Solutions anti-périodiques multiples de $x'' + cx' + g(x) = \varepsilon f(t)$

S. Gasmi*

Résumé : A la suite d'un travail de P. Souplet présentant un exemple qui montre la non-unicité des solutions anti-périodiques d'une équation scalaire du second ordre, on prouve l'existence de 4 solutions anti-périodiques de l'équation $x'' + cx' + \alpha x + \beta x^3 = \varepsilon f(t)$ pour une fonction f bien détérminée (c et $\varepsilon > 0$; $\alpha \geq 0$ et $\beta > 0$)et en utilisant la méthode d'un article de W.S. Loud. Puis on donne des conditions concrétes d'existence de 3 ou 4 solutions périodiques de la même équation. Dans les 2 cas f peut être prise analytique.

Abstract : Following a work of P. Souplet which presents an example showing the nonuniqueness of antiperiodic solutions of a second order ordinary equation, we show, using a method of W.S. Loud the existence of 4 antiperiodic solutions of the equation $x'' + cx' + \alpha x + \beta x^3 = \varepsilon f(t)$ for a function f. Then we give concrete conditions for the existence of 3 or 4 periodic solutions of the same equation. In both cases f can be chosen analytic.

1 Introduction

Le problème de l'existence et du nombre des solutions périodiques d'équations différentielles du second ordre a été le sujet de nombreux travaux dans la littérature (cf.[7], [4], [11], [15], [3]). Loud [9] a cherché des solutions périodiques de l'équation différentielle

$$x'' + cx' + g(x) = \varepsilon f(t) \tag{1.1}$$

près de solutions périodiques non constantes de

$$x'' + g(x) = 0 \tag{1.2}$$

*Laboratoire J.-L. Lions, Université Pierre et Marie Curie, boîte courrier 187, 75252 Paris Cedex 05, FRANCE.

en utilisant une méthode assez technique. Il en a déduit l'existence d'un nombre assez grand de solutions périodiques de (1.1).
Bahri et Berestycki [2] ont étudié les solutions périodiques des systèmes hamiltoniens et ont montré en particulier que l'équation

$$x'' + g(x) = f(t) \tag{1.3}$$

admet une infinité de solutions périodiques si f est périodique et sous certaines conditions sur g notamment la sur-linéarité à l'∞.
Pour la même équation et sous des conditions du même type, Ding [5] a montré que si f est périodique paire ou impaire toutes les solutions de cette equation sont bornées.
Ces travaux posent la question de savoir si une équation

$$x'' + cx' + g(x) = f(t)$$

peut avoir un nombre infini de solutions périodiques, et on peut se poser la même question pour les solutions anti-périodiques de cette équation quand f est anti-périodique.

On rappelle qu'une fonction continue f est dite λ-anti-périodique si elle vérifie

$$\forall\, t \in \mathbb{R}\,, \quad f(t+\lambda) = -f(t) \tag{1.4}$$

On dit alors que λ est une anti-période de f et on a les propriétés suivantes :
• Tout multiple impair de λ est alors une anti-période de f.
• Tout multiple pair de λ est une période de f.
• Si $f \not\equiv 0$, il existe alors un plus petit λ_0 vérifiant (1.4) ; ce nombre est par définition l'anti-période minimale de f.
• L'ensemble des anti-périodes de f est l'ensemble des multiples impairs de λ_0.

Concernant les solutions anti-périodiques, à la suite d'un travail d'Okochi [13] sur les problèmes d'évolution monotones non linéaires, Haraux [8] a prouvé l'existence de solutions anti-périodiques pour des équations d'évolution non linéaires et notamment pour l'équation différentielle ordinaire de second ordre

$$x'' + cx' + g(x) = f(t)$$

où g est une fonction $C^1(\mathbb{R})$ impaire et f une fonction anti-périodique.

Ensuite Beaulieu [1] a étudié le problème de l'unicité où elle a montré, dans le cas d'un système gradient, que les solutions anti-périodiques de normes suffisamment petites sont uniques. Souplet [14] a étudié l'unicité sous des hypothèses plus faibles et il a aussi donné un exemple de non-unicité des solutions anti-périodiques pour l'équation scalaire du second ordre en exhibant d'une fonction f anti-périodique de classe C^∞ pour laquelle l'équation

$$x'' + x' + x^3 = f$$

admet 2 solutions anti-périodiques distinctes.

Il est naturel de se demander si la méthode de [9] ne permettrait pas d'améliorer les résultats de [14].

Dans ce travail on adapte le travail de Loud et on obtient un résultat similaire pour les solutions anti-périodiques de l'équation (1.1) avec f anti-périodique d'anti-période minimale λ et g impaire de classe $C^2(\mathbb{R})$.

Ce papier se décompose en 7 parties. Dans le deuxième paragraphe on rappelle quelques propriétés de l'équation différentielle (1.2). Le théorème principal est enoncé dans le troisième paragraphe, il présente un résultat d'existence d'une solution anti-périodique de (1.1) prés d'une solution anti-périodique x_0 de (1.2). La démonstration de ce théorème donnée dans le paragraphe 5 nécessite un résultat d'existence de solution anti-périodique de $x'' + g(x) = \varepsilon f(t)$ prés de x_0 présenté et démontré dans le paragraphe 4. Le paragraphe 6 est consacré à l'étude d'une application du théorème principal où on se donne une fonction f bien détérminée pour laquelle l'équation (1.1) admet au moins 3 solutions anti-périodiques pour $g(x) = \alpha x + \beta x^3$ et de même pour le paragraphe 7 où la fonction f sera un peu plus générale. Enfin dans le paragraphe 8 on utilise l'idée du paragraphe 6 pour donner des conditions concrétes d'existence de 3 ou 4 solutions périodiques en utilisant les résultats abstraits de Loud [9].

2 L'équation $x'' + g(x) = 0$

Dans ce paragraphe on rappelle quelques propriétés de l'équation différentielle :

$$x'' + g(x) = 0 \tag{2.1}$$

On suppose ici que g est une fonction $C^2(\mathbb{R})$, non linéaire, impaire telle que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}\,,\ xg(x) \geq 0$$

et $g^{-1}(0) = [-a, +a]$ avec $a \geq 0$.

Dans ce cas, toute solution de (2.1) est anti-périodique en t et le support géométrique de la trajectoire dans le plan des phases de coordonnées x et

$y = x'$ est la courbe fermée d'équation

$$\frac{y^2}{2} + G(x) = const := E$$

où

$$G(x) = \int_0^x g(u)du$$

Si $E = G(0)$, la solution $x(t)$ est une constante de I $(= g^{-1}(0))$.
Si $E > G(0)$ alors $x(t)$ est anti-périodique non constante et l'anti-période minimale de cette solution est donnée par

$$\tau(A) = \sqrt{2} \int_0^A \frac{dx}{\sqrt{E - G(x)}}, \quad E = G(A) \tag{2.2}$$

où $A = \max(x(t))$ est l'amplitude de la solution.

Proposition 2.1. *Si $\tau(A)$ est l'anti-période de la solution de (2.1) d'amplitude positive A, alors τ est dérivable par rapport à A et*

$$\tau'(A) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{E}}(1 - \frac{\sqrt{E}}{2} \int_0^A \frac{g(A) - g(x)}{(E - G(x))^{\frac{3}{2}}} dx)$$

Dans le cas où $g^{-1}(0) = 0$, et si $g(x)$ est monotone dans un voisinage de $x = 0$, on a aussi

$$\tau'(A) = -\frac{\sqrt{2}g(A)}{E} \int_0^A (\frac{G(x)g'(x)}{g^2(x)} - \frac{1}{2}) \frac{dx}{\sqrt{E - G(x)}}$$

Preuve : le calcul est celui de Loud [9, Remark, p.4].

Corollaire 2.2. *On peut voir facilement que si g est impaire et strictement convexe sur $[0, B)$, $B > 0$ avec $g'(0) > 0$ alors $\tau'(A) < 0$ pour tout $A \in (0, B)$.*

3 L'équation $x'' + cx' + g(x) = \varepsilon f(t)$: Théorème principal

Soient $f(t)$ une fonction continue et anti-périodique d'anti-période minimale λ, $x_0(t)$ une solution anti-périodique de $x'' + g(x) = 0$ d'anti-période minimale τ_0 de la forme $\tau_0 = \frac{2p+1}{2q+1}\lambda$, p, q dans $\mathbb{N}$. On suppose de plus que $x_0'(0) = 0$ et que $x_0(0) = A > 0$.
Soit τ le plus petit multiple commun impair de λ et de τ_0.
Le résulat suivant montre que sous certaines conditions il existe une solution anti-périodique de l'équation

$$x'' + cx' + g(x) = \varepsilon f(t)$$

d'anti-période minimale τ pour des petites valeurs de ε et de c qui se réduit à $x_0(t)$ pour $\varepsilon = 0$ et $c = 0$.

Théorème 3.1. *Soient f une fonction continue et anti-périodique d'anti-période minimale λ et $g \in C^2(\mathbb{R})$ impaire vérifiant : $\forall\ x \in \mathbb{R}\ xg(x) \geq 0$ et $g^{-1}(0) = [-a, +a]$ avec $a \geq 0$.*
Pour tout $c \in \mathbb{R}$, on considère l'équation

$$x'' + cx' + g(x) = \varepsilon f(t) \tag{3.1}$$

On fixe une solution x_0 de (2.1) avec $x_0'(0) = 0$ et $x_0(0) = A > 0$ et on suppose que les conditions suivantes sont vérifiées :

$$\tau'(A) \neq 0, \tag{3.2}$$

$$\int_0^\tau x_0'(t) f(t) dt = 0 \tag{3.3}$$

et

$$\int_0^\tau x_0''(t) f(t) dt \neq 0 \tag{3.4}$$

Alors il existe ε_0, $\gamma > 0$ et une fonction $\delta(\varepsilon)$:$[0, \varepsilon_0] \mapsto \mathbb{R}^+$ telle que $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \delta(\varepsilon) = 0$ et pour $|c| < \delta(\varepsilon)$ ($\varepsilon < \varepsilon_0$ fixé) l'équation (4.1) admet une solution anti-périodique $x_{\varepsilon,c}$ d'anti-période minimale τ avec

$$\forall\, \varepsilon < \varepsilon_0\,,\ \forall\, c \in]-\delta(\varepsilon), \delta(\varepsilon)[\,,\ \ |x_{\varepsilon,c} - x_0| \leq \gamma\varepsilon.$$

Le théorème 3.1 constitue une variante anti-périodique d'un résultat prouvé par Loud [9] dans le cas f T-périodique. Il a cherché l'existence de solutions périodiques de l'équation

$$x'' + cx' + g(x) = \varepsilon f(t)$$

prés d'une solution périodique x_0 (de période commensurable à T) de l'équation

$$x'' + g(x) = 0.$$

Pour aboutir à ce résultat, Loud a procédé par étapes. En effet, il a commencé par traiter le cas où $c = 0$ et il a prouvé l'existence d'une solution périodique x_ε près de x_0 . Ensuite il est passé au cas de l'équation avec amortissement pour prouver cette fois ci l'existence d'une solution périodique prés de x_ε. Pour prouver le théorème 3.1, on utilisera la même démarche.

4 Le cas sans dissipation

Dans ce paragraphe, on considère l'équation sans amortissement

$$x'' + g(x) = \varepsilon f(t) \tag{4.1}$$

Proposition 4.1. *Supposons que toutes les hypothèses du théorème* 3.1 *sont satisfaites.*
Il existe ε_0 et $\gamma > 0$ tels que, pour tout $\varepsilon < \varepsilon_0$ avec ε fixé, l'équation (4.1) admette une solution anti-périodique x_ε d'anti-période minimale τ et vérifiant $||x_\varepsilon - x_0||_{C^1(\mathbb{R})} \leq \gamma\varepsilon$.

Plus précisément, l'équation $y'' + g'(x_0(t))y = f(t)$ possède une unique solution h_1 τ-anti-périodique telle que $h_1'(0) = 0$ et on a

$$x_\varepsilon(t) = x_0(t) + \varepsilon(h_1(t) - \frac{\int_0^\tau f(s)h_1'(s)ds}{\int_0^\tau f(s)x_0''(s)ds}x_0'(t)) + o(\varepsilon) \tag{4.2}$$

Preuve On va commencer par établir l'existence et l'unicité de h_1.
$p(t) := x_0'(t)$ est une solution τ_0-anti-périodique de l'équation

$$y'' + g'(x_0(t))y = 0 \tag{4.3}$$

Soit $q(t)$ la deuxième solution de cette équation vérifiant $pq' - p'q = 1$ et $q'(0) = 0$ ($pq' - p'q$ est le wronskien de p et q) .

On vérifie aisément que $q(t) = Ktp(t) + r(t)$ avec $K = -\frac{\tau'(A)}{\tau_0 g(A)}$ et $r(t)$ τ_0-anti-périodique.

Puisque $K \neq 0$, $p(t)$ et ses multiples sont les seules solutions anti-périodiques de (4.3). Ainsi l'équation

$$y'' + g'(x_0(t))y = f(t) \tag{4.4}$$

admet une solution τ-anti-périodique y puisque $\int_0^\tau p(t)f(t)dt = 0$.
D'autre part, par la formule de variation de la constante, toute solution y de (4.4) est de la forme

$$y(t) = Cp(t) + C'q(t) + \int_0^t (p(s)q(t) - p(t)q(s))f(s)ds.$$

Puisque $p(0) = 0$, $p(\tau) = 0$, $q(0) = \frac{1}{g(A)}$ et $q(\tau) = \frac{1}{g(A)}$, on a

$$\forall\ C \text{ et } C', \quad y(0) = -y(\tau).$$

Cherchons C et C' tels que h_1 solution de (4.4) vérifie $h_1'(0) = -h_1'(\tau) = 0$ sachant que $p'(0) = -g(A)$, $p'(\tau) = g(A)$, $q'(0) = 0$ et que $q'(\tau) = K\tau g(A)$. On a alors le système

$$\begin{cases} -Cp'(0) = 0 \\ Cp'(\tau) + C'q'(\tau) = p'(\tau)\int_0^\tau q(s)f(s)ds \end{cases}$$

il est clair alors que $C = 0$ et que $C' = \frac{1}{K\tau}\int_0^\tau q(s)f(s)ds$ ce qui assure l'existence et l'unicité de h_1. On a plus perécisément

$$h_1(t) = \frac{q(t)}{K\tau}\int_0^\tau q(s)f(s)ds + \int_0^t (p(s)q(t) - p(t)q(s))f(s)ds.$$

Soit $x(t, \xi, \eta, \varepsilon)$ la solution de (4.1) vérifiant

$$x(0) = A + \xi \ \ et \ \ x'(0) = \eta$$

On veut trouver ξ et η comme fonctions de ε telles que $x(t, \xi, \eta, \varepsilon)$ soit τ anti-périodique. et pour celà, on va utiliser le théorème des fonctions implicites. Soient $F(\xi, \eta, \varepsilon)$ et $G(\xi, \eta, \varepsilon)$ définies par :

$$F(\xi, \eta, \varepsilon) = x(\tau, \xi, \eta, \varepsilon) + x(0, \xi, \eta, \varepsilon) = x(\tau, \xi, \eta, \varepsilon) + A + \xi$$

$$G(\xi,\eta,\varepsilon) = x'(\tau,\xi,\eta,\varepsilon) + x'(0,\xi,\eta,\varepsilon) = x(\tau,\xi,\eta,\varepsilon) + \eta$$

La condition d'anti-périodicité est équivalente à :

$$F(\xi,\eta,\varepsilon) = G(\xi,\eta,\varepsilon) = 0$$

On note que $F(0,0,0) = G(0,0,0) = 0$ puisque $x_0(t)$ est τ-antipériodique et $x'(0) = 0$.
Pour le reste de la preuve, il est nécessaire d'évaluer les dérivées partielles premières de F et G en $(0,0,0)$ et les dérivées partielles secondes de F en $(0,0,0)$. Pour cela, on enonce le résultat préliminaire suivant qu'on établit facilement en reprenant le calcul de Loud [9, preuve du lemme 1, p.18].

Lemme 4.2. *Soient B_1, B_2, B_3 et B_4 définies par*

$$B_1 = \int_0^\tau q(s)f(s)ds \quad B_2 = \int_0^\tau q'(s)f(s)ds$$

$$B_3 = \int_0^\tau p'(s)f(s)ds \quad B_4 = \int_0^\tau h_1'(s)f(s)ds$$

Alors en $(0,0,0)$ les dérivées partielles premières de $F(\xi,\eta,\varepsilon)$ et de $G(\xi,\eta,\varepsilon)$ et les dérivées partielles secondes de $F(\xi,\eta,\varepsilon)$ ont les valeurs suivantes :

$$\begin{array}{lll}
F_\xi = 0; & F_\eta = 0; & F_\varepsilon = 0; \\
G_\xi = K\tau g(A)^2; & G_\eta = 0; & G_\varepsilon = -B_1 g(A)^2; \\
F_{\xi\xi} = K^2\tau^2 g(A)^3; & F_{\xi\eta} = -K\tau g(A); & F_{\eta\eta} = 0; \\
F_{\xi\varepsilon} = -B_2 - K\tau B_1 g(A)^2; & F_{\xi\varepsilon} = B_1 + \frac{B_3}{g(A)^2}; & F_{\varepsilon\varepsilon} = -B_1^2 g(A) \\
 & & \quad + \frac{2B_1B_2}{K\tau g(A)} - \frac{2B_4}{g(A)}
\end{array} \tag{4.5}$$

Puisque $G_\xi(0,0,0) \neq 0$, comme dans [9], l'idée est de resoudre l'équation $G(\xi,\eta,\varepsilon) = 0$ pour ξ comme fonction de η et ε : $\xi = H(\eta,\varepsilon)$. D'après (4.5) on a en $(0,0)$:

$$H = 0; \;\; H_\eta = 0; \;\; H_\varepsilon = \frac{B_1}{K\tau g(A)} \tag{4.6}$$

Si on définit $J(\eta,\varepsilon)$ par

$$J(\eta,\varepsilon) = F(H(\eta,\varepsilon),\eta,\varepsilon),$$

le problème est réduit à résoudre l'équation $J(\eta,\varepsilon) = 0$ pour η comme fonction de ε. ξ est alors trouvée en fonction de ε par la relation $\xi = H(\eta(\varepsilon),\varepsilon)$.

Par des manipulations élémentaires des dérivées partielles données dans (4.5) et (4.6) on trouve en $(0,0)$

$$J = 0; \quad J_\eta = 0; \quad J_\varepsilon = 0$$

$$J_{\eta\eta} = 0; \quad J_{\eta\varepsilon} = \tfrac{B_3}{g(A)^2}; \quad J_{\varepsilon\varepsilon} = -\tfrac{2B_4}{g(A)}$$

En appliquant un théorème des fonctions implicites singulier adapté à cette situation ([6] page 101), on conclut qu'il existe une unique fonction $\eta(\varepsilon)$ satisfaisant $J(\eta(\varepsilon),\varepsilon) = 0$, et telle que pour $\varepsilon = 0$

$$\eta = 0 \quad et \quad \frac{d\eta}{d\varepsilon} = \frac{B_4 g(A)}{B_3}$$

$B_3 \neq 0$ correspond à l'hypothèse $\int_0^\tau x_0''(t)f(t)dt \neq 0$.

En utilisant $H(\eta,\varepsilon)$ on peut trouver ξ en fonction de ε pour ε prés de 0. On trouve pour $\varepsilon = 0$

$$\xi = 0 \quad et \quad \frac{d\xi}{d\varepsilon} = \frac{B_1}{K\tau g(A)}$$

La discussion précédente achève la solution des équations $F(\xi,\eta,\varepsilon) = G(\xi,\eta,\varepsilon) = 0$ pour ξ et η en fonction de ε pour ε prés de 0 et ceci prouve l'existence d'une solution anti-périodique pour ε petit.
Pour obtenir (4.2) on écrit

$$x(t) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + o(\varepsilon),$$

et par la méthode de [9, preuve du théorème 5, p.17] on obtient :

$$x_1(t) = h_1(t) + Cx_0'(t), \quad C = -\frac{B_4}{B_3}$$

5 Le cas général : preuve du théorème 3.1

Avant de faire la preuve du théorème 3.1 on a besoin du lemme suivant (cf. [3] et [6]).

5.1 Lemme

Lemme 5.1. *On considère le système*

$$x' = f(t, x, c), \quad (*)$$

on suppose que f est anti-périodique d'anti-période τ, f_x est continue, f est continue en (t, x, c) quand (t, x) est dans un domaine V du plan (t,x) contenant la courbe $(t, x^*(t))$ et quand $|c|$ est petit où x^* est une solution τ anti-périodique de l'équation $(*)$ pour $\mu = 0$, f admet des dérivées partielles par rapport à x_i, les composantes de x, qui sont continues en (t,x,c) et vérifiants $\frac{\partial f}{\partial x_i}((t, x^*(t), o))$ est τ périodique.
Si l'équation linéarisée de $(*)$

$$y' = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}((t, x^*(t), o))y = f_x(t, x^*(t), 0)y$$

n'a pas de solution d'anti-période τ, alors pour $|c|$ petite l'équation $(*)$ admet une solution $x = x(t, c)$ anti-périodique en t d'anti-période τ, continu en (t,c) et avec $x(t, 0) = x^*(t)$.

Remarque : La condition de non existence de solution anti-périodique du système

$$y' = f_x(t, x^*(t), 0)y$$

est équivalente au fait qu'aucun exposant caractéristique de ce système n'est multiple de $\frac{(2k+1)\pi}{\tau}$.
Preuve du Lemme 5.1 :
La solution de $(*)$ qui prend pour $t = 0$ la valeur $x^*(0) + \alpha$ où $|\alpha|$ est petit sera notée

$$\varphi = \varphi(t, \alpha, c).$$

D'après l'unicité de φ, pour que cette solution soit anti-périodique d'anti-période τ il faut et il suffit que

$$\varphi(\tau, \alpha, c) = -\varphi(0, \alpha, c)$$

ce qui veut dire

$$\varphi(\tau, \alpha, c) + x^*(0) + \alpha = 0.$$

Pour $c = 0$ le système a la solution $\alpha = 0$.
Si le jacobien de ce système par rapport aux composantes de α est non nul à $c = 0$, $\alpha = 0$, alors le système admet une unique solution $\alpha = \alpha(c)$ dans le voisinage de $c = 0$, où α est continue en c et $\alpha(0) = 0$.
Le jacobien est le déterminant de la matrice

$$\varphi_\alpha(\tau, 0, 0) + I \quad (**)$$

Si le jacobien ne s'annule pas alors l'existence d'une solution anti-périodique x de $(*)$ est etabli pour $|c|$ petit en posant

$$\varphi(t, \alpha(c), c) = x(t, c)$$

De plus dans le voisinage de $x^*(t)$, cette solution est uniquement détérminée puisque $\alpha(c)$ est unique.
Le jacobien est relié à l'équation linéarisée de $(*)$ par rapport à la solution x^* ; en effet si l'équation

$$\varphi'(t, \alpha, c) = f(t, \varphi(t, \alpha, c), c)$$

est différentiable par rapport aux composantes α_i de α, il en résulte que pour $c = 0$, $\alpha = 0$ et puisque $\varphi(t, 0, 0) = x^*(t)$ que

$$\varphi'_\alpha(t, 0, 0) = f_x(t, x^*(t), 0)\varphi_\alpha(t, 0, 0)$$

Donc la matrice $\Psi(t) = \varphi_\alpha(t, 0, 0)$ est une matrice solution de l'équation linéarisée et puisque $\varphi_\alpha(0, 0, 0) = I$ alors c'est une matrice fondamentale, donc les nombres caractéristiques associés à l'équation linéarisée $y' = f_x(t, x^*(t), 0)y$ sont les racines de :

$$det(\Psi(\tau) - \lambda I) = 0$$

or $\Psi(\tau) + I$ est précisément la matrice $(**)$ dont le détérminant est le jacobien.
Donc le jacobien s'annule si et seulement si $\lambda = -1$ est une racine de $det(\Psi(\tau) - \lambda I) = 0$ et delà pour que l'équation $(*)$ admet une solution anti-périodique d'anti-période τ il suffit que $\lambda = -1$ ne soit pas une racine de $det(\Psi(\tau) - \lambda I) = 0$.

5.2 Preuve du théorème 3.1

Soit $x_\varepsilon(t)$ la solution anti-périodique trouvée dans le lemme 4.1.
L'équation linéarisée de l'équation

$$x'' + g(x) = \varepsilon f(t), \tag{5.1}$$

au voisinage de $x_\varepsilon(t)$, est :

$$y'' + g'(x_\varepsilon(t))y = 0, \tag{5.2}$$

Si (5.2) a une solution τ-anti-périodique non nulle alors cette solution est une solution 2τ-périodique non nulle de l'équation 2τ-périodique (5.2). D'après [9] ceci est impossible.
Donc d'aprés le lemme prédédent, il existe une solution anti-périodique de l'équation (4.1) pour c suffisament petit et qui se réduit à $x_\varepsilon(t)$ pour $c = 0$.

6 Existence de 4 solutions anti-périodiques distinctes

Lemme 6.1. *Soit u, v et w 3 solutions de*

$$x'' + \alpha x + \beta x^3 = 0 \qquad \alpha \geq 0,\ \beta > 0$$

$$\textit{Si}\ \ u + v + w \equiv 0\ \ \textit{alors}\ \ uvw \equiv 0.$$

Démonstration : On a

$$u'' + \alpha u + \beta u^3 = 0$$

et

$$v'' + \alpha v + \beta v^3 = 0$$

donc

$$w'' + \alpha w = \beta(u^3 + v^3) = \beta[(u+v)^3 - 3uv(u+v)]$$

d'où

$$w'' + \alpha w + \beta w^3 = -3\beta uv(u+v) = 3\beta uvw$$

or

$$w'' + \alpha w + \beta w^3 = 0$$

donc

$$uvw = 0.$$

Théorème 6.2. *Soit x_0 une solution anti-périodique non nulle de l'équation*

$$x'' + \alpha x + \beta x^3 = 0 \qquad \alpha \geq 0,\ \beta > 0 \tag{6.1}$$

d'anti-période minimale 3λ et soit

$$\psi(t) = x_0'(t) - x_0'(t+\lambda) + x_0'(t+2\lambda).$$

Il existe ε et c positifs tels que l'équation

$$x'' + cx' + \alpha x + \beta x^3 = \varepsilon \psi'(t) \tag{6.2}$$

admette au moins 3 solutions anti-périodiques distinctes d'anti-période minimale 3λ.

Remarque 6.3 **:** L'équation (6.2) admet en fait au moins 4 solutions anti-périodiques distinctes puisqu'on sait déja qu'elle admet une solution λ-anti-périodique [8].

Démonstration : on va commencer par montrer que $f \equiv \psi'$ vérifie les hypothèses du théorème principal de ce papier.

On a ψ' est anti-périodique d'anti-période minimale λ ; de plus $\psi' \not\equiv 0$ en effet :

Soient $u = x_0'(t)$, $v = -x_0'(t+\lambda)$ et $w = x_0'(t+2\lambda)$.
u, v et w sont 3 solution 3λ anti-périodiques de (7.1).

Si $\psi' \equiv 0 \Rightarrow \psi = x_0'(t) - x_0'(t+\lambda) + x_0'(t+2\lambda) \equiv 0 \Rightarrow x_0(t) - x_0(t+\lambda) + x_0(t+2\lambda) = u + v + w \equiv 0$.

D'où, d'après le lemme précédent, $uvw \equiv 0$.

Si $u \not\equiv 0$ alors u, v et w sont 3 solutions non triviales de (7.1) et ont donc chacune un nombre fini de zéros sur $(0, \lambda)$. Il est donc impossible que $uvw \equiv 0$.
Donc $u = x_0'(t) \equiv 0$, ce qui est absurde.
Ainsi $\psi' \not\equiv 0$.

Vérifions que

$$\int_0^{3\lambda} x_0'(t)\psi'(t)dt = 0$$

et

$$\int_0^{3\lambda} x_0''(t)\psi'(t)dt \neq 0$$

On a

$$\begin{aligned}\int_0^{3\lambda} \psi'(t)x_0'(t)dt &= \int_0^{\lambda} \psi'(t)x_0'(t)dt + \int_{\lambda}^{2\lambda} \psi'(t)x_0'(t)dt + \int_{2\lambda}^{3\lambda} \psi'(t)x_0'(t)dt \\ &= \int_0^{\lambda} \psi'(t)\psi(t)dt = \left[\psi^2(t)\right]_0^{\lambda} = 0\end{aligned}$$

et

$$\int_0^{3\lambda} \psi'(t)x_0''(t)dt = \int_0^{\lambda} \psi'^2(t)dt \neq 0\,.$$

Par conséquent $f = \psi'$ vérifient les hypothèses du théorème principal, de plus $g = \alpha x + \beta x^3 \in C^2$ impaire croissante et $g^{-1}(0) = \{0\}$. Enfin g est stictement convexe sur $\mathbb{R}^+$.

Ainsi, on peut appliquer le théorème principal et on a alors l'existence de ε et c positifs tels que l'équation (6.2) admette une solution anti-périodique d'anti-période minimale 3λ.

Soit maintenant x une solution anti-périodique de (6.2) d' anti-période minimale 3λ.
Posons

$$y = -x(t + \lambda)$$

et

$$z = x(t + 2\lambda)$$

on a

$$-y''(t) - cy'(t) - g(y(t)) = \varepsilon f(t + \lambda)$$

or

$$f(t + \lambda) = -f(t)$$

donc y est une autre solution de (6.2).
Pour z on a

$$z''(t) + cz'(t) + g(z(t)) = \varepsilon f(t + 2\lambda)$$

or

$$f(t + 2\lambda) = f(t)$$

donc z est aussi une autre solution de (6.2).

Par conséquent l'équation (6.2) admet 3 solutions anti-périodiques distinctes ; en effet x n'est pas λ-anti-périodique $\Rightarrow x \neq y$, de plus la période minimale de x est $6\lambda \Rightarrow x \neq z$.

Remarque : Puisque toute solution de (6.1) est analytique il en est de même pour f. Le théorème 6.2 améliore (pour $\alpha = 0$) le résultat de Souplet [14] dans 2 directions :
- on obtient 4 solutions anti-périodiques au lieu de 2.
- f est analytique.

7 Généralisation et cas particulier d'un terme forçant sinusoïdal

Soit x_0 une solution 3λ-anti-périodique de

$$x'' + \alpha x + \beta x^3 = 0 \quad \alpha,\, \beta > 0$$

On écrit

$$x_0(t) = \sum_{n\ impair} x_n \, cos(\frac{n\pi}{3\lambda} t)$$

puisque x_0 est pair, de plus $x_0 \in C^1(\mathbb{R})$ donc $\sum\limits_{n\ impair} |x_n| < \infty$.

$$\begin{aligned} x_0(t) - x_0(t+\lambda) + x_0(t+2\lambda) &= Re\{ \sum_{n\ impair} x_n(1 + j^n + j^{2n}) e^{i(\frac{n\pi}{3\lambda} t)} \} \\ &= \sum_{k\ impair} 3\, x_{3k}\, cos(\frac{k\pi}{\lambda} t) \end{aligned}$$

Puisque $x_0(t) - x_0(t+\lambda) + x_0(t+2\lambda)$ est non nul (lemme 6.1) alors il existe un k_0 impair tel que $x_{3k_0} \neq 0$.

Soient J un ensemble d'entiers impairs contenant k_0 et $(\gamma_j)_{j \in J}$ telle que $\sum\limits_{j \in J} |\gamma_j| < \infty$.

Posons

$$f(t) = \sum_{j \in J} \gamma_j cos(\frac{j\pi}{\lambda} t)$$

Cherchons sous quelle condition sur les γ_j, f vérifie les hypothèses du théorème principal.
Il est clair que f est anti-périodique d'anti-période minimale λ.

$$\begin{aligned} \int_0^{3\lambda} f(t) x_0'(t) dt &= \int_0^{\lambda} f(t) x_0'(t) dt + \int_{\lambda}^{2\lambda} f(t) x_0'(t) dt + \int_{2\lambda}^{3\lambda} f(t) x_0'(t) dt \\ &= \int_0^{\lambda} f(t)(x_0'(t) - x_0'(t+\lambda) + x_0'(t+2\lambda)) dt \\ &= -\int_0^{\lambda} (\sum_{j \in J} \gamma_j cos(\frac{j\pi}{\lambda} t))(\sum_{k\ impair} x_{3k}\, (\frac{3k\pi}{\lambda})\, sin(\frac{k\pi}{\lambda} t)) dt \end{aligned}$$

or

$$\forall\, j \in J\,,\ k \text{ impair}, \quad \int_0^{\lambda} cos(\frac{j\pi}{\lambda} t) sin(\frac{k\pi}{\lambda} t)) dt = 0$$

donc
$$\int_0^{3\lambda} f(t)x_0'(t)dt = 0.$$
D'autre part
$$\begin{aligned}\int_0^{3\lambda} f(t)x_0''(t)dt &= \int_0^{\lambda} f(t)(x_0''(t) - x_0''(t+\lambda) + x_0''(t+2\lambda))dt \\ &= -\int_0^{\lambda}(\sum_{j\in J}\gamma_j cos(\frac{j\pi}{\lambda}t))(\sum_{k\ impair} x_{3k}\,(\frac{3k^2\pi^2}{\lambda^2})\,cos(\frac{k\pi}{\lambda}t))dt\end{aligned}$$
or
$$\int_0^{\lambda} cos(\frac{j\pi}{\lambda}t)cos(\frac{k\pi}{\lambda}t)dt = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad k \neq j \\ \frac{\lambda}{2} & \text{si} \quad k = j \end{cases}$$
donc
$$\int_0^{3\lambda} f(t)x_0''(t)dt = -\frac{3\pi^2}{2\lambda}\sum_{k\in J} k^2\gamma_k x_{3k}$$
Ainsi si $\sum_{k\in J} k^2\gamma_k x_{3k} \neq 0$ alors $\int_0^{3\lambda} f(t)x_0''(t)dt \neq o.$

Par conséquent, on a le résultat suivant.

Théorème 7.1. *Soit x_0 une solution anti-périodique non nulle de l'équation*
$$x'' + \alpha x + \beta x^3 = 0 \qquad \alpha,\ \beta > 0 \tag{7.1}$$
d'anti-période minimale 3λ et soit
$$f(t) = \sum_{j\in J}\gamma_j cos(\frac{j\pi}{\lambda}t)$$
avec $\sum_{k\in J} k^2\gamma_k x_{3k} \neq 0$.
Il existe ε et c positifs tels que l'équation
$$x'' + cx' + \alpha x + \beta x^3 = \varepsilon\sum_{j\in J}\gamma_j cos(\frac{j\pi}{\lambda}t)$$
admette au moins 3 solutions anti-périodiques distinctes d'anti-période minimale 3λ.

Corollaire 7.2. *Soit k_0 tel que $x_{k_0} \neq 0$ alors le théorème 7.1 est vrai pour $f(t) = cos(\frac{k_0\pi}{\lambda}t)$.*

Corollaire 7.3. *$\forall \omega_0 \in]\sqrt{\alpha}, +\infty[$, il existe $k_0 \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$ et $c > 0$ tels que l'équation*

$$x'' + cx' + \alpha x + \beta x^3 = \varepsilon cos(3k_0\omega_0 t + \phi)$$

admette au moins 3 solutions anti-périodiques distinctes d'anti-période minimale $\lambda_0 = \frac{\pi}{\omega_0}$, pour tout $\phi \in \mathbb{R}$.

Preuve : D'après l'expression (2.2), il est clair que lorsque $g(x) = \alpha x + \beta x^3$ on a

$$\lim_{E\to 0} \tau(A) = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha}}$$

et

$$\lim_{E\to +\infty} \tau(A) = 0$$

Ainsi par continuité lorsque A décrit 'intervalle $]0.\infty[$, $\tau(A)$ décrit l'intervalle $]0, \frac{\pi}{\sqrt{\alpha}}[$.
Soit $\omega_0 \in]\sqrt{\alpha}, +\infty[$, d'après les calculs faits au debut de ce paragraphe et en désignant par x_0 une solution $\frac{\pi}{\omega_0}$-anti-périodique, on a

$$x_0(t) - x_0(t + \frac{\pi}{3\omega_0}) + x_0(t + \frac{2\pi}{3\omega_0}) = \sum_{k\ impair} 3\, x_{3k}\, cos(3k\omega_0 t)$$

et puisque $x_0(t) - x_0(t + \frac{\pi}{3\omega_0}) + x_0(t + \frac{2\pi}{3\omega_0})$ est non nul (lemme 6.1) alors il existe un k_0 impair tel que $x_{3k_0} \neq 0$.
Donc si $f(t) = cos(3k_0\omega_0 t)$ les conditions (3.3) et (3.4) du théorème principal sont vérifiées. On peut ensuite par translation étendre le résultat à $f(t) = cos(3k_0\omega_0 t + \phi)$, $\forall\ \phi \in \mathbb{R}$.

8 Existence de 3 solutions périodiques distinctes

En appliquant la méthode suivie dans le paragraphe 6 au cas périodique on obtient le résultat suivant qui constitue une application du travail de Loud [9].

Théorème 8.1. *Soit x_0 une solution périodique non nulle de l'équation*

$$x'' + \alpha x + \beta x^3 = 0 \qquad \alpha,\ \beta > 0 \tag{8.1}$$

de période minimale $3T$ et soit

$$\psi(t) = x_0'(t) + x_0'(t+T) + x_0'(t+2T).$$

Il existe ε et c positifs tels que l'équation

$$x'' + cx' + \alpha x + \beta x^3 = \varepsilon \psi'(t) \tag{8.2}$$

admette au moins 3 *solutions périodiques distinctes d'anti-période minimale* $3T$.

Démonstration : La démonstration est analogue a celle du théorème 6.2. En effet, on commence par montrer que $f = \psi'$ vérifie les hypothèses des théorème 5 et 7 de [9].

On a ψ' est périodique de période minimale T ; de plus $\psi' \not\equiv 0$: il suffit juste d'appliquer le lemme 6.1 (comme dans la démonstration du théorème 6.2) en prenant $u = x_0'(t)$, $v = x_0'(t+T)$ et $w = x_0'(t+2T)$.

Vérifions que

$$\int_0^{3T} x_0'(t) f(t) dt = 0$$

et

$$\int_0^{3T} x_0''(t) f(t) dt \neq 0$$

On a

$$\begin{aligned}
\int_0^{3T} \psi'(t) x_0'(t) dt &= \int_0^{T} \psi'(t) x_0'(t) dt + \int_T^{2T} \psi'(t) x_0'(t) dt + \int_{2T}^{3T} \psi'(t) x_0'(t) dt \\
&= \int_0^{T} \psi'(t) \psi(t) dt = \big[\psi^2(t)\big]_0^T = 0
\end{aligned}$$

et

$$\int_0^{3T} \psi'(t) x_0''(t) dt = \int_0^{T} \psi'^2(t) dt \neq 0\,.$$

Par conséquent f et $g = \alpha x + \beta x^3$ vérifient les hypothèses des théorèmes 5 et 7 de [9] et on alors l'existence de ε et c positifs tels que l'équation (8.2) admette une solution périodique de période minimale $3T$.

Soit maintenant x est une solution périodique de (8.2) de période minimale $3T$.
Posons

$$y = x(t+T)$$

$$z = x(t+2T)$$

on a

$$y''(t) + cy'(t) + g(y(t)) = \varepsilon f(t+T)$$

or

$$f(t+T) = f(t)$$

donc y est une autre solution de (8.2).
De même pour z.
Par conséquent l'équation (8.2) admet 3 solutions périodiques distinctes.

Remarque : D'après le théorème 12 de [9], si $\alpha \neq \frac{4n^2\pi^2}{T^2}$, $n \in \mathbb{N}$ alors il existe ε et c positifs tels que l'équation (8.2) admette une unique solution périodique de période minimale T proche de 0.

Par conséquent l'équation (8.2) admet alors 4 solutions périodiques : une de période minimale T et 3 de période minimale $3T$.

$\diamond$

Références

[1] A. BEAULIEU, Etude de l'unicité des solutions anti-périodiques pour des équations d'évolution non linéaires, Portug. Math. 49, 4 (1992).

[2] A. BAHRI, H. BERESTYCKI, Forced vibrations of superquadratic Hamiltonian systems, Acta Math. (1984)

[3] E.A. CODDINGTON, N. LEVINSON, Theory of ordinary differential equations, New York, 1955.

[4] M.L. CARTWRIGHT, J.E. LITTLEWOOD, On nonlinear differential equations of the second order, Ann. of Math. 48, 472-404 (1947)

[5] T. DING, Boundedness of solutions of Duffing's equation, J. Differential Equations 61 (1986), no. 2, 178–207.

[6] K.O. FRIEDRICHS, Advanced ordinary differential equations, New York, 1954.

[7] K.O. FRIEDRICHS, J.J. STOKER, Forced vibrations of systems with nonlinear restoring force, Quarterly oh Applied Math. vol. 1, 97-115 (1943).

[8] A. HARAUX, Antiperodic solutions of some nonlinear evolution equations. Manuscripta Math. 63, 479-505 (1989).

[9] W.S. LOUD, Periodic Solutions of $x'' + cx' + g(x) = \varepsilon f(t)$, Mem. Amer. Math. Soc. 31, Providence (1958).

[10] W.S. LOUD, Boundedness and convergence of solutions of $x'' + cx' + g(x) = e(t)$, Duke Math. J. vol. 24, 63-72 (1957).

[11] M.E. LEVENSON, Harmonic and subharmonic response for the Duffing equation $x'' + \alpha x + \beta x^3 = Fcos(\omega t)$ $(\alpha > 0)$, J. Appl. Phy. vol. 20, 1045-1051 (1949).

[12] N. LEVINSON, Transformation Theory of Nonlinear Differential Equations of the second order, Annals of Mathematics, vol 45 (1944) p723-737.

[13] H. OKOCHI, On the existence of periodic solutions to nonlinear abstract parabolic equations, J. Math. Soc. Japan 40 (3), 541-553 (1988).

[14] F. SOUPLET, Uniqueness and nonuniqueness results for the Antiperiodic solutions of some second order Nonlinear Evolution Equations, Nonlinear Analysis Theory, vol 26 (1996) pp.1511-1525.

[15] J.J STOKER, Nonlinear vibrations in mechanical and electrical systems, New York, 1950.