.** D'après le Théorème 4.1, on a $v_\delta = -\varphi_\delta$, où $\varphi_\delta$ est donné par le système (4.3). De même, le Théorème 3.1 et la Remarque 3.2, nous donnent (5.3) et (5.4). Il nous reste à montrer que $v_\delta$ est le contrôle exact du système (5.3), autrement dit, il faut montrer que

$$(5.5)\qquad w_\delta\,(T) = w_\delta'\,(T) = 0.$$

Grâce à (2.21), (5.1) et (4.5), on peut passer à la limite dans le système (2.3) et on a

$$\begin{aligned} P_{\varepsilon\delta}\psi_{\varepsilon\delta} &\rightharpoonup \psi_\delta \quad \textit{faible} * \textit{dans } L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)), \\ P_{\varepsilon\delta}\psi_{\varepsilon\delta}' &\rightharpoonup \psi_\delta' \quad \textit{faible} * \textit{dans } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)). \end{aligned}$$

Un raisonnement analogue à celui de la preuve du Théorème 3.1, donne

$$(5.6)\qquad \begin{cases} |Y_\delta^*|\, \psi_\delta'' - \dfrac{\partial}{\partial z_3}\left(q_\delta \dfrac{\partial \psi_\delta}{\partial z_3}\right) = -\varphi_\delta \quad \text{dans } ]0,L[\times]0,T[, \\ \psi_\delta\,(0) = \psi_\delta\,(L) = 0, \\ \psi_\delta\,(T) = 0 \quad \text{dans } ]0,L[, \\ \psi_\delta'\,(T) = 0 \quad \text{dans } ]0,L[. \end{cases}$$

D'autre part, de (2.22) on a $w_\delta = \psi_\delta$, ce qui entraîne donc (5.5). $\square$

**Remarque 5.2.** Par HUM grâce à (5.3), on peut construire un isomorphisme

$$\begin{aligned}\Lambda\ &: L^2\left(]0,L[\right)\times H^{-1}\left(]0,L[\right)\longrightarrow L^2\left(]0,L[\right)\times H_0^1\left(]0,L[\right)\\ &\left(\varphi_\delta^0,\varphi_\delta^{1,*}\right)\longmapsto\left(\frac{\overline{w}_\delta^1}{|Y_\delta^*|},-\frac{w_\delta^1}{|Y_\delta^*|}\right).\end{aligned}$$

En effet, on multiple $(5.6)_1$ par $\varphi_\delta$, et on refait les mêmes calculs que ceux de la section 2. On obtient

$$\int_0^L\left(\psi_\delta'(0),-\psi_\delta(0)\right)\left(\varphi_\delta^0,\varphi_\delta^{1,*}\right)\,dz_3=\frac{1}{|Y_\delta^*|}\int_0^L\varphi_\delta^2\,dz_3.$$

Alors, si on pose

$$\Lambda_\delta\left(\varphi_\delta^0,\varphi_\delta^{1,*}\right)=\left(\psi_\delta'(0),-\psi_\delta(0)\right),$$

on a

$$\left\langle\Lambda_\delta\left(\varphi_\delta^0,\varphi_\delta^{1,*}\right),\left(\varphi_\delta^0,\varphi_\delta^{1,*}\right)\right\rangle=\frac{1}{|Y_\delta^*|}\int_0^L\varphi_\delta^2\,dz_3=\frac{1}{|Y_\delta^*|}\left\|\varphi_\delta\right\|^2_{L^2(]0,L[)}.$$

D'autre part, une application du Lemme 1.2 donne

$$\left\|\left(\varphi_\delta^0,\varphi_\delta^{1,*}\right)\right\|<|Y_\delta^*|\ \left\|\Lambda_\delta\left(\varphi_\delta^0,\varphi_\delta^{1,*}\right)\right\|_{F'}.$$

De même, on a

$$\left\|\Lambda_\delta\left(\varphi_\delta^0,\varphi_\delta^{1,*}\right)\right\|_{F'}\leq c(\delta)\left\|\left(\varphi_\delta^0,\varphi_\delta^{1,*}\right)\right\|_F,$$

et par conséquent, $\Lambda_\delta$ est un isomorphisme de $L^2\left(0,L\right)\times H^{-1}\left(0,L\right)$ dans $L^2\left(0,L\right)\times H_0^1\left(0,L\right)$. Par con séquent, l'équation

$$\left(\frac{w_\delta^1}{|Y_\delta^*|},-\frac{w_\delta^0}{|Y_\delta^*|}\right)=\Lambda_\delta\left(\varphi_\delta^0,\varphi_\delta^{1,*}\right)=\left(\psi_\delta'(0),-\psi_\delta(0)\right)$$

possède une et une seule solution dans $L^2\left(0,L\right)\times H^{-1}\left(0,L\right)$. Il s'ensuit que toute la suite $(\widetilde{v}_{\varepsilon\delta})$ vérifie la convergence (5.2), et donc toute la suite $(P_\delta w_{\varepsilon\delta})$ converge.

## 6. Résultat de convergence sur l'épaisseur des barres : $\delta\longrightarrow 0$

Le but de ce chapitre est d'étudier le conportement asymptotique de $u_\delta$ et de $v_\delta$ lorsque $\delta$ tend vers zéro. Nous utilisons ici la technique des structures réticulées de [], voir aussi [] pour application à des barres minces.

**Théorème 6.1** *Lorsque $\delta$ tend vers zéro, la solution $u_\delta$ du système homogéneisé (3.4) vérifie*

$$\text{(6.1)} \qquad \begin{cases} \delta^{-2}\overline{u}_\delta^1 \rightharpoonup u^1 & \text{faiblement dans } L^2(]0,L[), \\ \delta^{-2}\overline{u}_\delta^0 \rightharpoonup u^0 & \text{faiblement dans } H_0^1(]0,L[), \end{cases}$$

*et*

$$\text{(6.2)} \qquad \begin{cases} u_\delta \rightharpoonup u & \text{faible} * \text{ dans } L^\infty\left(0,T;H_0^1(]0,L[)\right), \\ u_\delta' \rightharpoonup u' & \text{faible} * \text{ dans } L^\infty\left(0,T;L^2(]0,L[)\right), \end{cases}$$

*où $u$ est solution de*

$$\text{(6.3)} \qquad \begin{cases} 8u'' - q^*\dfrac{\partial^2 u}{\partial z_3^2} = 0 \quad \text{dans } ]0,L[\times]0,T[, \\ u(0) = u(L) = 0, \\ u(0) = \dfrac{u^0}{8} \quad \text{dans } ]0,L[, \\ u'(0) = \dfrac{u^1}{8} \quad \text{dans } ]0,L[, \end{cases}$$

*avec*

$$\text{(6.4)} \qquad q^* = \frac{4\det(a_{ij})}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

**Démonstration.** La démonstration se fait en trois étapes.

**Étape 1**. *Recherche de l'énergie du système homogénéisé.*

On multiplie $(3.4)_1$ par $u_\delta'$, on a

$$\frac{1}{2}\left|Y_\delta^*\right| \int_0^L \int_0^T \frac{d}{dt}\left(u_\delta'\right)^2 \, dtdz_3 + q_\delta \int_0^L \int_0^T \frac{\partial u_\delta}{\partial z_3^2}\frac{\partial u_\delta'}{\partial z_3}\, dtdz_3 = 0,$$

d'où on déduit

$$\frac{1}{2}\left|Y_\delta^*\right| \int_0^L \left(u_\delta'\right)^2\Big|_0^T dz_3 + \frac{1}{2}q_\delta \int_0^L \left(\frac{\partial u_\delta}{\partial z_3}\right)^2\Bigg|_0^T dz_3 = 0.$$

Donc, si on note

$$E_\delta(t) = \frac{1}{2}\Big[\,|Y_\delta^*|\int_0^L (u_\delta')^2\,dz_3 + q_\delta\int_0^L\left(\frac{\partial u_\delta}{\partial z_3}\right)^2 dz_3\Big], \tag{6.5}$$

on a $E_\delta(T) = E_\delta(0)$. Par conséquent,

$$E(0) = \frac{1}{2\,|Y_\delta^*|}\left\|\overline{u}_\delta^1\right\|^2_{L^2(]0,L[)} + \frac{q_\delta}{|Y_\delta^*|^2}\left\|\frac{\partial u_\delta^0}{\partial z_3}\right\|^2_{L^2(]0,L[)}.$$

D'autre part, d'aprés $(3\text{-}1)_2$, on a

$$\left\|\overline{u}_\delta^1\right\|^2_{L^2(]0,L[)} \leq \int_\Omega \left(u_\delta^1\right)^2 dz \leq c\delta^4. \tag{6.6}$$

De même, d'aprés (3.1),

$$\left\|\frac{\partial u_\delta^0}{\partial z_3}\right\|_{L^2(]0,L[)} \leq c\delta^2 \tag{6.7}$$

On a alors l'estimation suivante (voir [1]):

$$c_1 \leq \delta^{-2} q_\delta \leq c_2, \tag{6.8}$$

ce qui implique la convergence

$$\delta^{-2} q_\delta \longrightarrow q^* \tag{6.9}$$

où $q^*$ est donné par (6.4). En remplaçant (6.6), (6.7) et (6.8) dans l'estimation de $E(0)$ ci-dessus, on a $E(0) \leq c\delta^2$, ce qui, combiné avec (6.8), (6.9) et (6.15), donne

$$|Y_\delta^*|\,\|u_\delta'\|^2_{L^2(]0,L[)} + q_\delta\left\|\frac{\partial u_\delta}{\partial z_3}\right\|^2_{L^2(]0,L[)} \leq c\delta^2,$$

et grâce à (6.8), on a

$$\|u_\delta'\|^2_{L^2(]0,L[)} \leq c, \quad \delta^2\left\|\frac{\partial u_\delta}{\partial z_3}\right\|^2_{L^2(]0,L[)} \leq c.$$

Ainsi, on a les estimations a priori

$$\|u_\delta\|_{L^\infty\left(0,T;H_0^1(]0,L[)\right)} \leq c, \quad \|u'_\delta\|_{L^\infty(0,T;L^2(]0,L[))} \leq c,$$

où $c$ est une constante indépendante de $\delta$. On a alors les convergences

$$\begin{aligned} &u_\delta \rightharpoonup u \quad \text{faible} * \text{dans } L^\infty\left(0,T;H_0^1\left(]0,L[\right)\right), \\ &u'_\delta \rightharpoonup u' \quad \text{faible} * \text{dans } L^\infty\left(0,T;L^2\left(]0,L[\right)\right). \end{aligned} \tag{6.10}$$

D'autre part, (6.1) nous permet d'affirmer que

$$\begin{aligned} &\delta^{-2}\,\overline{u}_\delta^1 \rightharpoonup u^1 \quad \text{faiblement dans } L^2\left(]0,L[\right), \\ &\delta^{-2}\,u_\delta^0 \rightharpoonup u^0 \quad \text{faiblement dans } H_0^1\left(]0,L[\right). \end{aligned} \tag{6.11}$$

**Étape 2.** *Recherche de l'équation limite.*

On multiple $(3.4)_1$ par $v\varphi$ tel que $v \in \mathcal{D}\left(]0,T[\right)$ et $\varphi \in \mathcal{D}\left(]0,L[\right)$ avec $v'(T) = v'(0) = 0$, et on intègre par parties par rapport à $t$ et $z_3$, on obtient

$$8(1-\delta)\int_0^L\int_0^T u_\delta v''\varphi\; dtdz_3 + \int_0^L\int_0^T \delta^{-2}q_\delta\frac{\partial u_\delta}{\partial z_3}\frac{\partial\varphi}{\partial z_3}\; v\; dz_3dt = 0.$$

En utilisant les convergences (6.9) et (6.10), on a

$$8\int_0^L\int_0^T u\; v''\varphi\; dtdz_3 + \int_0^L\int_0^T q^*\frac{\partial u}{\partial z_3}\frac{\partial\varphi}{\partial z_3}\; v\; dtdz_3 = 0,$$

où une nouvelle intégration par parties donne la première équation de (6.3).

**Étape 3.** *Recherche des conditions initiales limites.*

Multiplions $(3.4)_1$ par $v\ \varphi$ avec $\varphi \in \mathcal{D}\left(]0,L[\right)$ et $v \in \mathcal{D}\left([0,T]\right)$, tel que $v'(T) = 0$ et $v'(0) = 0$. En intégrant par parties par rapport à $t$ deux fois, et en utilisant ensuite $(3.4)_3$ et $(3.4)_4$, on obtient

$$\begin{aligned} &\int_0^L\int_0^T 8\left(1-\delta\right)u_\delta v''\varphi dz_3dt + \int_0^L 8\left(1-\delta\right)\frac{u_\delta^0}{|Y_\delta^*|}v'(0)\varphi dz_3 \\ &\qquad - \int_0^L 8\left(1-\delta\right)\frac{\overline{u}_\delta^1}{|Y_\delta^*|}v(0)\varphi dz_3 + \int_0^L\int_0^T \delta^{-2}q_\delta\frac{\partial u_\delta}{\partial z_3}\frac{\partial\varphi}{\partial z_3}v dz_3dt = 0, \end{aligned}$$

où on passe à la limite en utilisant les convergences (6.10) et (6.11). On a ainsi

$$\int_0^L \int_0^T 8u''v\varphi \, dtdz_3 + 8\int_0^L uv'|_0^T \varphi \, dz_3 - 8\int_0^L u'v|_0^T \varphi \, dz_3$$
$$+ \int_0^L u^0 v'(0)\varphi \, dz_3 - \int_0^L \varphi u^1 v(0) \, dz_3 - \int_0^L \int_0^T q^* \frac{\partial^2 u}{\partial z_3^2}\varphi \, v \, dtdz_3 = 0.$$

Alors, grâce à $(6.3)_1$, on a

$$v'(0)\int_0^L u^0\varphi \, dz_3 - v(0)\int_0^L \varphi u^1 dz_3 + 8v(0)\int_0^L \varphi u'(0) \, dz_3 - 8v'(0)\int_0^L u(0)\varphi \, dz_3 = 0.$$

En choisissant $v$ tel que $v(0) \neq 0$ et $v'(0) = 0$, on obtient $(6.3)_4$. De la même façon, avec $v$ tel que $v(0) = 0$ et $v'(0) \neq 0$, on a $(6.3)_3$, ce qui achéve la preuve du théorème. □

Dans la suite on s'intéresse à l'étude de la convergence du contrôle $v_\delta$. Comme on a $v_\delta = -\varphi_\delta$, le problème revient à étudier la convergence de $\varphi_\delta$, solution du système (4.3), le même que (3.4) mais avec d'autres conditions initiales. Pour traiter ce cas, nous avons besoin du lemme suivant:

**Lemme 6.2.** *Lorsque* $\left(\overline{\varphi}_\delta^0, \varphi_\delta^{1,*}\right)$ *appartient à* $L^2(]0, L[) \times H^{-1}(]0, L[)$, *la solution de (4.3) vérifie les inégalités*

$$c'\Big[\left\|\overline{\varphi}_\delta^0\right\|^2_{L^2(]0,L[)} + \delta^{-4}\left\|\varphi_\delta^{1,*}\right\|^2_{H^{-1}(]0,L[)}\Big] \leq \|\varphi_\delta\|^2_{L^2(0,T;L^2(]0,L[))}$$
$$\leq c\Big[\left\|\varphi_\delta^0\right\|^2_{L^2(]0,L[)} + \delta^{-4}\left\|\varphi_\delta^{1,*}\right\|^2_{H^{-1}(]0,L[)}\Big],$$

*où $c$ et $c'$sont deux constantes strictement positives et indépendantes de $\delta$.*

**Démonstration.** On commence par régulariser le problème (4.3) comme dans le Théorème 4.1. Introduisons $\tau_\delta$, solution du système

$$\text{(6.12)} \qquad \begin{cases} -\dfrac{\partial}{\partial z_3}\left(q_\delta \dfrac{\partial \tau_\delta}{\partial z_3}\right) = -\varphi_\delta^{1,*} & \text{dans } ]0, L[\,, \\ \tau_\delta(0) = \tau_\delta(L) = 0, \end{cases}$$

et posons

$$R_\delta(z_3, t) = \int_0^t \varphi_\delta(z_3)\, ds + \tau_\delta(z_3)\,.$$

On vérifie sans peine que $R_\delta$ est la solution du problème

$$\text{(6.13)} \qquad \begin{cases} |Y^*_{\varepsilon\delta}|\, R''_\delta - \dfrac{\partial}{\partial z_3}\left(q_\delta \dfrac{\partial R_\delta}{\partial z_3}\right) = 0 \quad \text{dans } ]0, L[\,, \\ R_\delta\,(0) = R_\delta\,(L) = 0, \\ R_\delta\,(0) = \tau_\delta, \\ R'_\delta\,(0) = \overline{\varphi}^0_\delta. \end{cases}$$

On a alors, pour tout $t \in [0, T]$, l'égalité de l'énergie

$$\text{(6.14)} \qquad |Y^*_\delta|\, \|R'_\delta\|^2_{L^2(]0,L[)} + q_\delta \left\| \frac{\partial R_\delta}{\partial z_3} \right\|^2_{L^2(]0,L[)} = |Y^*_\delta|\, \|\overline{\varphi}^0_\delta\|^2_{L^2(]0,L[)} + q_\delta \left\| \frac{\partial \tau_\delta}{\partial z_3} \right\|^2_{L^2(]0,L[)}.$$

Comme $\tau_\delta$ est la solution de (6.12), on a

$$\delta^2 \int_0^L \delta^{-2} q_\delta \left(\frac{\partial \tau_\delta}{\partial z_3}\right)^2 dz_3 = -\left\langle \varphi^{1,*}_\delta, \tau_\delta \right\rangle,$$

où $\langle .,. \rangle$ désigne le produit de dualit é entre $H^{-1}\,(]0, L[)$ et $H^1_0\,(]0, L[)$. On en déduit

$$\delta^2 \int_0^L \delta^{-2} q_\delta \left(\frac{\partial \tau_\delta}{\partial z_3}\right)^2 dz_3 \le \left\| \varphi^{1,*}_\delta \right\|_{H^{-1}(]0,L[)} \|\tau_\delta\|_{H^1_0(]0,L[)}\,.$$

Par l'inégalité de Young , et l'inégalité de Poincaré, il vient

$$\text{(6.15)} \qquad \delta^2 \int_0^L \delta^{-2} q_\delta \left(\frac{\partial \tau_\delta}{\partial z_3}\right)^2 dz_3 \le c_p \Big[\frac{1}{2c} \|\varphi^{1,*}_\delta\|^2_{H^{-1}(]0,L[)} + \frac{c}{2} \left\| \frac{\partial \tau_\delta}{\partial z_3} \right\|_{L^2(]0,L[)^2}\Big].$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} \int_0^L \delta^{-2} q_\delta \left(\frac{\partial \tau_\delta}{\partial z_3}\right)^2 dz_3 &= \int_0^L (q^* + \lambda_\delta) \left(\frac{\partial \tau_\delta}{\partial z_3}\right)^2 dz_3 \\ &\ge \Big[c_2 \Big\| \frac{\partial \tau_\delta}{\partial z_3} \Big\|_{L^2(]0,L[)^2} - \frac{c_2}{2} \Big\| \frac{\partial \tau_\delta}{\partial z_3} \Big\|_{L^2(]0,L[)^2}\Big] = 2c_2 \Big\| \frac{\partial \tau_\delta}{\partial z_3} \Big\|_{L^2(]0,L[)^2}, \end{aligned}$$

car, comme $\delta^{-2} q_\delta \to q^*$, on peut écrire $\delta^{-2} q_\delta = q^* + \lambda_\delta$ avec $q^* > c_2$ et $\lambda_\delta \to 0$, $c_2$ étant une constante strictément positive. Par conséquent, si on choisit $c = (c_2 \delta^2)/(2c_p)$, l'inégalité (6.15) devient

$$\Big\| \frac{\partial \tau_\delta}{\partial z_3} \Big\|_{L^2(]0,L[)^2} \le 4c_p^2 \left\| \varphi^{1,*}_\delta \right\|^2_{H^{-1}(]0,L[)},$$

qui avec (6.14), donne

$$|Y^*_{\varepsilon\delta}|\,\|R'_\delta\|^2_{L^2(]0,L[)} \le c\left[|Y^*_\delta|\,\left\|\overline{\varphi}^0_\delta\right\|^2_{L^2(]0,L[)} + \frac{1}{\delta^2}\left\|\varphi^{1,*}_\delta\right\|^2_{H^{-1}(]0,L[)}\right],$$

et comme on a $R'_\delta = \varphi_\delta$, on obtient

$$\|\varphi_\delta\|^2 \le c\Big(\left\|\varphi^0_\delta\right\|^2 + \delta^{-4}\left\|\varphi^{1,*}_\delta\right\|^2\Big),$$

où $c$ est une constante positive indépendante de $\delta$.

Pour établir l'inégalité inverse, on procède comme dans [6]. On introduit tout d'abord la fonction $\rho$, $\rho : t \longmapsto \rho(t) = t^2(T-t)^2$. On multiplie ensuite $(6.13)_1$ par $P(R_\delta)$ et on intègre par parties sur $]0,L[\times]0,T[$. On trouve

$$\begin{aligned}\int_0^T\int_0^L q_\delta\left(\frac{\partial R_\delta}{\partial z_3}\right)^2\rho(t)\;dz_3dt = &|Y^*_\delta|\Big[\int_0^T\int_0^L\rho(t)\left(R'_\delta\right)^2dz_3dt\\ &+\int_0^T\int_0^L\rho'(t)R_\delta R'_\delta dz_3dt\Big],\end{aligned}\tag{6.16}$$

car $\rho(T)=\rho(0)=0$. Compte tenu de (6.14) (aprés l'avoir multiplié par $\rho(t)$) et de (6.16), on a

$$\begin{aligned}&\Big[|Y^*_\delta|\,\left\|\overline{\varphi}^0_\delta\right\|^2_{L^2(]0,L[)} + q_\delta\left\|\frac{\partial\tau_\delta}{\partial z_3}\right\|^2_{L^2(]0,L[)}\Big]\Big(\int_0^T\rho(t)dt\Big)\\ =&2\,|Y^*_\delta|\int_0^T\int_0^L\rho(t)\left(R'_\delta\right)^2\;dtdz_3 + |Y^*_\delta|\int_0^T\int_0^L\rho'(t)R_\delta R'_\delta\;dtdz_3.\end{aligned}\tag{6.17}$$

Appliquant une inégalité de Young au second terme du membre de droite de (6.17), on obtient pour tout $\xi>0$

$$\int_0^T\int_0^L\rho'(t)R_\delta R'_\delta\;dtdz_3 \le c\xi\int_0^T\int_0^L\rho(t)R^2_\delta\;dtdz_3 + c(\xi)\int_0^T\int_0^L\left(R'_\delta\right)^2\;dtdz_3,\tag{6.18}$$

où l'on a posé

$$c(\xi) = \frac{1}{4\xi}\left\|\frac{\rho'^2}{\rho}\right\|_{L^\infty(]0,T[)} = \frac{T^2}{\xi}\quad\text{ et } c = \frac{1}{2\xi}\left\|\frac{\rho'^2}{\rho}\right\|_{L^\infty(]0,T[)},$$

car

$$\int_0^T\int_0^L \rho'(t)R_\delta R'_\delta\; dtdz_3 \leq \int_0^T\int_0^L \left((\rho'(t))^2\,\frac{R_\delta^2}{2c}+\frac{c}{2}\right)\; dtdz_3$$
$$\leq \int_0^T\int_0^L \left(\frac{\|\rho'^2\|}{\|\rho\|}\rho(t)\frac{R_\delta^2}{2c}+\frac{c}{2}\left(R'_\delta\right)^2\right)\; dtdz_3.$$

D'autre part, en utilisant l'inégalité de Poincaré, on a

$$\int_0^T\int_0^L \rho(t)R_\delta^2\; dtdz_3 \leq c_p^2\int_0^T\int_0^L \rho(t)\left(\frac{\partial R_\delta}{\partial z_3}\right)^2\; dtdz_3. \tag{6.19}$$

Compte tenant de (6.14), on obtient

$$\delta^2\frac{c_2}{2}\left\|\frac{\partial R_\delta}{\partial z_3}\right\|^2_{L^2(]0,L[)} \leq |Y_\delta^*|\left\|\overline{\varphi}_\delta^0\right\|^2 + q_\delta\left\|\frac{\partial \tau_\delta}{\partial z_3}\right\|^2_{L^2(]0,L[)}. \tag{6.20}$$

En reportant (6.20) dans (6.19), on obtient

$$\int_0^T\int_0^L \rho(t)R_\delta^2\; dtdz_3 \leq c_p^2\frac{2}{c_2}\Big[8\left\|\overline{\varphi}_\delta^0\right\|^2+\delta^{-2}q_\delta\left\|\frac{\partial \tau_\delta}{\partial z_3}\right\|^2\Big]\Big(\int_0^T \rho(t)dt\Big) \tag{6.21}$$

Maintenant, en utilisant (6.18) et (6.21) dans (6.17), on trouve

$$\Big(\int_0^T \rho(t)dt\Big)\Big[\,|Y_\delta^*|\left\|\overline{\varphi}_\delta^0\right\|_{L^2(]0,L[)^2} - |Y_\delta^*|\,\frac{2c_p^2}{c_2}8\xi\left\|\overline{\varphi}_\delta^0\right\|^2$$
$$+\, q_\delta\left\|\frac{\partial \tau_\delta}{\partial z_3}\right\|^2 - 8\delta^2\frac{2c_p^2}{c_2}\delta^{-2}q_\delta\xi\left\|\frac{\partial \tau_\delta}{\partial z_3}\right\|^2\Big]$$
$$\leq \Big[2\,|Y_\delta^*|\,\|\rho\|_{L^\infty(]0,T[)} + c(\xi)\,|Y_\delta^*|\Big]\,\|R'_\delta\|_{L^2(0,T;L^2]0,L[)}.$$

Si on choisit $\xi = c_2/(32\left\|\overline{\varphi}_\delta^0\right\|^2)$, et puisque $R' = \varphi_\delta$, on obtient

$$|Y_\delta^*|\left\|\overline{\varphi}_\delta^0\right\|^2 + q_\delta\left\|\frac{\partial \tau_\delta}{\partial z_3}\right\|^2 \leq 2\,|Y_\delta^*|\,[2\,\|\rho\| + c(\xi)]\left(\int_0^T \rho(t)dt\right)\|\varphi_\delta\|^2_{L^2(0,T;L^2]0,L[)},$$

soit encore

$$|Y_\delta^*|\left\|\overline{\varphi}_\delta^0\right\|^2 + q_\delta\left\|\frac{\partial \tau_\delta}{\partial z_3}\right\|^2 \leq c\,|Y_\delta^*|\,\|\varphi_\delta\|^2_{2(0,T;L^2]0,L[)},$$

Par conséquent,

$$\left\|\overline{\varphi}_\delta^0\right\|^2 + \frac{c_2}{8}\left\|\frac{\partial \tau_\delta}{\partial z_3}\right\|^2 \leq c\left\|\varphi_\delta\right\|^2. \tag{6.22}$$

D'autre part, de la formulation variationnelle de (6.12), on trouve

$$\left|\left\langle \varphi_\delta^{1,*}, u\right\rangle\right| \leq c\delta^2 \left\|\frac{\partial \tau_\delta}{\partial z_3}\right\| \left\|\frac{\partial u}{\partial z_3}\right\| < c'\delta^2 \left\|\frac{\partial \tau_\delta}{\partial z_3}\right\| \|u\|_{H_0^1(]0,T[)}.$$

Alors

$$\left\|\varphi_\delta^{1,*}\right\|_{H^{-1}(]0,T[)} \leq c\delta^2 \left\|\frac{\partial \tau_\delta}{\partial z_3}\right\|,$$

ce qui reporté dans (6.22), donne

$$c'\left(\left\|\varphi_\delta^0\right\|^2 + \delta^{-4}\left\|\varphi_\delta^{1,*}\right\|^2\right) \leq \left\|\varphi_\delta\right\|^2.$$

La preuve du lemme est complète. □

**Théorème 6.3.** *Lorsque $\delta$ tend vers zéro, la solution $\varphi_\delta$ du problème (4.3) vérifie*

$$\begin{cases} \delta^{-2}\overline{\varphi}_\delta^0 \rightharpoonup \varphi^0 & \text{faiblement dans } L^2(]0,L[), \\ \delta^{-2}\varphi_\delta^{1,*} \rightharpoonup \varphi^{1,*} & \text{faible} * \text{dans } H^{-1}(]0,L[), \end{cases} \tag{6.23}$$

*et*

$$\delta^{-2}\varphi_\delta \rightharpoonup \varphi \quad \text{faiblement dans } L^2(]0,L[\times]0,T[), \tag{6.24}$$

*où $\varphi$ est solution de*

$$\begin{cases} 8\varphi'' - q^*\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial z_3} = 0 & \text{dans } ]0,L[\times]0,T[, \\ \varphi(0) = 0, \\ \varphi(0) = \varphi(L) = \varphi^0, \\ \varphi'(0) = \varphi^{1,*}, \end{cases} \tag{6.25}$$

*avec $q^*$ donné par (6.4).*

**Démonstration.** Grâce à la Remarque 5.2 ainsi qu'à (6.11) et (6.12), on a

$$\left\| \left( \varphi_\delta^0, \varphi_\delta^{1,*} \right) \right\| \leq c \left| Y_\delta^* \right| \left\| \Lambda \left( \varphi_\delta^0, \varphi_\delta^{1,*} \right) \right\|_{F'},$$

et donc

$$\left\| \left( \varphi_\delta^0, \varphi_\delta^{1,*} \right) \right\| \leq c\delta^2 \left( \frac{\left\| w_\delta^1 \right\|}{\left| Y_\delta^* \right|}, -\frac{\left\| w_\delta^0 \right\|}{\left| Y_\delta^* \right|} \right) \leq c\delta^2.$$

Ceci reporté dans le Lemme 6.2, conduit à des estimations à priori plus précises, notamment

$$\begin{aligned} \left\| \varphi_\delta^0 \right\|^2 + \delta^{-4} \left\| \varphi_\delta^{1,*} \right\|^2 &\leq \left| Y_\delta^* \right| \left\langle \Lambda_\delta \left( \varphi_\delta^0, \varphi_\delta^{1,*} \right), \left( \varphi_\delta^0, \varphi_\delta^{1,*} \right) \right\rangle \\ &= \left| Y_\delta^* \right| \left\| \Lambda_\delta \left( \varphi_\delta^0, \varphi_\delta^{1,*} \right) \right\|_{F'} \left\| \left( \varphi_\delta^0, \varphi_\delta^{1,*} \right) \right\|_F \leq c' \delta^4, \end{aligned}$$

ce qui implique

$$\left\| \varphi_\delta^0 \right\|^2 \leq c' \delta^4, \qquad \left\| \varphi_\delta^{1,*} \right\|^2 \leq c' \delta^8.$$

Par conséquent,

$$\left\| \varphi_\delta \right\|^2 \leq c \left\| \varphi_\delta^0 \right\|_{L^2(]0,L[)}^2 + c\, \delta^{-4} \left\| \varphi_\delta^{1,*} \right\|_{H^{-1}(]0,L[)}^2,$$

d'où

$$\left\| \varphi_\delta \right\|^2 \leq c\delta^2.$$

Pour résumer, nous avons les estimations suivantes:

$$\left\| \delta^{-2} \varphi_\delta^0 \right\|_{L^2(]0,L[)} \leq c, \quad \left\| \delta^{-4} \varphi_\delta^{1,*} \right\|_{H^{-1}(]0,L[)} \leq c, \quad \left\| \delta^{-2} \varphi_\delta \right\|_{L^2(]0,L[\times]0,T[)} \leq c, \tag{6.26}$$

qui impliquent, qu'à une soustraction d'un sous-suite près on a (6.23) et (6.24).

Puisque les données initiales sont peu régulières, on ne peut pas faire tendre $\delta$ vers zéro directement dans le système (4.3), nous allons donc procéder comme dans la preuve du Théorème 4.1. Introduisons la fonction

$$R_\delta (z, t) = \int_0^t \varphi_\delta (z_3, s)\, ds + \tau_\delta (z_3),$$

où $\tau_\delta$ est la solution de

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial}{\partial z_3}\left(q_\delta \dfrac{\partial \tau_\delta}{\partial z_3}\right) = -\varphi_\delta^{1,*} \quad \text{dans } ]0,L[, \\ \tau_\delta(0) = \tau_\delta(L) = 0. \end{cases}$$

On vérifie ensuite sans peine que $R_\delta$ est la solution de

$$\begin{cases} \left|Y_{\varepsilon\delta}^*\right| R_\delta'' - \dfrac{\partial}{\partial z_3}\left(q_\delta \dfrac{\partial R_\delta}{\partial z_3}\right) = 0 \quad \text{dans } ]0,L[, \\ R_\delta(0) = R_\delta(L) = 0, \\ R_\delta(0) = \tau_\delta \text{ dans } ]0,L[, \\ R_\delta'(0) = \overline{\varphi}_\delta^0 \quad \text{dans } ]0,L[. \end{cases} \tag{6.27}$$

D'après (6.26), on a alors

$$\|\tau_\delta\|_{H^1(]0,L[)} \leq c\delta^2,$$

avec $c$ une constante indépendante de $\delta$. Donc

$$\delta^{-2}\tau_\delta \rightharpoonup \tau \quad \text{faiblement dans } H^1(]0,L[). \tag{6.28}$$

Alors (6.27) et (6.28) donnent

$$\|R_\delta\|_{H^1(]0,L[)} \leq c\delta^4, \quad \|R_\delta'\|_{L^2(]0,L[)} \leq c\delta^4,$$

et alors on a les convergences

$$\begin{cases} \delta^{-2} R_\delta \rightharpoonup R \quad \text{faible } * \text{ dans } L^\infty\left(0,T;H^1(]0,L[)\right), \\ \delta^{-2} R_\delta' \rightharpoonup R' \quad \text{faible} * \text{ dans } L^\infty\left(0,T;L^2(]0,L[)\right). \end{cases} \tag{6.29}$$

D'autre part, passant à la limite dans la première équation de (6.27), i.e., dans

$$8(1-\delta)\delta^{-2}R_\delta'' - \delta^2 \frac{\partial}{\partial z_3}\left(\delta^{-2} q_\delta \frac{\partial R_\delta}{\partial z_3}\right) = 0,$$

et en faisant les mêmes calculs que ceux de la démonstration du Théorème 6.1, on trouve le système

$$\begin{cases} 8R'' - q^* \dfrac{\partial R}{\partial z_3} = 0 \quad \text{dans } ]0, L[\times ]0, T[\,, \\ R(0) = R(L) = 0, \\ R(0) = \tau \quad \text{dans } ]0, L[, \\ R'(0) = \varphi^0 \quad \text{dans } ]0, L[, \end{cases}$$

où $\tau$ est la solution de

$$\begin{cases} -q^* \dfrac{\partial^2 \tau}{\partial z_3^2} = -\varphi^{1,*} \quad \text{dans } ]0, L[ \\ \tau(0) = \tau(L) = 0 \end{cases}$$

Puisque $R'_\delta = \varphi_\delta$, (6.29) et (6.24) donnent $\varphi = R'$. Par ailleurs, comme

$$R \in C\left([0,T]; H_0^1(]0,L[)\right) \cap C^1\left([0,T]; L^2(]0,L[)\right) \cap C^2\left([0,T]; H^{-1}(]0,L[)\right),$$

on a bien le système (6.25), et ceci achève la preuve du théorème. □

Maintenant revenons à l'étude du système homogeneisé (5.3).

**Théorème 6.4.** *Lorsque $\delta$ tend vers zéro, on a*

$$\text{(6.30)} \qquad \begin{cases} \delta^{-2} w_\delta^0 \rightharpoonup w^0 \quad \textit{faiblement dans } H_0^1(]0,L[), \\ \delta^{-2} \overline{w}_\delta^1 \rightharpoonup w^1 \quad \textit{faiblement dans } L^2(]0,L[), \end{cases}$$

*et*

$$\text{(6.31)} \qquad \begin{cases} w_\delta \rightharpoonup w \quad \textit{faible} * \textit{dans } L^\infty\left(0,T; H_0^1(]0,L[)\right), \\ \overline{w}'_\delta \rightharpoonup w' \quad \textit{faible} * \textit{dans } L^\infty\left(0,T; L^2(]0,L[)\right), \end{cases}$$

*avec*

$$\delta^{-2} v_\delta \rightharpoonup v \quad \textit{faiblement dans } L^2\left(0,T; L^2(]0,L[)\right),$$

*où $v$ est le contrôle exact du système limite*

$$\text{(6.32)} \qquad \begin{cases} 8w'' - \dfrac{4\det(a_{ij})}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \dfrac{\partial^2 w}{\partial z_3^2} = v \quad \textit{dans } ]0,L[\times]0,T[\,, \\ w(0) = w(L) = 0, \\ w(0) = \dfrac{w^0}{8} \quad \textit{dans } ]0,L[, \\ w'(0) = \dfrac{w^1}{8} \quad \textit{dans } ]0,L[. \end{cases}$$

**Démonstration.** En utilisant les Théorèmes 6.1 et 6.3, on voit qu'il nous reste à montrer seulement que $v$ est le contrôle exact de (6.32), i.e.,

$$w(T) = w'(T) = 0. \tag{6.33}$$

On multiplie $(5.6)_1$ par $\delta^{-2}$, puis grâce à (6.30) et (6.26), on a

$$\begin{cases} \psi_\delta \rightharpoonup \psi & \text{faible}* \text{ dans } L^\infty\left(0,T;H_0^1(]0,L[)\right), \\ \overline{\psi}'_\delta \rightharpoonup \psi' & \text{faible}* \text{ dans } L^\infty\left(0,T;L^2(]0,L[)\right). \end{cases} \tag{6.34}$$

On peut donc passer à la limite dans (5.6) de la même façon que dans la preuve du Théorème 6.1. On obtient ainsi

$$\begin{cases} 8\psi'' - q^* \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial z_3^2} = -\varphi & \text{dans } ]0,L[\times]0,T[, \\ \psi(0) = \psi(L) = 0, \\ \psi(T) = 0 & \text{dans } ]0,L[, \\ \psi'(T) = 0 & \text{dans } ]0,L[, \end{cases}$$

où $\varphi$ est donné par (6.24). Par ailleurs, (6.34) et (5.7) impliquent que l'on a $w = \psi$. Comme $\psi(T) = \psi'(T) = 0$, on a (6.33). $\square$

**Remarque 6.5.** En appliquant HUM au système (6.32), on construit l'isomorphisme

$$\begin{cases} \Lambda : L^2(]0,L[) \times H^{-1}(]0,L[) \longrightarrow L^2(]0,L[) \times H_0^1(]0,L[), \\ \left(\varphi^0, \varphi^{1,*}\right) \longmapsto \Lambda\left(\varphi^0, \varphi^{1,*}\right) = \left(\dfrac{w^1}{8}, -\dfrac{w^0}{8}\right). \end{cases}$$

et donc de déterminer $v$ de façon unique. Alors toute la suite $(v_\delta)$ converge vers $v$, et toute le suite $(w_\delta)$ converge vers $w$.

## Bibliographie

[1] N. Benabbas, Thése de magistère (1990) Homogénéisation de structures périodiques à parois minces et élancées. Université Pierre et Marie Curie.

[2] A. Bensousssan, J.L. Lions, G. Papanicolau, *Asymptotic analysis for periodic structures*, North-Holland (Amsterdam) 1978.

[3] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle, théorie et applications.* Masson (Paris) 1987.

[4] D. Cioranescu, J.Saint Jean Paulin, Homogenization in open sets with holes. J. Math. Anal.Appl., 71 (1979), 590-607.

[5] D. Cioranescu, P.Donato, Exact internal controllability in perforated domains, J. Math. Pures et Appl., 68 (1989), 185-213.

[6] D. Cioranescu, M. Vanninathan, Exact controllability in thin perforated domains. dans Équations aux dérivées partielles et applications. Articles dédiés à Jacques-Louis Lions, Gauthier-Villars, 1998, 383-412.

[7] D. Cioranescu, J. Saint Jean Paulin. *Homogenization of Reticulated Structures.* Applied Mathematical Sciences 136, Springer–Verlag (New York) 1999.

[8] D. Cioranescu, P. Donato. *An Introduction to Homogenization.* Oxford Lecture Series in Mathematics ans its Applications 17, Oxford University Press, 1999.

[9] A.Haraux, *Semi-linear hyperbolic problems in bounded domains.* Mathematical Reports, edited by J. Dieudonné. Hardwood Academic Publishers 1987.

[10] J.L.Lions, *Contrôlabilité exacte. Perturbations et stabilisation des systèmes distribyués.* Tomes 1 et 2. Masson (Paris) 1988.

[11] F.Murat, Compacité par compensation, Annali Scuola Norm. Sup. Pisa, 5 (1978), 489-507.

[12] J. Saint Jean Paulin, L. R. Tcheugoué Tébou, Contrôlabilité exacte interne dans des domaines perforés avec une condition aux limites de Fourier sur le bord des trous, Asympt. Analysis, 14 (1997), 193- 221.

[13] L. R. Tcheugoué Tébou, Étude de quelques problèmes de contrôlabilité exacte et stabilisation dépendant ou non de petits param‘etres, Thése de Doctorat (1995), Université de Metz.