C. R. Acad. Sci. Paris, t. 333, Série I, p. 151–154, 2001
Problèmes mathématiques de la mécanique/*Mathematical Problems in Mechanics*

Justification des modèles linéaires de Koiter et de Naghdi pour des coques totalement encastrées soumises à des forces « non admissibles »

Véronique LODS [a], Cristinel MARDARE [b]

[a] Laboratoire d'applications des mathématiques, Téléport 2, 86960 Futuroscope, France
[b] Laboratoire d'analyse numérique, Université Pierre-et-Marie-Curie, 4 place Jussieu, 75005 Paris, France

(Reçu le 27 avril 2001, accepté le 29 avril 2001)

Résumé. On considère une coque – c'est-à-dire un corps tridimensionnel dont une dimension (l'épaisseur 2ε) est faible par rapport aux autres – totalement encastrée le long de sa frontière latérale et soumise à un chargement régulier non nul. Dans le cadre de l'élasticité linéarisée, pour approcher le vecteur déplacement tridimensionnel, on peut utiliser les modèles linéaires de Koiter ou de Naghdi. Des estimations d'erreurs ont été obtenues dans [3,4] entre ces modèles et le déplacement tridimensionnel, pour ε suffisamment petit, dans le cas de coques en flexion ou de coques membranaires. On ne fait ici aucune hypothèse sur la nature géométrique de la coque. En particulier, les déplacements inextensionnels linéarisés peuvent être réduits au vecteur nul. Les hypothèses sur les forces sont faibles : on peut par exemple considérer des forces régulières (dans H^1) non nulles, indépendantes de la variable transverse. On établit alors, en fonction de ε, une estimation en terme d'erreur relative entre les tenseurs de déformation linéarisés mis à l'échelle des modèles de Koiter (ou de Naghdi) et du modèle tridimensionnel. Ces estimations sont obtenues alors que le modèle limite n'est pas déterminé. Sous des hypothèses supplémentaires, on peut déduire également des estimations en terme de déplacements qui permettent de retrouver les résultats établis dans [3,4]. © 2001 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

A justification of linear Koiter and Naghdi's models for totally clamped shells, subjected to 'non admissible' loads

Abstract. *We consider a shell, i.e., a three dimensional body with a small thickness* (*denoted by* 2ε), *which is clamped along its entire lateral boundary and subjected to regular loads. In the linear case, one can use the two-dimensional models of Koiter or Naghdi to calculate the displacement vector field of the shell. Some error estimates have been obtained in* [3,4] *between these models and the three-dimensional displacement for flexural or membrane shells. Here, we do not make any assumptions on the geometry of the shell. In particular, the space of linearized inextensional displacements can be reduced to zero. The assumptions on the loads are weak: for instance, one can consider regular loads* (*in* H^1) *which do not depend on the transverse variable. We then establish a relative error estimate for the scaled linearized deformation tensor between Koiter's model* (*or Naghdi's model*) *and the three-dimensional model. These estimates hold though the limit model is not known. In addition, further assumptions on the data allow to recover the error estimates concerning*

Note présentée par Philippe G. CIARLET.

S0764-4442(01)02007-9/FLA

the displacements which have been proved in [3,4].

1. Position du problème

Nous reprenons l'approche générale et les notations détaillées dans Ciarlet [1]. La coque est définie par son épaisseur (notée 2ε) et par sa surface moyenne S, paramétrée par une fonction $\boldsymbol{\theta}:\overline{\omega}\to\mathbf{R}^3$, où ω est un ouvert connexe borné de $\mathbf{R}^2$, l'ensemble ω étant localement d'un même côté de $\partial\omega$.

Ainsi, la coque est donnée par $\boldsymbol{\Theta}(\overline{\Omega}^{\varepsilon})$, où $\Omega^{\varepsilon}:=\omega\times]-\varepsilon,\varepsilon[$, la carte $\boldsymbol{\Theta}$ est définie par $\boldsymbol{\Theta}(y,x_3^{\varepsilon}):=\boldsymbol{\theta}(y)+x_3^{\varepsilon}\mathbf{a}_3(y)$ pour tout $y=(x_1,x_2)\in\overline{\omega}$ et $x_3^{\varepsilon}\in[-\varepsilon,\varepsilon]$, et où $\mathbf{a}_3(y)$ est un vecteur normal unitaire à S au point $\boldsymbol{\theta}(y)$. On notera $x^{\varepsilon}=(x_i^{\varepsilon})$ un point de Ω^{ε}. La coque est soumise à une densité de forces volumiques $\mathbf{f}^{\varepsilon}\in\mathbf{L}^2(\Omega^{\varepsilon})$, supposée pour simplifier indépendante de x_3^{ε}. Le vecteur déplacement $\vec{\mathbf{u}}^{\varepsilon}$ de la coque est repéré par ses composantes covariantes $\mathbf{u}^{\varepsilon}:\Omega^{\varepsilon}\to\mathbf{R}^3$ sur la base $(\mathbf{g}^{i,\varepsilon})_{\{i=1,2,3\}}$ liée à la coque, base duale de la base $\partial_i^{\varepsilon}\boldsymbol{\Theta}$ (où ∂_i^{ε} désigne la dérivée partielle par rapport x_i^{ε}). La coque a un comportement linéaire élastique pour les chargements considérés ici. De plus, le materiau constituant la coque est supposé isotrope, homogène et la configuration initiale de la coque est un état naturel. Plus précisément, le tenseur des constraintes $\underline{\sigma}(\mathbf{u}^{\varepsilon})$ est lié au tenseur de déformation linéarisé $\underline{e}(\mathbf{u}^{\varepsilon})$ par la loi de Hooke. Les constantes de Lamé intervenant dans cette loi sont supposées indépendantes de ε.

Classiquement, on introduit l'ouvert fixe $\Omega=\omega\times\,]-1,1[$ et le déplacement mis à l'échelle $\mathbf{u}(\varepsilon):\Omega\to\mathbf{R}^3$ défini par $\mathbf{u}(\varepsilon)(x)=\mathbf{u}^{\varepsilon}(x^{\varepsilon})$ pour tout $x=(x_i)\in\Omega$ avec $x^{\varepsilon}=(x_1,x_2,\varepsilon x_3)$. L'équation d'équilibre peut alors s'écrire en coordonnées curvilignes sous la forme (*cf.* [1])

$$\mathbf{u}(\varepsilon)\in\mathbf{V}(\Omega)\quad\text{tel que } B(\varepsilon)\big(\mathbf{u}(\varepsilon),\mathbf{v}\big)=\int_{\Omega}\mathbf{f}^{\varepsilon}\cdot\mathbf{v}\sqrt{g(\varepsilon)}\,\mathrm{d}x$$

pour tout $\mathbf{v}\in\mathbf{V}(\Omega)$, où $\mathbf{V}(\Omega)=\{\mathbf{v}\in\mathbf{H}^1(\Omega),\mathbf{v}=0 \text{ sur } \partial\omega\times\,]-1,1[\}$, $\sqrt{g(\varepsilon)}$ est l'élément de volume de la coque mis à l'échelle et $B(\varepsilon)$ est l'énergie de déformation élastique. On définit les composantes contravariantes et covariantes des tenseurs de contraintes et de déformation linéarisés mis à l'échelle, notés respectivement $\boldsymbol{\sigma}(\varepsilon)$ et $\mathbf{e}(\varepsilon,\mathbf{u}(\varepsilon))$.

Pour tout vecteur ou fonction v défini sur Ω, on introduit la moyenne en la variable transverse $\overline{v}=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}v\,\mathrm{d}x_3$. On note $\mathbf{p}^{\varepsilon}=2\overline{\mathbf{f}(\varepsilon)}$ et $\mathbf{p}_t^{\varepsilon}$, p_3^{ε} sa partie tangentielle et normale. On suppose que les forces satisfont les hypothèses suivantes :

- Il existe $\mathbf{p}_0\in\mathrm{L}^2(\omega)$, non nul, tel que la famille $\overline{\mathbf{f}(\varepsilon)\sqrt{g(\varepsilon)}}$ converge dans $\mathbf{L}^2(\omega)$ vers $\mathbf{p}_0$, lorsque ε tend vers zéro,
- $\mathbf{p}_t^{\varepsilon}\in\mathbf{H}^1(\omega)$ et $|\mathbf{p}_t^{\varepsilon}|_{\mathbf{H}^1(\omega)}=\mathrm{O}(1/\varepsilon)$, où la notation $f=\mathrm{O}(g)$ signifie qu'il existe une constante $C>0$ indépendante de ε, telle que, pour ε petit, $|f|\leqslant C|g|$.

Pour approcher le vecteur déplacement tridimensionel, on se place sur la surface moyenne de la coque et on introduit la base covariante $(\mathbf{a}_1=\partial_1\boldsymbol{\theta},\mathbf{a}_2=\partial_2\boldsymbol{\theta},\mathbf{a}_3)$ et la base duale $(\mathbf{a}^i)$ associée, où ∂_1, ∂_2 désignent les dérivées partielles par rapport à x_1, x_2. Classiquement, on peut utiliser les modèles bidimensionnels de Koiter et de Naghdi : le modèle de Koiter fournit le vecteur déplacement de composantes sur la base $(\mathbf{a}^i)$ données (d'après les hypothèses de Kirchhoff–Love) par $\boldsymbol{\zeta}_K^{\varepsilon}+\varepsilon x_3\boldsymbol{\phi}^{\varepsilon}$, où $\boldsymbol{\zeta}_K^{\varepsilon}=(\zeta_i^{\varepsilon})\in\mathrm{H}_0^1(\omega)\times\mathrm{H}_0^1(\omega)\times\mathrm{H}_0^2(\omega)$ et la rotation infinitésimale $\boldsymbol{\phi}^{\varepsilon}=(\phi_i^{\varepsilon})$ de la normale peut s'exprimer par $\phi_{\alpha}^{\varepsilon}=[\partial_{\alpha}(\zeta_i^{\varepsilon}\mathbf{a}^i)]\cdot\mathbf{a}_3$, avec $\alpha=1,2$ et $\phi_3^{\varepsilon}=0$. Par un changement de base, on peut calculer les composantes covariantes $\mathbf{u}_{KL}(\varepsilon)$ sur la base $(\mathbf{g}^i(\varepsilon))$ mise à l'échelle, liée à la coque et utilisée pour repérer le vecteur déplacement tridimensionnel.

Le modèle de Naghdi, qui prend en compte le cisaillement, permet de même de calculer le déplacement de composantes sur la base $(\mathbf{a}^i)$ données par $\boldsymbol{\zeta}_N^{\varepsilon}+\varepsilon x_3\boldsymbol{\eta}_N^{\varepsilon}$, où $\boldsymbol{\zeta}_N^{\varepsilon}\in\{\mathrm{H}_0^1(\omega)\}^3$ et $\boldsymbol{\eta}_N^{\varepsilon}\in\{\mathrm{H}_0^1(\omega)\}^2$. On note $\mathbf{u}_N(\varepsilon)$ les composantes du déplacement de Naghdi sur la base $(\mathbf{g}^i(\varepsilon))$.

Il s'agit alors de comparer les composantes $\mathbf{u}(\varepsilon)$ avec $\mathbf{u}_{KL}(\varepsilon)$, ou $\mathbf{u}_N(\varepsilon)$. Pour cela, on va estimer l'erreur relative $|\mathbf{u}(\varepsilon)-\mathbf{u}_{KL}(\varepsilon)|/|\mathbf{u}(\varepsilon)|$, où $|\cdot|$ est une norme sur $\mathbf{V}(\Omega)$ qui reste à définir. Cette estimation permettra en particulier de retrouver les estimations concernant les déplacements établis dans [3,4] dans le cas de coques en flexion ou membranaires.

Dans le cas de coques membranaires généralisées (*cf.* [2]), les modèles de Koiter et de Naghdi ont été justifiés pour des forces admissibles – ce qui constitue une hypothèse restrictive – en exhibant le modèle limite lorsque ε tend vers zéro. Pour une coque admettant uniquement des déplacements inextensionnels nuls et soumise à des forces non admissibles, ou pour une coque quelconque soumise à un chargement n'« agissant » pas sur les déplacements inextensionnels, le modèle tridimensionnel et les modèles de Koiter ou de Naghdi ne fournissent a priori pas de modèles limites lorsque ε tend vers zéro. En effet, des résultats de [1,2] on peut seulement déduire dans ce dernier cas les convergences vers la fonction nulle des déplacements bidimensionnels de Koiter et de Naghdi et du déplacement tridimensionnel. L'erreur relative établie ici permet alors de justifier ces modèles bidimensionnels pour une coque totalement encastrée.

2. Estimation relative du tenseur de déformation linéarisé pour le modèle de Koiter

On raisonne comme dans [3] en introduisant d'une part la fonction de $\{\mathrm{H}^1(\Omega)\}^3$ définie par $\mathbf{u}^\sharp(\varepsilon)=\mathbf{u}_{KL}(\varepsilon)+\varepsilon\mathbf{u}^c(\varepsilon)$ (où $\mathbf{u}^c(\varepsilon)$ est défini en fonction $\boldsymbol{\zeta}_K^\varepsilon$) et d'autre part, le correcteur $\mathbf{w}^\sharp(\varepsilon)$, de telle sorte que $\widehat{\mathbf{u}}(\varepsilon)=\mathbf{u}^\sharp(\varepsilon)+\mathbf{w}^\sharp(\varepsilon)$ s'annule sur toute la frontière latérale (*voir* l'appendice de [4] pour les définitions exactes). On établit les estimations suivantes :

– en utilisant les résultats de régularité de [3], on montre que

$$B(\varepsilon)\big(\widehat{\mathbf{u}}(\varepsilon),\widehat{\mathbf{u}}(\varepsilon)\big)=\int_\omega \mathbf{p}^\varepsilon\cdot\overline{\widehat{\mathbf{u}}(\varepsilon)}\sqrt{a}\,\mathrm{d}y+\mathrm{O}\big(k^\sharp(\varepsilon)\big|\widehat{\mathbf{u}}(\varepsilon)\big|_E\big),$$

où $\sqrt{a}$ est l'élèment d'aire de la surface moyenne S, $|\mathbf{v}|_E$ est la norme dans $\mathrm{L}^2(\Omega)$ de $e(\varepsilon,\mathbf{v})$, et

$$k^\sharp(\varepsilon)=\varepsilon^{1/4}\big\{|p_3^\varepsilon|_{\mathrm{L}^2(\omega)}+\varepsilon|\mathbf{p}_t^\varepsilon|_{\mathbf{H}^1(\omega)}+\big|\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\zeta}_K^\varepsilon)\big|_{\mathbf{L}^2(\omega)}+\varepsilon\big|\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\zeta}_K^\varepsilon)\big|_{\mathbf{L}^2(\omega)}\big\},$$

$\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\zeta}_K^\varepsilon)$ et $\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\zeta}_K^\varepsilon)$ étant respectivement le tenseur membranaire et le tenseur de changement de courbure (*cf.* [1,3]) ;

– il existe une constante $C>0$ indépendante de ε telle que, pour ε petit

$$\big|\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\zeta}_K^\varepsilon)\big|_{\mathbf{L}^2(\omega)}+\varepsilon\big|\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\zeta}_K^\varepsilon)\big|_{\mathbf{L}^2(\omega)}\geqslant C.$$

Cette inégalité est obtenue en raisonnant par l'absurde, compte tenu de l'hypothèse $\mathbf{p}_0\neq 0$.
On déduit alors, après plusieurs manipulations algébriques, l'estimation :

$$\frac{|\mathbf{u}(\varepsilon)-\widehat{\mathbf{u}}(\varepsilon)|_E}{|\mathbf{u}(\varepsilon)|_E}=\mathrm{O}\big(\varepsilon^{1/4}\big).$$

Dans cette estimation, le champ des déplacements $\widehat{\mathbf{u}}(\varepsilon)$ est quadratique en x_3 et dépend uniquement de la solution du modèle de Koiter. Afin de comparer $\mathbf{u}(\varepsilon)$ à $\mathbf{u}_{KL}(\varepsilon)$ directement (sans « correcteurs »), on estime l'erreur relative pour une norme différente : en raisonnant comme dans [4], on introduit, pour $0<a<1$, la norme

$$|\mathbf{v}|_a=\big|\mathbf{e}_t(\varepsilon,\mathbf{v})\big|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}+\big|\mathbf{e}_s(\varepsilon,\mathbf{v})\big|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}+\varepsilon^a\big|\mathbf{e}_n(\varepsilon,\mathbf{v})\big|_{\mathbf{L}^2(\Omega)},$$

où, $\mathbf{e}_t$, $\mathbf{e}_s$, $\mathbf{e}_n$ représentent respectivement les parties tangentielles, transverses et normales du tenseur de déformation linéarisé. On déduit alors, pour $a = 1/4$,

$$\frac{|\mathbf{u}(\varepsilon) - \mathbf{u}_{KL}(\varepsilon)|_a}{|\mathbf{u}(\varepsilon)|_a} = \mathrm{O}\big(\varepsilon^{1/4}\big).$$

Notons que cette inégalité peut s'écrire aussi en termes de contraintes, ce qui permet de voir qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $C|\mathbf{u}(\varepsilon)|_E \leqslant |\mathbf{u}(\varepsilon)|_a \leqslant |\mathbf{u}(\varepsilon)|_E$.

Ainsi, le modèle de Koiter est justifié pour toutes les coques totalement encastrées, sous des hypothèses très peu restrictives sur les forces. Ces estimations permettent de retrouver les estimations établies dans [3] dans le cas de coques en flexion et de coques membranaires.

3. Estimation relative du tenseur de déformation linéarisé pour le modèle de Naghdi

On procède de la même manière que pour le modèle de Koiter. En particulier, on établit l'existence d'une constante $C > 0$ indépendante de ε telle que, pour ε petit,

$$\big|\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\zeta}_N^\varepsilon)\big|_{\mathbf{L}^2(\omega)} + \varepsilon\big|\boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{\zeta}_N^\varepsilon, \boldsymbol{\eta}_N^\varepsilon)\big|_{\mathbf{L}^2(\omega)} + \big|\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{\zeta}_N^\varepsilon, \boldsymbol{\eta}_N^\varepsilon)\big|_{\mathbf{L}^2(\omega)} \geqslant C,$$

où $\boldsymbol{\chi}$, $\boldsymbol{\delta}$ sont les tenseurs de changement de courbure et de cisaillement du modèle de Naghdi (*cf.* [4]). On établit alors, pour $a = 1/8$, l'estimation relative :

$$\frac{|\mathbf{u}(\varepsilon) - \mathbf{u}_N(\varepsilon)|_a}{|\mathbf{u}(\varepsilon)|_a} = \mathrm{O}\big(\varepsilon^{1/8}\big).$$

Notons que nous n'avons pas eu à introduire de correcteurs, puisque nous avons suivi la démarche de [4]. Là encore, cette estimation permet, dans le cas de coques en flexion ou membranaires, de retrouver les estimations d'erreurs en déplacement établies dans [4].

4. Conclusion

Pour des coques de géométries quelconques, totalement encastrées, les modèles de Koiter et de Naghdi peuvent être considérés comme justifiés pour des forces quelconques, raisonnablement régulières. Dans le cas de forces ponctuelles ou pour des coques partiellement encastrées, les techniques développées ici et dans [3,4] ne peuvent s'appliquer.

Références bibliographiques

[1] Ciarlet P.G., Mathematical Elasticity, Vol. III: Theory of Shells, North-Holland, Amsterdam, 2000.
[2] Ciarlet P.G., Lods V., Asymptotic analysis of linearly elastic shells: Generalized membrane shells, J. Elasticity 43 (1996) 147–188.
[3] Lods V., Mardare C., Asymptotic justification of the Kirchhoff–Love assumptions for a linearly elastic clamped shell, Journal of Elasticity 58 (2000) 105–154.
[4] Lods V., Mardare C., Error estimates between the linearized three-dimensionnal shell equations and Naghdi's model, Asymptotic Analysis, to appear.