

# Équations de transport non linéaires et systèmes hyperboliques

Théorie et méthodes numériques

Benoît Perthame

2003-2004



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Exemples d'équations de transport et de systèmes hyperboliques</b>	<b>7</b>
1.1	Equations de transport linéaires . . . . .	7
1.2	Equation des ondes . . . . .	9
1.3	Systèmes hyperboliques linéaires . . . . .	9
1.4	S. H. L. et transformée de Fourier . . . . .	11
1.5	Equations de transport non linéaires . . . . .	13
1.5.1	Lois de conservation scalaires . . . . .	13
1.5.2	Equations de Hamilton-Jacobi . . . . .	13
1.5.3	Chimiotactie . . . . .	14
1.5.4	Le système de l'élasticité . . . . .	14
1.5.5	Le système de Saint-Venant . . . . .	14
1.5.6	Dynamique des gaz compressibles . . . . .	15
1.6	Systèmes non-linéaires hyperboliques . . . . .	15
1.6.1	Hyperbolicité . . . . .	16
1.6.2	Changements d'inconnues . . . . .	16
1.6.3	Entropies . . . . .	16
1.6.4	Variables symétriques . . . . .	17
1.7	Exercices . . . . .	18
<b>2</b>	<b>Caractéristiques, chocs, détente</b>	<b>21</b>
2.1	Equation de transport et méthode des caractéristiques . . . . .	21
2.2	Equation de transport, solutions faibles . . . . .	23
2.3	Advection . . . . .	24
2.4	Lois de conservation scalaires et singularités . . . . .	27
2.5	Ondes de choc . . . . .	29
2.6	Ondes de raréfaction . . . . .	30
2.7	Entropies . . . . .	31
2.8	Problème: flux non-convexe et problème de Riemann . . . . .	33
2.9	Problème: flux non-convexes (2) . . . . .	36
<b>3</b>	<b>Méthode de viscosité pour les LCS</b>	<b>37</b>
3.1	Entropie et viscosité évanescence . . . . .	37
3.2	Estimations de la dérivée . . . . .	39
3.2.1	Explosion de la dérivée (1D) . . . . .	39
3.2.2	Estimation Variation Totale Décroissante (multiD) . . . . .	39
3.2.3	Estimation $Lip+$ d'Oleïnik (1D) . . . . .	41
3.3	Propriété de contraction . . . . .	42
3.4	Fonctions à variations bornées, espace $BV(\mathbb{R})$ . . . . .	43
3.5	Problème (propriété TOD) . . . . .	45

<b>4</b>	<b>Méthodes des volumes finis et décentrement (équations linéaires)</b>	<b>47</b>
4.1	Notations et principe de la méthodes des V.F. . . . .	47
4.2	Flux centré . . . . .	49
4.3	Flux décentré . . . . .	49
4.4	Convergence (maillage régulier) . . . . .	50
4.5	Convergence (maillage irrégulier) . . . . .	53
4.5.1	L'erreur de consistance ne tend pas vers zéro . . . . .	53
4.5.2	Retour vers le continu . . . . .	53
4.5.3	Estimation d'erreur pour la viscosité évanescente . . . . .	55
4.5.4	Estimation d'erreur pour le schéma décentré . . . . .	56
4.6	Théorie $L^2$ et méthode de Fourier . . . . .	57
4.7	Schéma de Lax-Wendroff et ordre deux . . . . .	59
4.7.1	Le schéma de Lax-Wendroff . . . . .	59
4.7.2	Stabilité $\ell^2$ . . . . .	60
4.8	Schémas d'ordre deux (reconstruction nonlinéaire) . . . . .	61
4.9	Approximation par des fonctions constantes par maille . . . . .	63
<b>5</b>	<b>Méthodes des volumes finis pour les L. C. S.</b>	<b>65</b>
5.1	Principe de la méthode des V.F. . . . .	65
5.2	Les principaux flux numériques . . . . .	66
5.2.1	Méthode centrée . . . . .	66
5.2.2	Méthode de Lax-Friedrichs . . . . .	66
5.2.3	Méthode d'Enquist-Osher . . . . .	67
5.2.4	Méthode de Godunov . . . . .	68
5.2.5	Méthode de Murman-Roe . . . . .	68
5.3	Consistance, structure des schémas . . . . .	69
5.4	Propriétés de contraction, d'entropie et de Variation Totale Décroissante . . . . .	70
5.5	Exercices et tests numériques . . . . .	73
<b>6</b>	<b>Exemples de système <math>2 \times 2</math> : élastodynamique et p-système</b>	<b>75</b>
6.1	Structure hyperbolique . . . . .	75
6.2	Bornes a priori ( $L^\infty$ ) . . . . .	76
6.3	Entropies . . . . .	78

**Remerciements**

Je voudrais remercier Nejla Nouaili et Sondes Khabthani pour une première rédaction de ce cours donné à l'École Polytechnique de Tunis en 2001 et 2002. Je remercie également Lassaad Elasmi très chaleureusement pour l'organisation de ces cours ainsi que Maryse Desnous pour l'aide dans la réalisation de plusieurs illustrations.



# Chapitre 1

## Exemples d'équations de transport et de systèmes hyperboliques

Commençons par donner quelques exemples d'équations intervenant dans des applications classiques issues de la physique, de la biologie ou des sciences de l'ingénieur. Elles ont en commun leur nature hyperbolique, définie un peu plus loin, et qui exprime une vitesse finie de propagation comme on le voit facilement par la méthode des caractéristiques.

### 1.1 Equations de transport linéaires

L'équation hyperbolique la plus simple est l'équation d'advection linéaire. Considérons un polluant de densité  $u(t, x) \geq 0$ , advecté par un courant de vitesse donnée  $\vec{a}(t, x)$ . Cette densité vérifie alors l'équation aux dérivées partielles :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u + \operatorname{div}(\vec{a}(t, x) u) = 0, & t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^d, \\ u(t = 0, x) = u^0(x). \end{cases} \quad (1.1)$$

On dit aussi qu'il s'agit d'une équation de transport sous forme 'conservative'.

Une variante consiste à trouver la solution  $c(t, x) \in \mathbb{R}$  à l'équation de transport (dite sous la "forme forte")

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} c + \vec{a}(t, x) \cdot \nabla_x c = 0, & t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^d, \\ c(t = 0, x) = c^0(x). \end{cases} \quad (1.2)$$

La solution de cette équation peut se trouver par une formule explicite, qui dans le cas où  $\vec{a}$  est constant s'énonce simplement :

$$c(t, x) = c^0(x - \vec{a}t) = c(t - s, x - \vec{a}s) \quad \forall s \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}. \quad (1.3)$$

Il s'agit bien du transport (translation) de la quantité  $c(t, x)$  à vitesse constante.

Cette équation, qui peut sembler très simple, pose des difficultés numériques considérables. Elle est toujours l'objet de recherches (essentiellement il s'agit de savoir calculer la solution sur des temps très grands). Dans le cadre des équations cinétiques, ou couplée à d'autres équations elle pose des difficultés théoriques également. Elle permet aussi de construire des modèles plus intéressants ayant un sens 'physique' intuitif. Donnons quelques exemples

**Exemple 1.1** *Modèle de démographie/renouvellement cellulaire.*

Ici  $u(t, x)$  représente la densité d'individus d'âge  $x \geq 0$  à l'instant  $t$ . Le taux de mortalité est noté

$d(x)$  et les individus peuvent donner naissance à des nouveaux nés d'âge  $x = 0$  avec un taux de fécondité  $b(x)$

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u(t, x) + \frac{\partial}{\partial x} u(t, x) + d(x)u(t, x) = 0, \\ u(t, x = 0) = \int_{x=0}^{+\infty} b(x)u(t, x)dx. \end{cases}$$

Dans la cas de la mitose cellulaire, il est naturel de choisir  $d(x) = \mathcal{I}_{\{x > x_*\}}$  (disparition des cellules qui se divisent) et  $b(x) = 2 \mathcal{I}_{\{x > x_*\}}$  (la mitose donne naissance à deux cellules identiques). D'autres modèles permettent de prendre en compte les tailles et non l'âge, ils se rapprochent alors de l'exemple suivant.

**Exemple 1.2** *Un modèle de communication sur internet.*

Dans le protocole de communication TCP, une machine envoie des messages à un serveur. Ces messages, appelés fenêtres, ont des tailles variables suivant l'encombrement du réseau. Soit  $u(t, x) =$  la densité de fenêtres de taille  $x \geq 0$  envoyées par les utilisateurs à un serveur central. La règle est que les tailles peuvent augmenter continument (d'une unité) jusqu'à ce que le serveur sature et envoie un message demandant de réduire (d'un facteur deux) la taille des fenêtres. On arrive alors à l'équation

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u(t, x) + (1 - k(t)) \cdot \frac{\partial}{\partial x} u(t, x) = k(t) (4 u(t, 2x) - u(t, x)), \\ k(t) = F(q(t)), \\ \frac{\partial}{\partial t} q(t) = \int_{x=0}^{+\infty} x u(t, x) dx. \end{cases}$$

Ici,  $q(t)$  désigne la longueur de la file d'attente du serveur et la fonction de commande  $F$  est telle que  $F(0) = 0$ ,  $F(q) = 1$  pour  $q$  grand et  $F$  est croissante. On pourra consulter [3] pour ce modèle.

**Exemple 1.3** *Les équations cinétiques.*

La physique cinétique décrit les plasmas ou gaz dilués et fournit un ensemble important d'équations de transport dont les variables sont : le temps  $t$ , la position  $x \in \mathbb{R}^d$  des particules et leur vitesse  $v \in V \subset \mathbb{R}^d$ . L'exemple le plus classique est l'équation de scattering décrivant l'évolution d'une densité  $f(t, x, v)$  de particules (neutrons, amibes ou bactéries en ce qui concerne les applications à la biologie)

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} f(t, x, v) + v \cdot \nabla_x f(t, x, v) = K[f], \\ f(t = 0, x, v) = f^0(x, v) \quad \text{donnée,} \end{cases}$$

et l'opérateur  $K$  est donnée par une formule du type

$$K[f] = \int_V k(v, v') f(t, x, v') dv' - \int_V k(v', v) f(t, x, v) dv',$$

où  $k(v, v')$  représente une 'probabilité' de 'tourner' d'une vitesse  $v'$  à  $v$ .

**Exercice :** Considérons plusieurs polluants de densités  $(u_i)_{1 \leq i \leq I}$  régies par l'équation (1.1) avec une vitesse commune  $\vec{a}(t, x)$ . Montrer que les concentrations

$$c_i = \frac{u_i}{\sum_{1 \leq j \leq I} u_j}$$

vérifient alors l'équation sous forme forte (1.2).



## 1.2 Equation des ondes

L'équation des ondes fournit un des exemples les plus simples de *système hyperbolique*. Voyons cet aspect en détail. Les ondes se propagent selon l'équation

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial t^2} w - c^2 \Delta w = 0, & t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^d \\ w(t=0) = w_0(x), \\ \frac{\partial}{\partial t} w(t=0) = v_0(x). \end{cases}$$

Ici la constante  $c$  désigne la vitesse de la lumière. Cette équation du deuxième ordre peut aussi être écrite comme un système de  $d + 1$  lois de conservation du premier ordre. On introduit pour cela les quantités

$$\begin{cases} v = \frac{\partial}{\partial t} w, \\ \vec{u} = c \nabla_x w. \end{cases}$$

On obtient alors  $d + 1$  équations pour le vecteur à  $d + 1$  dimensions  $(v, \vec{u})$  :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} v - c \operatorname{div} \vec{u} = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} \vec{u} - c \nabla_x v = 0. \end{cases} \quad (1.4)$$

Cette formulation est intéressante quand on considère *l'énergie* du système. On rappelle que l'énergie des solutions de l'équation des ondes est

$$E(t, x) = \frac{1}{2} (|\frac{\partial}{\partial t} w|^2 + c^2 |\nabla_x w|^2) = \frac{1}{2} (v^2 + |u|^2).$$

Retrouvons cela en terme du système (1.4). On multiplie la première équation par  $v$ , la seconde par  $\vec{u}$  et on obtient, en additionnant

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} [v^2 + |u|^2] - c \operatorname{div} [v \vec{u}] = 0.$$

Pour les solutions qui décroissent suffisamment à l'infini (en fait  $L^2$  suffit), on en déduit par intégration de l'équation ci-dessus, intervention des intégrales et dérivées en temps, et enfin en utilisant la formule de Stokes que

$$\int_{\mathbb{R}^d} [v^2 + |u|^2] dx = \int_{\mathbb{R}^d} [v_0^2 + |u_0|^2] dx, \quad \forall t \geq 0, \quad u_0 = c \nabla w_0.$$

Pour les systèmes hyperboliques non linéaires une telle loi de conservation supplémentaire est appelée entropie. Ce concept joue un rôle important dans la théorie et pour les méthodes numériques.

## 1.3 Systèmes hyperboliques linéaires

La structure de l'équation des ondes peut se généraliser, et de nombreux exemples physiques entrent alors dans ce formalisme (élasticité, équations de Maxwell pour l'électromagnétisme). Considérons un système  $n \times n$  du premier ordre sous la forme suivante :

$$\frac{\partial}{\partial t} u_m + \sum_{i=1}^d \sum_{l=1}^n a_{ml}^{(i)} \frac{\partial}{\partial x_i} u_l = 0, \quad m \in \{1, 2, \dots, n\}. \quad (1.5)$$

On cherche ici la solution  $(u_1(t, x), u_2(t, x), \dots, u_n(t, x))$  et la donnée est une famille de matrices

$$A^{(i)} = (a_{ml}^{(i)}) \in M_{n \times n}, \quad \forall i \in \{1, \dots, d\}.$$

La complexité de cette structure à trois indices peut s'éclaircir en introduisant la notion d'onde plane.

**Définition 1.1** Une onde plane  $v(t, y)$  de direction  $\omega \in \mathbb{S}^{d-1}$  est une solution ne dépendant que d'une variable d'espace, de direction  $\omega$  :

$$u(t, x) = v(t, x \cdot \omega) \in \mathbb{R}^n.$$

**Lemme 1.1** Une onde plane solution du système (1.5) satisfait, pour  $1 \leq m \leq n$ , l'équation monodimensionnelle

$$\frac{\partial}{\partial t} v_m(t, y) + \sum_{l=1}^n a_{ml}(\omega) \frac{\partial}{\partial y} v_l(t, y) = 0, \quad (1.6)$$

avec la notation

$$a_{ml}(\omega) = \sum_{i=1}^d \omega_i a_{ml}^i.$$

Par la suite on notera également

$$A(\omega) = \sum_{i=1}^d \omega_i A^{(i)} \in M_{n \times n}. \quad (1.7)$$

**Définition 1.2** Considérons le système linéaire du premier ordre (1.5),

(i) ce système est dit hyperbolique si  $\forall \omega \in \mathbb{S}^{d-1}$  la matrice  $A(\omega)$  est diagonalisable dans  $\mathbb{R}$ . On note  $\lambda_l(\omega)$ ,  $1 \leq l \leq n$  ses valeurs propres (ordonnées),

(ii) ce système est dit strictement hyperbolique si les  $n$  valeurs propres sont distinctes, on a alors :  $\lambda_1(\omega) < \dots < \lambda_n(\omega)$ ,

(iii) ce système est dit symétrisable s'il existe une matrice  $B$  symétrique définie positive et, pour tout  $\omega \in \mathbb{S}^{d-1}$ , une matrice symétrique  $C(\omega)$  telles que :

$$C(\omega) = A(\omega).B.$$

**Lemme 1.2** Un système linéaire symétrisable est hyperbolique.

**Démonstration :** On rappelle qu'avec les hypothèses (iii) de la définition (1.2), la matrice  $A(\omega) = C(\omega).B^{-1}$  est diagonalisable, ce qui conclut la démonstration. Notons aussi pour la suite que la matrice  $B^{-1}.C(\omega) = B^{-1}.(C(\omega).B^{-1}).B$  est donc aussi diagonalisable. En effet, on peut écrire

$$B^{-1} = \Sigma^2$$

avec  $\Sigma$  une matrice symétrique définie positive. Alors  $\Sigma.C(\omega)\Sigma$  est symétrique, donc diagonalisable dans une base orthonormale :

$$\Sigma.C(\omega).\Sigma = O^{-1}(\omega).\Lambda(\omega).O(\omega)$$

On peut donc écrire :

$$C(\omega).B^{-1} = C(\omega).\Sigma^2 = \Sigma^{-1}.(\Sigma.C(\omega).\Sigma).\Sigma = (\Sigma^{-1}.O^{-1}).\Lambda.(O.\Sigma) = P^{-1}(\omega).\Lambda.P(\omega).$$

Ceci prouve qu'en effet la matrice  $C(\omega).B^{-1}$  est diagonalisable.

Une autre interprétation est la suivante. Puisque la matrice  $B$  est inversible, on peut définir  $w = B^{-1}.v \Leftrightarrow v = B.w$ . On obtient pour la fonction  $w(t, y)$  :

$$\frac{\partial}{\partial t} w + \frac{\partial}{\partial y} A(\omega) w = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t} B.w + \frac{\partial}{\partial y} A(\omega).B.w = 0.$$

En d'autres termes, avec ces nouvelles coordonnées, le système devient symétrique (dans les variables  $t$  et  $y$ ). On peut alors écrire le système sur  $w(t, y)$  :

$$\frac{\partial}{\partial t} w + \frac{\partial}{\partial y} B^{-1}.C(\omega).w = 0,$$

qui est bien hyperbolique.  $\square$

**Remarque :** Pour un système hyperbolique de dimension un, dans une base où la matrice est diagonale, on peut écrire  $n$  équations de transport découplées :

$$\frac{\partial}{\partial t} v_m + \lambda_m \frac{\partial}{\partial y} v = 0.$$

En dimension  $d$  d'espace, cette base dépend de la direction  $\omega \in S^{d-1}$  de l'onde plane, et il n'est que très rarement vrai que l'on puisse trouver une base commune. Les équations cinétiques forment cependant une importante classe où la forme diagonale est naturelle (on a alors  $n = \infty!$ ).

**Exercice :**

(i) Montrer que l'équation des ondes est un système hyperbolique  $(d+1) \times (d+1)$ , lorsqu'il est écrit avec les inconnues  $(v, \vec{u})$ .

(ii) Déterminer les  $(d+1)$  valeurs propres.

(iii) Montrer qu'il ne peut pas être réduit à  $(d+1)$  équations de transport.

indications :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} v - c \frac{\partial}{\partial y} \vec{\omega} \cdot \vec{u} = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} \vec{u} - c \vec{\omega} \frac{\partial}{\partial y} v = 0, \end{cases}$$

$$A(w) = \begin{pmatrix} 0 & (-c).w - 1 & \dots & (-c).w_d \\ (-c).w_1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \ddots & 0 \\ (-c).w_d & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

## 1.4 S. H. L. et transformée de Fourier

La structure des ondes planes intervient aussi quand on regarde le système hyperbolique du point de vue de la transformée de Fourier. On considère à nouveau le système  $n \times n$  suivant en dimension  $d$  d'espace :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u + \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} A^{(j)}.u = 0, & u \in \mathbb{R}^n, A^{(j)} \in M_{n \times n}, \\ u(t=0) = u^0. \end{cases}$$

Soit la transformée de Fourier :

$$\widehat{u}(t, k) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ix \cdot k} u(t, x) dx.$$

On a alors

$$i k_j \widehat{u}(t, k) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ix \cdot k} \frac{\partial}{\partial x_j} u(t, x) dx.$$

Le système hyperbolique (1.5) s'écrit donc en variables de Fourier :

$$\frac{\partial}{\partial t} \widehat{u}(t, k) + i \sum_{j=1}^d k_j A^{(j)} \cdot \widehat{u}(k) = 0,$$

et en reprenant la notation (1.7),

$$\frac{\partial}{\partial t} \widehat{u}(t, k) + iA(k) \cdot \widehat{u}(k) = 0. \quad (1.8)$$

D'où la formule explicite pour la solution

$$\widehat{u}(t, k) = e^{-itA(k)} \cdot \widehat{u}^0(k). \quad (1.9)$$

Cette formule permet de déduire aisément quelques propriétés.

**Théorème 1.1** *les systèmes hyperboliques sont faiblement stables dans  $L^2$  c'est-à-dire qu'il existe une constante  $C$  (donnée dans la preuve ci-dessous) telle que*

$$\|u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq C \|u^0\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

*Les systèmes symétrisables sont fortement stables dans  $L^2$ . Posant  $B^{-1} = \Sigma^2$  ( $\Sigma$  matrice définie positive) on a :*

$$\|\Sigma \cdot u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \|\Sigma \cdot u^0\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

**Remarque :** La réciproque est aussi vraie. Autrement dit, si pour un certain  $k_0$ , la matrice  $A(k_0)$  a des valeurs propres de parties imaginaires non nulles, alors la norme  $L^2$  va croître exponentiellement pour des données initiales 'bien' choisies.

### Démonstration :

(i) On utilise la propriété suivante. Pour chaque  $k \in \mathbb{R}^d$ , dans une base où  $A(k)$  est diagonale, on a que  $e^{-itA(k)} = (e^{it\Lambda_m(k)})$  est aussi une matrice diagonale. On note  $P(k)$  la matrice de changement de base. Reprenant (1.9), on calcule donc

$$\begin{aligned} P^{-1}(k) \cdot \widehat{u}(t, k) \cdot P(k) &= P^{-1}(k) \cdot A(k) \cdot P(k) \cdot P^{-1}(k) \cdot \widehat{u}^0(k) \cdot P(k) \\ &= (e^{it\Lambda_m(k)}) \cdot P^{-1}(k) \cdot \widehat{u}^0(k) \cdot P(k) \in \mathbb{C}^n, \end{aligned}$$

et pour la norme euclidienne sur  $\mathbb{R}^n$ , on en déduit :

$$|P^{-1}(k) \cdot \widehat{u}(t, k) \cdot P(k)| = |P^{-1}(k) \cdot \widehat{u}^0(k) \cdot P(k)|,$$

et

$$\|P^{-1}(k) \cdot \widehat{u}(t, k) \cdot P(k)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \|P^{-1}(k) \cdot \widehat{u}^0(k) \cdot P(k)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

Ceci implique bien le résultat annoncé avec une condition d'uniformité en  $k$  sur l'équivalence des normes  $|P^{-1}(k) \cdot v \cdot P(k)|$  et  $|v|$ . Celle-ci est vraie, mais pas évidente toutefois, par compacité car  $P(k) = P(\frac{k}{|k|})$ .

(ii) On revient à l'écriture différentielle (1.8), et on écrit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \Sigma \cdot \widehat{u}(t, k) &= -i \Sigma \cdot A(k) \cdot B \cdot \Sigma^2 \cdot \widehat{u}(k) \\ &= -i \Sigma \cdot C(k) \cdot \Sigma \cdot \Sigma \cdot \widehat{u}(k) \\ &= -i S(k) \cdot \Sigma \cdot \widehat{u}(k) \end{aligned}$$

où  $S(k)$  est une matrice symétrique. On en déduit que

$$\frac{\partial}{\partial t} |\Sigma \cdot \widehat{u}(t, k)|^2 = -2 \operatorname{Re} \left( i (\Sigma \cdot \widehat{u}(k)) \cdot S(k) \cdot (\Sigma \cdot \widehat{u}(k)) \right) = 0.$$

D'où le résultat annoncé.  $\square$

## 1.5 Equations de transport non linéaires

### 1.5.1 Lois de conservation scalaires

Une extension nonlinéaire simple des équations de transport linéaires (voir Section 1.1) consiste à introduire des vitesses de propagation nonlinéaires. Il s'agit de trouver la solution  $u(t, x)$  à l'équation

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u + \sum_{i=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i} A_i(u) = 0, & t \geq 0, x \in \mathbb{R}^d, \\ u(t = 0, x) = u^0(x) & \text{donnée.} \end{cases} \quad (1.10)$$

Les fonctions données  $A_i \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, d\}$ , sont appelées *flux* et l'équation (1.10) est appelée loi de conservation scalaire (LCS en abrégé). L'interprétation est simple; lorsque, en dimension 1, on intègre (1.10) sur un intervalle  $[a, b]$ , on trouve

$$\frac{d}{dt} \int_a^b u(t, x) dx + A(u(t, b)) - A(u(t, a)) = 0.$$

La 'masse' dans l'intervalle  $[a, b]$  évolue comme la différence des flux entrant et sortant.

Dans le cas  $d = 1$  et  $A(u) = u^2/2$ , on parle de l'équation de Burgers (souvent lorsqu'il y a de la viscosité) ou de l'équation de Hpf.

Le trafic routier fournit un exemple d'application des LCS. On reprend l'équation d'évolution d'une densité (1.1) et on note

- $\varrho(t, x) =$  densité des véhicules à la position  $x \in \mathbb{R}$  de la route,
- $v(\varrho) =$  vitesse des véhicules dans un trafic de densité  $\varrho$ ,
- $A(\varrho) = \varrho v(\varrho)$ .

L'équation devient alors

$$\frac{\partial}{\partial t} \varrho + \frac{\partial}{\partial x} [v(\varrho)\varrho] = 0.$$

Même s'il rend compte de phénomènes caractéristiques, tel que l'embouteillage, le modèle est néanmoins assez grossier et peut être amélioré. Voir [2].

### 1.5.2 Equations de Hamilton-Jacobi

Les équations de Hamilton-Jacobi (EHJ en abrégé) interviennent dans de nombreuses applications : contrôle optimal, théories asymptotiques, propagation de fronts et traitement de l'image (on pourra consulter [8] pour une introduction au sujet). Elles s'écrivent sous la forme

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} v(t, x) + H(\nabla v) = 0, & t \geq 0, x \in \mathbb{R}^d, \\ v(t = 0, x) = v^0(x). \end{cases} \quad (1.11)$$

La fonction donnée  $H \in C^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{R})$  est appelée *hamiltonien*.

Pour le hamiltonien  $H(p) = \frac{|p|^2}{2}$  on parle de l'équation Eikonal.

En dimension un (et seulement dans ce cas), les lois de conservation scalaire et EHJ sont équivalentes en posant

$$u(t, x) = \frac{\partial}{\partial x} v(t, x),$$

avec  $A(\cdot) = H(\cdot)$ .

### 1.5.3 Chimiotactie

Un autre exemple de nonlinéarité provient de la description des mouvements cellulaires. Ici  $u(t, x)$  désigne la densité de bactéries à la position  $x \in \mathbb{R}^2$  ou  $\mathbb{R}^3$ ,  $c$  désigne la concentration du signal chimique qui stimule les bactéries et qui est souvent émis par elles-mêmes. Ce type de mouvement est appelé chimiotactie ((chemotaxis en anglais). Le modèle de Keller-Segel s'écrit alors

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u - \Delta u + \operatorname{div}(u \nabla c) = 0, \\ -\Delta c + \tau c = u(t, x). \end{cases} \quad (1.12)$$

Le paramètre  $\tau$  est ici une constante de temps de dégradation du produit chémoattractant  $c$  et on a exprimé d'une part le mouvement des bactéries (diffusion représentant un côté aléatoire et une dérive déterministe dans le sens des fortes concentrations) et d'autre part la diffusion-dégradation de  $c$ .

On peut montrer que le terme de diffusion dans la première équation de (1.12) est en compétition avec le terme hyperbolique, menant soit à des solutions globales, soit à des concentrations ponctuelles suivant la taille de la donnée initiale.

### 1.5.4 Le système de l'élasticité

L'équation des ondes admet une version nonlinéaire où les vitesses de propagation dépendent du milieu lui-même. En dimension un on arrive à l'extension suivante du système (1.4),

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} v - \frac{\partial}{\partial x} u = 0, & t \geq 0, x \in \mathbb{R}, \\ \frac{\partial}{\partial t} u - \frac{\partial}{\partial x} \sigma(v) = 0. \end{cases}$$

La fonction  $\sigma$  (la déformation) est donnée. Le livre de C. Dafermos [7] fournit une explication détaillée de la dérivation de ce système.

### 1.5.5 Le système de Saint-Venant

Ce système décrit les écoulements fluides en eaux peu profondes (zone côtières, rivières). Un tel écoulement est représenté par :

- $Z(x)$  = hauteur du sol (topographie),
- $h(t, x)$  = hauteur de l'eau,
- $\vec{u}(t, x)$  = vitesse de l'eau.

À la fin du XIXème siècle, Saint-Venant a proposé le modèle suivant, universellement utilisé pour ces calculs,

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} h + \operatorname{div}(h \vec{u}) = 0, & t \geq 0, x \in \mathbb{R}^2, \\ \frac{\partial}{\partial t} h u_i + \operatorname{div}(h \vec{u} u_i) + \frac{g}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} h^2 = -g h \frac{\partial}{\partial x_i} Z. \end{cases}$$

### 1.5.6 Dynamique des gaz compressibles

Le système de la dynamique des gaz compressibles est la variante non-visqueuse du système de Navier-Stokes. Il décrit un gaz en mouvement rapide; les applications usuelles sont les écoulements supersoniques, la physique des plasmas, l'astrophysique. Nous nous restreignons à la dimension un d'espace pour simplifier. Le gaz est décrit par

- $\rho(t, x)$  = densité,
- $u(t, x)$  = vitesse,
- $T(t, x)$  = température,
- $p(\rho, T)$  = loi de pression.

Pour ces trois inconnues, on trouve un système à trois équations

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} \rho + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) = 0, \quad (\text{conservation de la masse}), \\ \frac{\partial}{\partial t} \rho u + \frac{\partial}{\partial x} [\rho u^2 + p(\rho, T)] = 0, \quad (\text{conservation de la qté de mouvement}), \\ \frac{\partial}{\partial t} E + \frac{\partial}{\partial x} [(E + p)u] = 0, \quad (\text{conservation de l'énergie}). \end{array} \right. \quad (1.13)$$

On a utilisé l'énergie totale, qui pour un gaz polytropique s'écrit simplement

$$p(\rho, T) = \rho T, \quad E = \frac{1}{2} \rho u^2 + \frac{\rho T}{\gamma - 1}, \quad 1 < \gamma \leq 3.$$

Pour un gaz monoatomique (hydrogène) on a :  $\gamma = 5/3$  et  $\gamma = 7/5$  pour un gas diatomique (l'azote ou l'oxygène ambiants par exemple).

On pourra consulter l'ouvrage [11] pour des développements sur les lois de pression plus générales.

## 1.6 Systèmes non-linéaires hyperboliques

Les trois derniers exemples ci-dessus motivent d'étudier les systèmes  $n \times n$  en dimension  $d$  d'espace, sous la forme générale conservative

$$\frac{\partial}{\partial t} u_m + \sum_{i=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i} A_m^{(i)}(u) = 0, \quad m \in \{1, 2, \dots, n\}. \quad (1.14)$$

Comme dans la Section 1.3, on considère les ondes planes  $v(t, y)$  de direction  $\omega \in \mathbb{S}^{d-1}$ , ce qui nous amène au système conservatif de dimension un :

$$\frac{\partial}{\partial t} v_m + \frac{\partial}{\partial y} A_m(\omega; v) = 0, \quad m \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad (1.15)$$

et on a pose,

$$\begin{aligned} A_m(v) &= A_m(\omega, v) := \sum_{i=1}^d \omega_i A_m^{(i)}(v), \\ F_{m,l}^{(i)}(u) &:= \frac{\partial}{\partial u_l} A_m^{(i)}(u) \in M_{n \times n}, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, d\}, \\ F_{m,l}(\omega; u) &:= \frac{\partial}{\partial u_l} A_m(\omega; u) = \sum_{i=1}^d \omega_i F_m^{(i)}(u) \in M_{n \times n}. \end{aligned}$$

### 1.6.1 Hyperbolicité

**Définition 1.3** Le système (1.15) est dit hyperbolique si la matrice  $F_{m,l}(\omega; u)$  est diagonalisable quelque soit  $u \in \mathbb{R}^n$ ,  $\omega \in \mathbb{S}^{d-1}$ . Le système (1.14) est dit hyperbolique si toutes ses ondes planes le sont.

**Remarque :** Pour ses solutions régulières (on verra que ce n'est pas toujours le cas), ce système peut aussi être écrit sous la forme non conservative

$$\frac{\partial}{\partial t} u_m + \sum_{i=1}^d \sum_{l=1}^n \frac{\partial A_m^{(i)}(u)}{\partial u_l} \frac{\partial}{\partial x_i} u_l = 0.$$

Ou encore, sous forme condensée :

$$\frac{\partial}{\partial t} u + \sum_{i=1}^d F^{(i)}(u) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} u = 0. \quad (1.16)$$

### 1.6.2 Changements d'inconnues

Le résultat suivant est essentiel car, en général, il est plus simple de calculer la matrices  $F$  sur d'autres inconnues que  $u$  elle-mêmes.

**Théorème 1.2** Soit un changement de variable :  $u = \Phi(w)$ , avec  $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  régulière. On considère le nouveau système équivalent au système (1.16) :

$$\frac{\partial}{\partial t} w + C(w) \cdot \frac{\partial}{\partial x} w = 0.$$

La matrice  $C$  est diagonalisable si et seulement si  $F = \frac{\partial}{\partial u} A(u)$  l'est. En d'autres termes l'hyperbolicité du système est indépendante des inconnues choisies.

**Démonstration :** On se restreint à la dimension un pour simplifier les notations. Partant du système (1.16) et en introduisant le changement de variable  $u_m = \Phi_m(w)$ , on trouve, pour tout  $m \in \{1, 2, \dots, n\}$ ,

$$\sum_{l=1}^n \frac{\partial \Phi_m(w)}{\partial w_l} \frac{\partial}{\partial t} w_l + \sum_{l,k=1}^n F_{m,l}(u) \frac{\partial \Phi_l(w)}{\partial w_k} \frac{\partial}{\partial x} w_k = 0.$$

On pose  $D\Phi = \left( \frac{\partial \Phi_m(w)}{\partial w_l} \right) \in M_{n \times n}$  et on en déduit la matrice  $C$  :

$$C(w) = D\Phi^{-1}(w) \cdot F(u) \cdot D\Phi(w).$$

Donc  $C$  et  $F$  sont bien diagonalisables simultanément.  $\square$

### 1.6.3 Entropies

**Définition 1.4** On appelle couple entropie-flux  $(S(\cdot), \eta^{(i)}(\cdot))$  des fonctions telles que toute solution régulière du système (1.15) satisfasse la loi de conservation supplémentaire

$$\frac{\partial}{\partial t} S(u) + \sum_{i=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i} \eta^{(i)}(u) = 0.$$



Bien sûr les  $u_m$  elles-mêmes sont des entropies mais on en recherche d'autres, souvent on imposera que  $S$  soit strictement convexe.

il est possible de réduire l'existence d'un tel couple à une condition sur  $S$  seule.

**Théorème 1.3** *Il existe un couple entropie-flux  $(S(\cdot), \eta^{(i)}(\cdot))$  si et seulement si il existe  $S(\cdot)$  telle que les matrices*

$$\left( \sum_{m=1}^n \frac{\partial^2 S(u)}{\partial u_m \partial u_k} F_{m,l}^{(i)} \right)_{lk} \in M_{n \times n},$$

soient symétriques pour  $i \in \{1, 2, \dots, d\}$ .

**Démonstration :** Si une telle entropie existe, on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} S(u) &= \sum_{m=1}^n \frac{\partial S(u)}{\partial u_m} \frac{\partial u_m}{\partial t} \\ &= - \sum_{i=1}^d \sum_{m,l=1}^n \frac{\partial S(u)}{\partial u_m} F_{m,l}^{(i)} \frac{\partial u_l}{\partial x_i} \\ &= - \sum_{i=1}^d \frac{\partial \eta^{(i)}(u)}{\partial x_i} \\ &= - \sum_{i=1}^d \sum_{l=1}^n \frac{\partial \eta^{(i)}(u)}{\partial u_l} \frac{\partial u_l}{\partial x_i}. \end{aligned}$$

Identifiant termes à termes (on suppose que cela est possible car il y a des solutions de toutes valeurs et pour tout vecteur dérivé), on obtient

$$\frac{\partial \eta^{(i)}(u)}{\partial u_l} = \sum_{m=1}^n \frac{\partial S(u)}{\partial u_m} F_{m,l}^{(i)}, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, d\}, \forall l \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

La question est donc de vérifier que le terme de droite est un gradient. Grâce à l'identité de Schwartz, ceci est possible si et seulement si

$$\frac{\partial^2 \eta^{(i)}(u)}{\partial u_l \partial u_k} = \frac{\partial^2 \eta^{(i)}(u)}{\partial u_k \partial u_l},$$

ou en d'autres termes si la matrice d'entrée  $(k, l)$  suivante est symétrique

$$\frac{\partial}{\partial u_k} \sum_{m=1}^n \frac{\partial S(u)}{\partial u_m} F_{m,l}^{(i)} = \sum_{m=1}^n \frac{\partial^2 S(u)}{\partial u_m \partial u_k} F_{m,l}^{(i)} + \sum_{m=1}^n \frac{\partial S(u)}{\partial u_m} \frac{\partial F_{m,l}^{(i)}}{\partial u_k}.$$

Le tout dernier terme s'écrit aussi  $\frac{\partial^2 A_m^{(i)}}{\partial u_k \partial u_l}$  et il est donc symétrique. On est donc bien arrivé à la condition énoncée.  $\square$

### 1.6.4 Variables symétriques

**Théorème 1.4** *Le système de lois de conservation (1.16) admet un entropie  $S(\cdot)$  strictement convexe si et seulement si il est symétrisable. Les variables symétriques sont*

$$w_m = \frac{\partial S(u)}{\partial u_m}.$$

**Démonstration :** Nous ne démontrons que l'énoncé direct (Voir [7, 22] pour la réciproque). Nous calculons

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} w_m &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 S(u)}{\partial u_m \partial u_k} \frac{\partial u_k}{\partial t} \\ &= - \sum_{i=1}^d \sum_{k,l=1}^n \frac{\partial^2 S(u)}{\partial u_m \partial u_k} F_{k,l}^{(i)} \frac{\partial u_l}{\partial x_i}.\end{aligned}$$

Il est alors nécessaire de passer en notations matricielles et poser

$$D^2 S(u) = \left( \frac{\partial^2 S(u)}{\partial u_m \partial u_l} \right),$$

matrice symétrique définie positive. On a donc

$$\frac{\partial w}{\partial x_i} = D^2 S(u) \frac{\partial u}{\partial x_i},$$

et l'expression

$$\frac{\partial}{\partial t} w = - \sum_{i=1}^d D^2 S(u) \cdot F^{(i)} \cdot (D^2 S(u))^{-1} \frac{\partial w}{\partial x_i}.$$

Pour arriver à la forme symétrique on écrit

$$(D^2 S(u))^{-1} \frac{\partial}{\partial t} w = - \sum_{i=1}^d F^{(i)} \cdot (D^2 S(u))^{-1} \frac{\partial w}{\partial x_i}.$$

et on remarque que les matrices  $(D^2 S(u))^{-1}$  et  $F^{(i)} \cdot (D^2 S(u))^{-1}$  sont symétriques.

Remarquons également que l'entropie a une expression simple en fonction des  $w_m$  :

$$S(u) = S^*(w)$$

où  $S^*$  désigne la transformée de Legendre de  $S$ .  $\square$

## 1.7 Exercices

**Exercice :** (Système de Saint-Venant)

En dimension un, pour  $Z = 0$ , le système de Saint-Venant devient

$$\begin{cases} \partial_t h + \partial_x(hu) = 0, \\ \partial_t hu + \partial_x(hu^2 + \frac{1}{2}gh^2) = 0, \end{cases}$$

$\Downarrow$

$$\begin{cases} \partial_t h + \partial_x(hu) = 0, \\ \partial_t u + u \cdot \partial_x u + g \frac{\partial}{\partial x} h = 0, \end{cases}$$

ou encore

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} h \\ u \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u & h \\ g & u \end{pmatrix} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} h \\ u \end{pmatrix} = 0.$$

1. Montrer que les valeurs propres de  $F$  sont  $\lambda_+ = u + \sqrt{gh}$  et  $\lambda_- = u - \sqrt{gh}$ . Le système est diagonalisable sauf éventuellement pour  $h = 0$ .

2. Montrer que pour  $h = 0$  le système n'est pas hyperbolique.

3. Montrer que ce système admet l'entropie  $E = \frac{1}{2}hu^2 + \mu h^2$  et calculer la constante  $\mu > 0$ .

**Exercice :** (Dynamique des gaz)

(i) Montrer que pour une loi polytropicque le système de la dynamique des gaz est hyperbolique. (On pourra travailler avec les variables  $\rho, u, T$ ).

(ii) Montrer que les valeurs propres de la matrice  $F$  correspondante sont  $u, u+c, u-c$  où  $c$  est appelée *vitesse du son* que l'on calculera.

(iii) Pour une loi de pression  $p = p(\rho)$  (gaz barotropique) trouver une condition d'hyperbolicité.

**Exercice :** (Élasticité)

Trouver la condition d'hyperbolicité du système de l'élasticité (1.5.4) et les valeurs propres correspondantes.

**Exercice :** (Forme symétrique des systèmes)

Montrer l'écriture générale d'un système hyperbolique de lois de conservation qui admet une entropie strictement convexe

$$\frac{\partial}{\partial t} D_w S^*(w) + \sum_{i=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i} D_w h^{(i)}(w) = 0,$$

où on a défini  $h^{(i)}(w) = \eta^{(i)}(u)$ .



# Chapitre 2

## Caractéristiques, chocs, détente

L'objectif de ce chapitre est de construire des solutions régulières pour les LCS (voir Section 1.5.1) grâce à la méthode des caractéristiques. Cette construction permet de mettre en évidence l'apparition de singularités et motive de rechercher d'autres solutions appelées 'ondes'. Les ondes de choc, solutions discontinues, mettent en évidence la difficulté principale liée aux équations hyperboliques non linéaires.

### 2.1 Equation de transport et méthode des caractéristiques

Considérons d'abord l'équation de transport sous forme forte :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u + b(t, x) \cdot \nabla_x u = 0, & t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^d, \\ u(t=0) = u^0(x) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d). \end{cases} \quad (2.1)$$

On peut construire des solutions explicites de cette équation grâce à la méthode des caractéristiques. Pour cela on a besoin des hypothèses de Cauchy-Lipschitz (C.L.):  $\exists M_1(T, R), M_2(T)$  deux constantes telles que pour tout  $|t| \leq T$  on ait :

$$\begin{cases} |b(t, x) - b(t, y)| \leq M_1(T, R)|x - y| & \forall x, y \in B_R \\ |b(t, x)| \leq M_2(T)(1 + |x|) & \forall x \in \mathbb{R}^d \end{cases} \quad (2.2)$$

Avec ces hypothèses on peut définir les caractéristiques :

**Définition 2.1** On appelle caractéristiques de l'équation de transport (2.1), les trajectoires du système différentiel:

$$\begin{cases} \dot{X}(t; y) = b(t, X(t; y)), \\ X(t=0; y) = y \in \mathbb{R}^d. \end{cases} \quad (2.3)$$

On rappelle que ces trajectoires existent pour tout temps et que l'application, appelée *flot*

$$y \in \mathbb{R}^d \rightarrow X(t; y) \in \mathbb{R}^d,$$

est un difféomorphisme de classe  $\mathcal{C}^1$  pour  $b \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^{d+1})$ .

**Théorème 2.1** Sous les hypothèses de Cauchy-Lipschitz (2.2) et en prenant  $b \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$  alors il existe une unique solution  $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$  de l'équation de transport (2.1), donnée par la méthode des caractéristiques

$$\forall t, s \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}^d, \quad u(t, X(t; y)) = u(s, X(s; y)) = u^0(y).$$

On dit que la solution de l'équation de transport est "constante le long des caractéristiques".

**Démonstration :** Utilisant la règle de dérivation composée, on calcule

$$\frac{d}{dt}u(t, X(t, y)) = \frac{\partial}{\partial t}u + \nabla_x u \cdot \dot{X},$$

or  $\dot{X}(t, y) = b(t, X(t, y))$ , d'où

$$\frac{d}{dt}u(t, X(t, y)) = 0 \iff \frac{\partial}{\partial t}u + b(t, x) \cdot \nabla_x u = 0,$$

et la formule énoncée est donc démontrée ainsi que l'unicité. Pour conclure le Théorème 2.1, il suffit de rappeler que  $y \mapsto X(t, y)$  est un difféomorphisme de classe  $C^1$  et la formule des caractéristiques définit donc bien une solution  $u(t, x)$  en tout point.

□

**Proposition 2.1** (*Propriétés d'hyperbolicité*) La solution de l'équation de transport (2.1) vérifie les propriétés :

(i)  $u(t, x)$  ne dépend que de  $u^0(y)$  avec  $|y| \leq |x| + \|b\|_{L^\infty}|t|$ , en d'autres termes, il y a vitesse finie de propagation,

(ii) il y a propagation des singularités,

(iii)  $\min_{y \in \mathbb{R}^d} u^0(y) \leq u(t, x) \leq \max_{y \in \mathbb{R}^d} u^0(y)$ ,

(iv) pour  $b = Cst$ , l'application  $S(t)[u^0] = u(t, x)$  définit un groupe sur  $C^1(\mathbb{R}^d)$ .

Les propriétés (i)–(iii) sont bien sûr opposées aux propriétés des solutions de l'équation de la chaleur qui dépendent instantanément de toute la donnée initiale, avec un effet régularisant.

**Remarque :** Les propriétés (i)–(ii) sont typiques du caractère hyperbolique des équations de transport. Elle s'opposent aux propriétés de vitesse *infinie* de propagation et aux effets régularisants des équations paraboliques telle l'équation de la chaleur,

$$\frac{\partial}{\partial t}u - \frac{1}{2}\Delta u = 0.$$

Propriétés qui se lisent sur la solution qui est donnée par la convolution

$$u_c(t, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{|x-y|^2}{2t}} u^0(y) dy.$$

**Démonstration :** Ces propriétés se déduisent immédiatement de la formule du Théorème 2.1. Notons simplement que (v) signifie

$$S(0) = Id, \quad S(t+s) = S(t) \circ S(s) \iff X(t+s; y) = X(t; X(s; y)).$$

**Exercice :** Montrer que la solution de l'équation (1.1) peut s'écrire comme la solution d'une équation intégrale sur  $B(t) = n(t, a = 0)$ .

**Exercice :** Considérons l'équation

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}u + b(x)\frac{\partial}{\partial x}u = 0, & t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^+, \\ u(t=0, x) = u^0(x), \end{cases}$$

avec  $b \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+; \mathbb{R})$  donné sous-linéaire.

(i) Montrer que si  $b(0) < 0$ , la solution de cette équation est unique.

(ii) Montrer que si  $b(0) > 0$ , on a besoin de se donner en plus  $u(t, x = 0)$ .

(iii) Si  $b(0) = 0$ , donner une condition supplémentaire sur  $b$  pour avoir une unique solution sans se donner  $u(t, x = 0)$ .

## 2.2 Equation de transport, solutions faibles

On peut étendre la théorie précédente pour travailler avec des données initiales moins régulières que  $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d)$ , on utilise alors la notion de *solution au sens des distributions*.

**Définition 2.2** Soit l'équation de transport

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u + b(t, x) \cdot \nabla_x u = 0, & t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^d, \\ u(t = 0, x) = u^0(x) \in L^1_{loc}. \end{cases}$$

On appelle *solution au sens des distributions (dans  $\mathcal{D}'$  en court)* une fonction  $u(t, x) \in L^1_{loc}$  telle que, pour toute fonction test  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$  on a :

$$-\int_0^{\pm\infty} \int_{\mathbb{R}^d} u(t, x) \left[ \frac{\partial}{\partial t} \varphi + \operatorname{div}(b\varphi) \right] dt dx = \int_{\mathbb{R}^d} u^0(x) \varphi(0, x) dx.$$

Si  $u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}; L^p(\mathbb{R}^d))$  pour un  $p \in [1, +\infty]$ , alors on peut utiliser une forme plus maniable (et équivalente) : pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$\int_{\mathbb{R}^d} u(t, x) \varphi(t, x) dx - \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} u(s, x) \left[ \frac{\partial}{\partial s} \varphi(s, x) + \operatorname{div}(b\varphi) \right] ds dx = \int_{\mathbb{R}^d} u^0(x) \varphi(0, x) dx.$$

La motivation de cette définition provient du fait que les solutions classiques construites dans la section 2.1 sont des solutions au sens des distributions. On utilise simplement la formule d'intégration par parties (et les termes de bords sont nuls puisque les fonctions tests sont à support compact).

Il est assez facile de montrer que pour  $u^0 \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$  <sup>(1)</sup> il existe une unique solution au sens des distributions de l'équation de transport (2.1),  $u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}; \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d))$  qui vérifie de plus les propriétés de la Proposition 2.1, le semi-groupe est alors défini sur  $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$ . Il en est de même pour  $u^0 \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$  et la solution appartient aux espaces  $L^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$  et aussi  $u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}; L^p_{loc}(\mathbb{R}^d))$  avec un semi-groupe défini sur  $L^\infty(\mathbb{R}^d)$ . La formule des caractéristiques est encore vraie (et elle a bien un sens)

$$\forall t, s \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}^d, \quad u(t, X(t; y)) = u(s, X(s; y)) = u^0(y).$$

Nous ne donnons pas une démonstration complète mais simplement indiquons que ce résultat s'obtient en passant à la limite dans une suite de solution classiques  $u_n(t, x)$  correspondant à des données initiales  $u_n^0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d)$  telles que  $u_n^0 \rightarrow u^0$  dans  $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$  (resp. presque partout) et  $\min u^0 \leq u_n^0 \leq \max u^0$ .

Un exemple typique des solutions faibles que l'on veut calculer sont les *fronts*, ce qui correspond à une donnée initiale ayant une discontinuité ponctuelle.

Considérons maintenant un autre exemple pour illustrer la notion de solution au sens des distributions. Il s'agit de la variante conservative de l'équation de transport

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u + \operatorname{div}(bu) = 0 \\ u(t = 0, x) = u^0(x) \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d). \end{cases} \quad (2.4)$$

<sup>1</sup>On note  $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$  l'espace des fonctions continues qui tendent vers 0 à l'infini.

Nous allons voir, dans la Section 2.3, qu'il s'agit bien de la donnée initiale naturelle pour cette forme et non plus  $L^\infty$  comme pour la forme forte. On introduit alors la définition :

**Définition 2.3** On appelle solution au sens des distributions de l'équation (2.4), un fonction  $u(t, x) \in L^1_{\text{loc}}$  telle que, pour toute fonction test  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$  on a :

$$-\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^d} u(t, x) \left[ \frac{\partial}{\partial t} \varphi + b \cdot \nabla_x \varphi \right] dt dx = \int_{\mathbb{R}^d} u^0(x) \varphi(0, x) dx.$$

Pour  $u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d))$  on peut utiliser la définition équivalente :

$$\int_{\mathbb{R}^d} u(t, x) \varphi(t, x) dx - \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} u(s, x) \left[ \frac{\partial}{\partial s} \varphi(s, x) + b \cdot \nabla_x \varphi \right] ds dx = \int_{\mathbb{R}^d} u^0(x) \varphi(0, x) dx.$$

**Exercice :** On note  $H(x)$  la fonction de Heavyside  $H(x) = \mathcal{I}_{\{x>0\}}$ . Montrer que, au sens des distributions,  $\frac{\partial}{\partial x} H(x) = \delta(x)$ , où  $\delta$  désigne la masse de Dirac.

**Exercice :** On considère l'équation de renouvellement avec une fonction  $b \in C^1_{\text{comp}}$

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u(t, x) + \frac{\partial}{\partial x} u(t, x) = 0, & t \geq 0, x \geq 0, \\ u(t, x = 0) = \int_{\{a \geq 0\}} b(a) u(t, a) da, \\ u(t = 0, x) = u^0(x) \quad \text{donné.} \end{cases}$$

On pose  $B(t) = \int_{\{a \geq 0\}} b(a) u(t, a) da$ .

1. Pour  $x > t$ , donner  $u(t, x)$  en fonction de  $u^0$ .
2. Pour  $x < t$ , donner  $u(t, x)$  en fonction de  $B$ .
3. Trouver une relation du type  $B(t) = \int_{\{0 \leq s \leq t\}} K(t, s) B(s) + H(t)$  et donner les fonctions  $K$  et  $H$  (équation de Voltera).

## 2.3 Advection

Considérons à nouveau la variante conservative de l'équation de transport

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u + \text{div}(bu) = 0, \\ u(t = 0, x) = u^0(x) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d). \end{cases} \quad (2.5)$$

Il s'agit en fait d'une variante de l'équation de transport (2.1) mais qui a une structure assez intéressante.

**Théorème 2.2** (Solutions fortes) Sous les hypothèses de Cauchy-Lipschitz (2.2) et en prenant  $b \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$ ,  $\text{div} b \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$ , et pour tout  $u^0 \in \mathcal{C}^1$ , il existe une unique solution  $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$  donnée par la formule :

$$u(t, X(t, y)) J(t, y) = u^0(y), \quad (2.6)$$

avec

$$J(t, y) = e^{\int_0^t (\text{div} b)(s, X(s, y)) ds} = \det \left( \frac{\partial X(t, y)}{\partial y} \right).$$



**Remarque:** On rappelle que la quantité  $J(t, y)$  n'est autre que le Jacobien du flot des caractéristiques (2.3) on a

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial X}{\partial y}(t, y) = D_x b(t, X(t; y)) \cdot \frac{\partial X}{\partial y}(t, y),$$

et (ce n'est pas un calcul évident)

$$\begin{cases} \dot{J}(t, y) = \operatorname{div} b(t, X(t, y)) J(t, y), \\ J(0, y) = 1. \end{cases}$$

On en déduit donc que

$$J(t, y) = \det\left(\frac{\partial X}{\partial y}\right). \quad (2.7)$$

**Démonstration :** On utilise à nouveau l'idée de la méthode des caractéristiques

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} u + b \cdot \nabla_x u + (\operatorname{div} b) u &= 0, \\ \Leftrightarrow \\ \frac{d}{dt} u(t, X(t, y)) + (\operatorname{div} b)(t, X(t, y)) u(t, X(t, y)) &= 0, \\ \Leftrightarrow \\ \frac{d}{dt} [u(t, X(t, y)) J(t, y)] &= 0. \end{aligned}$$

□

L'intérêt principal de cette forme de l'équation de transport apparaît surtout dans une propriété que nous énonçons maintenant :

**Proposition 2.2** (*Solutions faibles, conservation*) *Sous les hypothèses du Théorème 2.2 sur  $b$ , on suppose que  $u^0 \in L^1(\mathbb{R}^d)$  alors l'équation (2.5) admet une unique solution au sens des distributions donnée par la formule (2.6) et*

(i)  $u(t, x) \in \mathcal{C}(\mathbb{R}; L^1(\mathbb{R}))$  et  $|u| \in \mathcal{C}(\mathbb{R}; L^1(\mathbb{R}))$ ,

(ii)  $\int_{\mathbb{R}^d} u(t, x) dx = \int_{\mathbb{R}^d} u^0(x) dx$  et  $\int_{\mathbb{R}^d} |u(t, x)| dx = \int_{\mathbb{R}^d} |u^0(x)| dx$ ,

(iii)  $u^0 \geq 0 \implies u(t, x) \geq 0$ ,

(iv) on a aussi

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} |u| + \operatorname{div} (b|u|) = 0 & \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}), \\ |u(t=0, x)| = |u^0(x)|. \end{cases}$$

**Remarque :** En d'autres termes, on a le droit d'intégrer une équation conservative et d'utiliser la règle :

$$\operatorname{sign}(u) \frac{\partial}{\partial t} u = \frac{\partial}{\partial t} |u|, \quad \operatorname{sign}(u) b \cdot \nabla_x u = b \cdot \nabla_x |u|.$$

**Démonstration :** On commence par montrer (ii). Pour cela on utilise la forme explicite de la solution, voir le Théorème 2.2, pour écrire

$$|u(t, X(t, y))| J(t, y) = |u^0(y)|.$$

On calcule alors (voir l'égalité (2.7))

$$\begin{aligned} \int |u(t, X(t, y))| J(t, y) dy &= \int |u^0(y)| dy \\ &= \int |u(t, X)| \det\left(\frac{\partial X}{\partial y}\right) dy \\ &= \int |u(t, X)| dX. \end{aligned}$$

Ce qui prouve que  $u(t) \in L^1(\mathbb{R}^d)$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$  et aussi la seconde égalité dans (ii). Puisque l'intégrabilité est démontrée, on déduit la première égalité de (ii) par le même argument sans les valeurs absolues.

La propriété de continuité (i) peut se démontrer par densité. Soit  $u_n^0 \in \mathcal{C}_{\text{comp}}^1 \rightarrow u^0$  dans  $L^1(\mathbb{R}^d)$ . La suite  $u_n(t, x)$  des solutions correspondantes sont  $\mathcal{C}^1$  et à support borné en  $x$  pour des temps bornés (grâce à la solution explicite). Elle appartient donc à  $\mathcal{C}(\mathbb{R}, L^1(\mathbb{R}))$ . Par ailleurs en utilisant (ii) pour  $u_n - u$  on déduit

$$\int_{\mathbb{R}^d} |u_n - u|(t, x) dx = \int_{\mathbb{R}^d} |u_n^0 - u^0|(x) dx \rightarrow 0, \quad \text{for all } t \in \mathbb{R}.$$

Ceci prouve la convergence de  $u_n$  vers  $u$  dans l'espace  $\mathcal{C}(\mathbb{R}, L^1(\mathbb{R}))$ .

La propriété (iii) se déduit directement de la forme de la solution dans le Théorème 2.2 car  $J \geq 0$ .

Pour montrer la propriété (iv), on raisonne en deux temps, d'abord pour des données initiales régulières, puis pour les solutions faibles. D'abord, pour les solutions  $u(t, x) \in \mathcal{C}^1$ , on considère des fonctions régulières ( $\mathcal{C}^1$ )  $S : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . En utilisant la règle de dérivation composée, on trouve

$$\frac{\partial}{\partial t} S(u) + \text{div}(bS(u)) + \text{div}b [uS'(u) - S(u)] = 0.$$

On voudrait utiliser cette règle pour  $S(\cdot) = |\cdot|$ , qui n'est pas  $\mathcal{C}^1$ . Pour cela on considère une famille de fonction convexes  $\mathcal{C}^1$ ,  $S_\varepsilon : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $S_\varepsilon(0) = 0$ ,  $S_\varepsilon(u) = |u| - \varepsilon$  pour  $|u| \geq 2\varepsilon$ . Remarquons qu'alors on a

$$0 \leq |u| - S_\varepsilon(u) \leq \min(u, \varepsilon), \quad 0 \leq S_\varepsilon(u) - uS'_\varepsilon(u) \leq \min(u, \varepsilon).$$

Comme on a

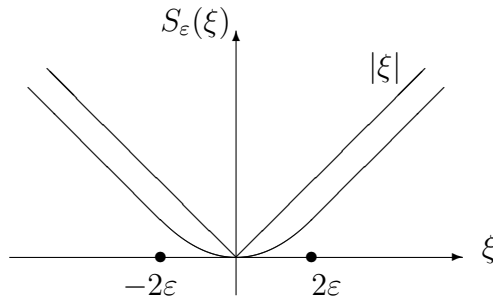


Figure 2.1: LA FONCTION  $S_\varepsilon(\xi)$  QUI RÉGULARISE  $|\xi|$ .

$$\frac{\partial}{\partial t} S_\varepsilon(u) + \text{div}(bS_\varepsilon(u)) + \text{div}b [uS'_\varepsilon(u) - S_\varepsilon(u)] = 0.$$

Lorsque  $\varepsilon$  tend vers zero on obtient (au sens des distributions)

$$\frac{\partial}{\partial t} |u| + \text{div}(b|u|) + 0 = 0.$$

En effet, grâce aux propriétés énoncées ci-dessus de  $S_\varepsilon$ , on a  $S_\varepsilon(u) \rightarrow |u|$  dans  $\mathcal{C}((-T, T); L^1(\mathbb{R}^d))$  et le troisième terme du membre de gauche tend bien vers zéro car  $\operatorname{div} b$  est borné et

$$S_\varepsilon(u) - uS'_\varepsilon(u) \rightarrow 0 \quad \text{dans} \quad \mathcal{C}((-T, T); L^1(\mathbb{R}^d)).$$

Ceci établit (iv) pour les solutions régulières. Ensuite, pour les solutions  $u(t, x) \in \mathcal{C}(\mathbb{R} : L^1(\mathbb{R}^d))$ , on considère une suite  $u_n^0 \in \mathcal{C}_{\text{comp}}^1(\mathbb{R}^d)$ ,  $u_n^0 \rightarrow u^0$ . On a vu que  $u_n \rightarrow u$  dans  $\mathcal{C}(\mathbb{R} : L^1(\mathbb{R}^d))$ . On peut alors passer à la limite au sens des distributions dans (iv) écrite pour  $u_n$  et le résultat général est démontré.  $\square$

**Remarque :** On peut aussi remarquer que, prenant  $\varphi$  solution de

$$\partial_t \varphi + b \cdot \nabla_x \varphi = 0.$$

on a  $\varphi(t, X(t, y)) = \varphi^0(y)$ . On calcule donc

$$\begin{aligned} \int |u^0(y)| \varphi^0(y) dy &= \int |u(t, X(t, y))| J(t, y) \varphi(t, X(t, y)) dy \\ &= \int |u(t, X(t, y))| \varphi(t, X(t, y)) J(t, y) (\det(\frac{\partial X}{\partial y}))^{-1} dx \\ &= \int |u(t, x)| \varphi(t, x) dx, \end{aligned}$$

après le changement de variables  $y \rightarrow x = X(t, y)$ . On a donc montré que :

$$\int |u^0(y)| \varphi^0(y) dy = \int |u(t, x)| \varphi(t, x) dx,$$

pour toute fonction  $\varphi$  vérifiant (2.1). Ceci est une forme faible de la définition de solution dans  $\mathcal{D}'$  qu'il faut manipuler avec précaution.

## 2.4 Lois de conservation scalaires et singularités

On considère maintenant une équation non-linéaire, ce sont les Lois de Conservation Scalaire (L.C.S) :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u + \frac{\partial}{\partial x} A(u) = 0, \\ u(t = 0, x) = u^0(x). \end{cases} \quad (2.8)$$

Le flux  $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  (régulier) est donné et on pose  $a(u) = A'(u) \in \mathcal{C}^1$  (au moins).

Soit  $u(t, x)$  une solution suffisamment régulière de la L.C.S. (2.8), on appelle caractéristiques les trajectoires du système différentiel

$$\begin{cases} \dot{X}(t; y) = \tilde{a}(t, X(t; y)) = a(u(t, X(t; y))), \\ X(0; y) = y \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (2.9)$$

Ces courbes existent dès que  $\tilde{a}$  est localement lipschitzienne et sous linéaire (voir Section 2.1)

**Proposition 2.3** (*Existence pour des temps petits*) On se donne une solution régulière de (2.8) alors :

- (i) elle vérifie  $u(t, X(t, y)) = u^0(y)$ ,
- (ii) les caractéristiques sont des droites  $X(t, y) = y + t a(u(0, y))$ ,
- (iii) pour des temps assez petits, la solution est donnée par la formule

$$u(t, y + t a(u^0(y))) = u^0(y). \quad (2.10)$$

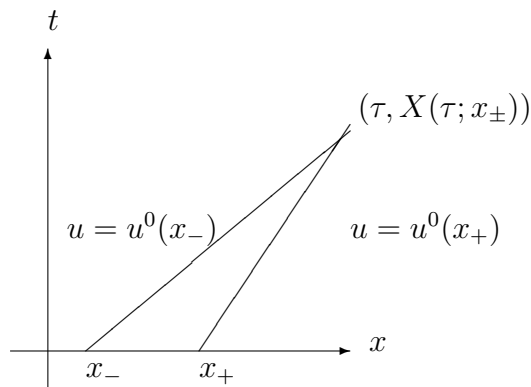


Figure 2.2: CROISEMENT DES CARACTÉRISTIQUES ET CRÉATION DE LA SINGULARITÉ.

Par contre les solutions globales régulières sont rares. On a en effet :

**Théorème 2.3** *On suppose  $A$  convexe (a croissante) et qu'il existe deux points tels que  $u^0(x_+) < u^0(x_-)$  et  $x_+ > x_-$ , alors il n'y a pas de solution globale régulière à (2.8).*

*Plus généralement, si  $a(u^0(x_+)) < a(u^0(x_-))$  alors il n'y a pas de solution globale régulière.*

**Démonstration de la Proposition 2.3:**

(i) L'équation (2.8) est équivalente à l'équation de transport

$$\frac{\partial}{\partial t} u + a(u(t, x)) \frac{\partial}{\partial x} u = 0.$$

On applique alors la formule du Théorème 2.1.

(ii) On introduit cette valeur de  $u$  dans la définition des caractéristiques (2.9), ce qui donne :

$$\dot{X}(t; y) = a(u^0(y)),$$

dont les solutions sont bien des droites.

(iii) La formule (2.10) se déduit immédiatement de (i) et (ii). L'existence d'une solution est possible tant que  $y \rightarrow y + ta(u^0(y))$  est inversible i.e. croissante strictement, ce qui est bien le cas pour des temps assez petits.  $\square$

**Démonstration du Théorème 2.3:** De l'hypothèse de décroissance on déduit que  $a(u^0(x_+)) > a(u^0(x_-))$  et les caractéristiques se croisent donc en temps positif. Si il y avait des solutions assez régulières, on définirait alors deux valeurs pour  $u(t, x)$  à ce point de croisement grâce à la Proposition 2.3 (i) ce qui est absurde. Plus précisément, il ne peut y avoir de solution au-delà du temps  $\tau$  tel que :

$$X(\tau, x_+) = x_+ + \tau a(u^0(x_+)) = x_- + \tau a(u^0(x_-)) = X(\tau, x_-),$$

$$\tau = \begin{cases} -\frac{x_+ - x_-}{a(u^0(x_+)) - a(u^0(x_-))} & \text{pour } a(u^0(x_+)) - a(u^0(x_-)) < 0, \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

$\square$

La création d'une onde de choc, à partir d'une donnée initiale régulière décroissante, est montrée dans la Figure 2.3.

**Exercice :** Pour une loi de conservation générale soit  $T^* = \inf_{x>y} \frac{x-y}{[a(u^0(x))-a(u^0(y))]_-}$ . Montrer que :

- (i) si  $T^* = \infty$ , il existe une solution globale  $\mathcal{C}^1$ ,
- (ii) si  $T^* < +\infty$ , il existe une solution  $\mathcal{C}^1([0, T^*[\times\mathbb{R})$ , au-delà elle ne peut exister.
- (iii) Pour un flux  $A(\cdot)$  convexe et une donnée initiale croissante, montrer qu'il existe une solution classique globale.

Pour le flot routier, cette situation s'interprète par une discontinuité de vitesse lorsque les véhicules à l'arrière arrivent plus vite que ceux de devant (c'est l'embouteillage).

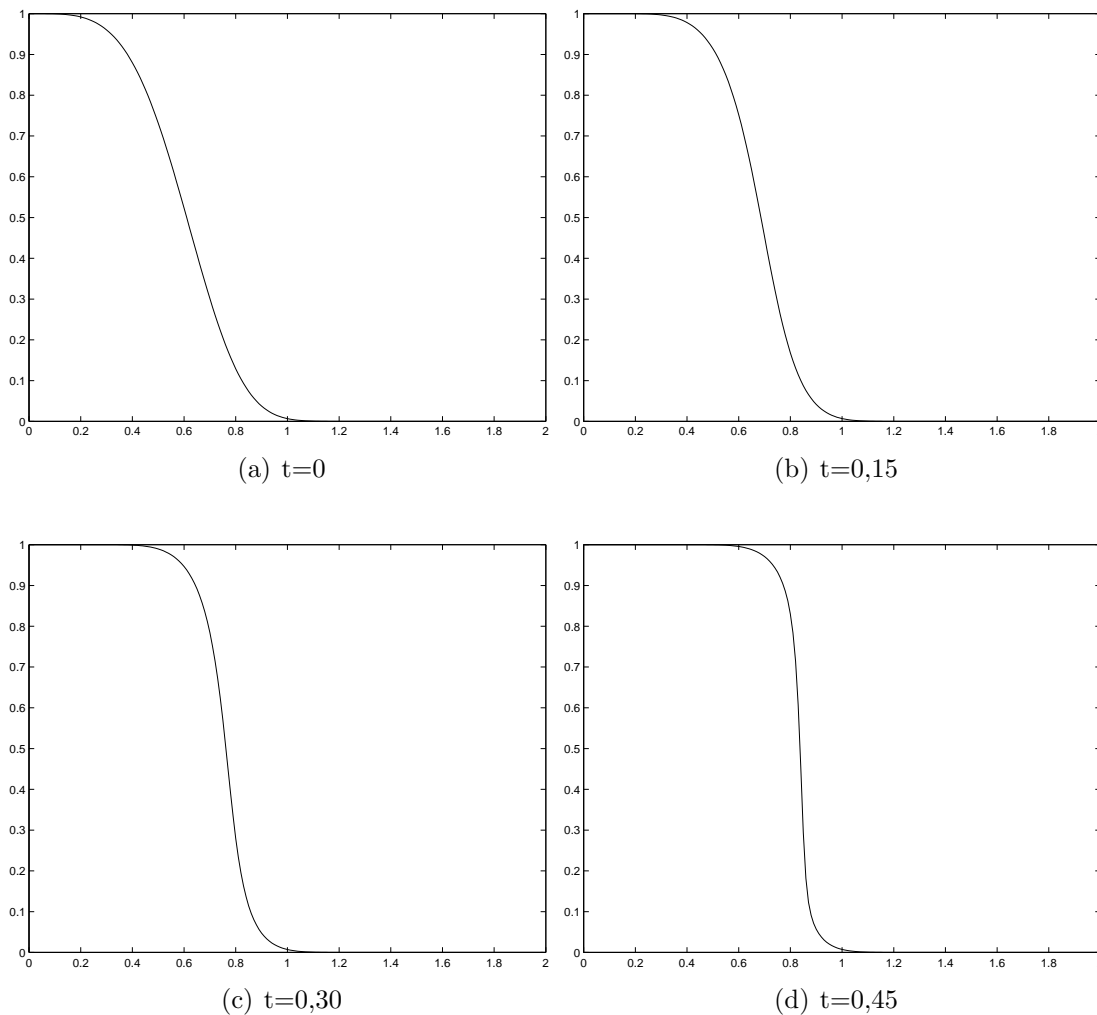


Figure 2.3: ÉQUATION DE BURGERS-HOPF, LA DONNÉE INITIALE DÉCROISSANTE SE RAIDIT POUR CRÉER LE CHOC EN TEMPS FINI.

## 2.5 Ondes de choc

On essaie de savoir ce qui se passe au-delà du temps  $T^*$ . Comment peuvent exister des solutions peu régulières (discontinues) au sens des distributions (voir Section 2.2). On introduit la notation

$$[u] = u_d - u_g \quad [A(u)] = A(u_d) - A(u_g).$$

**Théorème 2.4** (*Ondes de choc*) *Il existe des solutions au sens des distributions, discontinues, ap-*

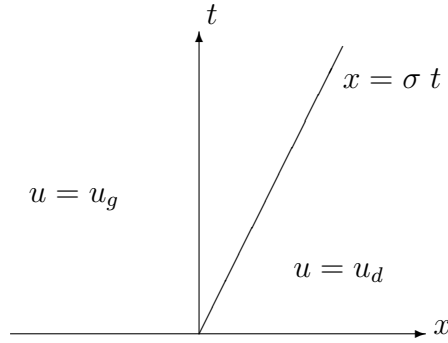


Figure 2.4: UNE ONDE DE CHOC.

appelées ondes de choc, de la forme :

$$u(t, x) = \begin{cases} u_g & \text{pour } x < \sigma t, \\ u_d & \text{pour } x > \sigma t. \end{cases}$$

Elles sont caractérisées par la relation de Rankine-Hugoniot :

$$\sigma[u] = [A(u)], \quad \text{i.e.} \quad \sigma = \frac{A(u_d) - A(u_g)}{u_d - u_g}.$$

**Remarque :** Les ondes de choc sont des solutions autosimilaires (i.e. qui ne dépendent que de  $x/t$ ),

$$u = \tilde{u}\left(\frac{x}{t}\right), \quad \tilde{u}(\xi) = \begin{cases} u_g & \text{pour } \xi < \sigma, \\ u_d & \text{pour } \xi > \sigma. \end{cases}$$

**Démonstration du Théorème 2.4 :** Regardons à quelle condition une solution de la forme donnée est solution au sens des distributions. Supposons par exemple que  $\sigma > 0$ , (le même calcul s'applique à  $\sigma < 0$ ). On évalue d'abord :

$$\partial_t u = \delta\left(t = \frac{x}{\sigma}\right) (u_g - u_d) = -[u]\delta\left(t - \frac{x}{\sigma}\right),$$

et de même,

$$\partial_x A(u) = [A(u)]\delta(x = \sigma t).$$

Il reste à remarquer que (tester contre des fonctions continues) :

$$\delta\left(t = \frac{x}{\sigma}\right) = |\sigma|\delta(x = \sigma t).$$

On en déduit que l'équation a lieu si et seulement si la relation de Rankine-Hugoniot est vraie.  $\square$

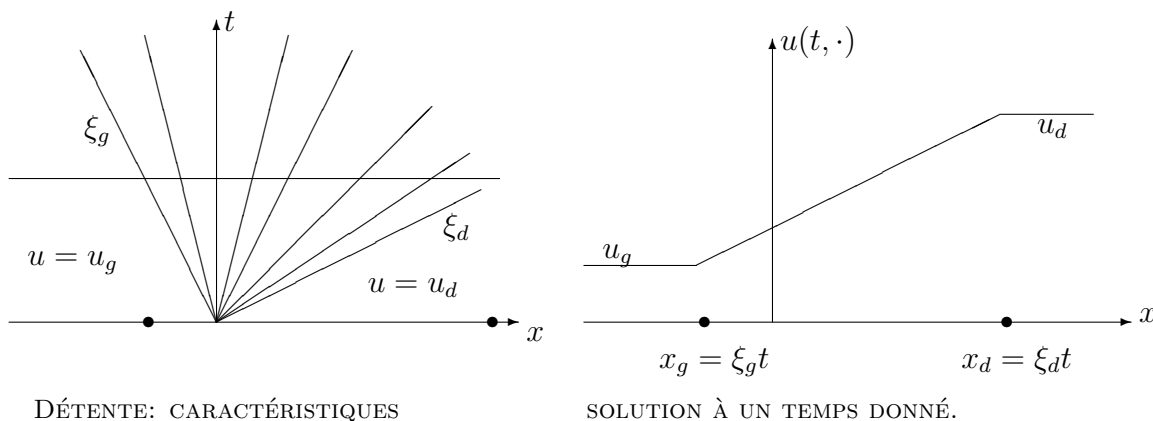
## 2.6 Ondes de raréfaction

**Théorème 2.5 (Ondes de raréfaction)** Pour  $a(u_g) < a(u_d)$ , il existe des solutions au sens des distributions, lipschitziennes, appelées ondes de raréfaction ou détente, de la forme :

$$u(t, x) = \begin{cases} u_g & \text{pour } x \leq \xi_g t, \\ a^{-1}\left(\frac{x}{t}\right) & \text{pour } \xi_g t \leq x \leq \xi_d t, \\ u_d & \text{pour } \xi_d t \leq x, \end{cases}$$

avec  $\xi_g = a(u_g)$ ,  $\xi_d = a(u_d)$ .

**Remarque :** Les ondes de raréfaction sont aussi des solutions autosimilaires  $u(t, x) = \underline{u}(\frac{x}{t})$ .



**Démonstration du Théorème 2.5 :** À quelle condition une fonction autosimilaire est-elle solution de (2.8)? On pose  $\xi = \frac{x}{t}$  et on calcule

$$\frac{\partial}{\partial t} \underline{u}\left(\frac{x}{t}\right) = -\frac{\xi}{t} \underline{u}'(\xi), \quad \frac{\partial}{\partial x} A(\underline{u}\left(\frac{x}{t}\right)) = \frac{1}{t} a(\underline{u}(\xi)) \underline{u}'(\xi).$$

L'équation (2.8) s'écrit donc

$$\underline{u}'(\xi) [-\xi + a(\underline{u}(\xi))] = 0, \quad (2.11)$$

ce qui signifie que soit  $\underline{u}'(\xi) = 0$ , ou bien  $\xi = a(\underline{u}(\xi))$ . On vérifie bien que la fonction de l'énoncé est une solution. Il s'agit d'une solution au sens "presque partout", qui est équivalente au sens  $\mathcal{D}'$  (voir [6] par exemple).  $\square$

**Exercice :** Pour l'équation de Burgers-Hopf i.e.  $A(u) = \frac{u^2}{2}$  montrer que l'onde de raréfaction est linéaire par morceaux.

**Exercice :** Montrer que la solution onde de raréfaction est la seule solution lipschitzienne de (2.11) (on ne peut pas alterner états constants et état  $\xi = a(\underline{u}(\xi))$  d'une autre façon).

## 2.7 Entropies

Commençons par une définition

**Définition 2.4** On appelle "problème de Riemann" la construction d'une solution autosimilaire  $u(\frac{x}{t})$  pour une donnée initiale discontinue

$$u^0(x) = \begin{cases} u_g & \text{pour } x < 0, \\ u_d & \text{pour } x > 0. \end{cases}$$

Le problème de Riemann se résoud en général en juxtaposant des états constants et des "ondes simples" (chocs ou raréfaction). La juxtaposition d'ondes simples s'appelle "onde composée". Voir l'exercice ci-dessous pour le cas particulièrement simple des flux  $A(u)$  convexes. Voir le problème pour le cas plus complexe d'un flux cubique.

Les deux types d'ondes (choc, raréfaction) fournissent un exemple de non unicité des solutions faibles du problème de Riemann. On choisit en effet une donnée initiale discontinue dans le cas compatible avec une onde de raréfaction et on a donc deux solutions, l'onde de raréfaction et l'onde de choc. On doit donc introduire une condition supplémentaire d'unicité. La condition d'entropie permet de sélectionner la "bonne solution" physique. Pour commencer donnons nous une fonction  $S(\cdot) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ ; alors pour toute solution  $\mathcal{C}^1$  de (2.8), on a

$$\frac{\partial}{\partial t} S(u) + \frac{\partial}{\partial x} \eta_S(u) = 0,$$

avec

$$\eta'_S(\cdot) = a(\cdot)S'(\cdot).$$

Mais la manipulation non-linéaire utilisée (loi de dérivation composée) n'est pas vraie pour les solutions au sens des distributions et cette égalité est fautive pour les ondes de choc.

**Définition 2.5** Une solution de (2.8) est dite entropique si, au sens des distributions,

$$\frac{\partial}{\partial t} S(u) + \frac{\partial}{\partial x} \eta_S(u) \leq 0, \quad \forall S(\cdot) \text{ convexe.} \quad (2.12)$$

La fonction  $S(u)$  est appelée "entropie convexe".

Notons que l'inégalité ci-dessus, au sens des distributions, s'entend en remplaçant l'égalité par une inégalité dans l'intégrale définissant la solution  $\mathcal{D}'$  et en se restreignant aux fonctions test positives.

**Théorème 2.6** Une onde de choc est entropique si et seulement si elle satisfait la relation de Rankine-Hugoniot pour l'entropie :

$$\sigma[S] \geq [\eta_S] \quad \forall S(\cdot) \text{ convexe.}$$

**Démonstration :** Reprendre la démonstration du Théorème 2.4.  $\square$

**Proposition 2.4** Soit  $A(\cdot)$  un flux convexe alors on a :

- (i) un choc est entropique si et seulement si  $u_g \geq u_d$ ,
- (ii) si l'inégalité est vraie pour une entropie  $S$  convexe, elle est vraie pour toutes les entropies convexes.

**Exercice :** En déduire la solution du problème de Riemann pour un flux convexe. Montrer qu'elle est formée d'une seule onde et qu'elle est unique (parmi les ondes composées).

L'énoncé de la Proposition 2.4 est faux pour un flux non-convexe, on renvoie au problème ci-dessous pour un contre-exemple. Par contre on peut montrer que le problème de Riemann admet toujours une unique solution entropique formée d'une onde composée.

**Démonstration de la Proposition 2.4 :** Reprenant la relation de Rankine-Hugoniot pour la vitesse  $\sigma$  du choc, on est amené à démontrer

$$\frac{A(u_d) - A(u_g)}{u_d - u_g} [S(u_d) - S(u_g)] \geq \eta_S(u_d) - \eta_S(u_g).$$



Nous laissons à la perspicacité du lecteur l'équivalence de cette inégalité (pour  $A$  et  $S$  convexes) avec  $u_d - u_g \leq 0$ . Considérons seulement le cas de Burgers-Hopf ( $A(u) = \frac{u^2}{2}$  et de l'entropie quadratique  $Su) = \frac{u^2}{2}$ . On doit alors démontrer que

$$\frac{(u_d)^2 - (u_g)^2}{2(u_d - u_g)} \frac{(u_d)^2 - (u_g)^2}{2} \geq \frac{(u_d)^3 - (u_g)^3}{3} = \eta_S(u_d) - \eta_S(u_g).$$

Cette inégalité s'écrit aussi

$$3(u_d + u_g)^2(u_d - u_g) \geq 4(u_d - u_g)(u_d^2 + u_d u_g + u_g^2),$$

i.e.

$$0 \geq (u_d - u_g)(u_d^2 - 2u_d u_g + u_g^2) = (u_d - u_g)^3,$$

ce qui est équivalent à  $u_d - u_g \leq 0$ .

Notons que ce calcul montre aussi que la dissipation d'entropie est le cube de la "force du choc" i.e. du saut de  $u$ .  $\square$

**Exercice :** Compléter la démonstration dans le cas général.

**Exercice :** Pour l'équation de Burgers-Hopf et l'entropie quadratique par exemple, on considère une onde de choc. En utilisant la condition de Rankine-Hugoniot correspondante, calculer la mesure  $m(t, x)$  définie par

$$\frac{\partial}{\partial t} S(u) + \frac{\partial}{\partial x} \eta_S(u) = m(t, x),$$

et montrer qu'elle n'est pas nulle. Montrer qu'elle proportionnelle  $[u]^3$ .

## 2.8 Problème: flux non-convexe et problème de Riemann

L'objectif de ce problème est de montrer que, pour un flux non convexe, une seule inégalité d'entropie ne suffit pas à définir une solution unique au problème de Riemann. Il faut toutes les entropies et on obtient alors une "onde composée" formée d'un choc et une détente collées. On considère donc

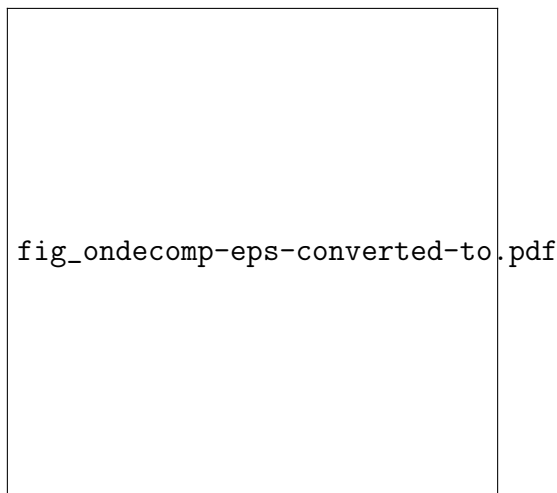


Figure 2.5: UNE ONDE COMPOSÉE POUR  $A(u) = u^3$ .

la loi de conservation scalaire

$$\frac{\partial}{\partial t}u + \frac{\partial}{\partial x}u^3 = 0, \quad t \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (2.13)$$

auquel on ajoute l'inégalité d'entropie

$$\frac{\partial}{\partial t}(2u^2) + \frac{\partial}{\partial x}(3u^4) \leq 0. \quad (2.14)$$

On considère le problème de Riemann, c'est à dire la solution de (2.13) avec la donnée initiale

$$u(x, t = 0) = \begin{cases} u_g & \text{pour } x < 0, \\ u_d \neq u_g & \text{pour } x > 0. \end{cases} \quad (2.15)$$

1. Donner une justification simple de (2.14).

Partie A : Ondes simples

2. (ondes de choc) Il existe toujours une onde de choc au problème (2.13), (2.15). Calculer sa vitesse  $\sigma$  et montrer que

$$\sigma \geq |u_d u_g|.$$

3. Montrer que l'inégalité d'entropie (2.14) est équivalente à la condition :

$$u_d^2 \leq u_g^2 \quad (2.16)$$

4. (ondes de détente) Il existe des solutions  $\mathcal{C}^1$  par morceaux, continues et de la forme  $u(\frac{x}{t})$  au problème (2.13) et ces solutions sont forcément données par la formule :

$$u(\xi) = \begin{cases} u_g & \text{pour } \xi \leq \xi_g = 3u_g^2, \\ u_d & \text{pour } \xi \geq \xi_d = 3u_d^2, \\ 3u^2(\xi) = \xi & \text{pour } \xi_g \leq \xi \leq \xi_d. \end{cases}$$

On suppose  $u_g \neq 0$  et  $u_d \neq 0$ . Montrer qu'il existe une unique solution "onde de détente" au problème (2.13), (2.15) sous des conditions, de signe entre autre, à préciser sur  $u_g$  et  $u_d$ . Faire un dessin.

Partie B : Ondes composées

On cherche des solutions composées d'une onde de choc (de vitesse  $\sigma$ ) suivie d'une onde de détente et séparée par un palier  $u(\frac{x}{t}) = u_{int}$ .

5. Montrer les relations nécessaires et suffisantes :

$$u_{int}^2 \leq u_g^2, \quad u_{int}^2 < u_d^2, \quad u_{int}u_d \geq 0, \quad u_g^2 + u_{int}u_g \leq 2u_{int}^2.$$

6. Pour  $u_g < 0$ ,  $u_d > 0$ ,  $u_d > |u_g|$ , construire une infinité de solutions à (2.13)–(2.15) de la forme ci-dessus et caractériser précisément les valeurs de  $u_{int}$  correspondantes.

7. a) Pourquoi les ondes de choc correspondantes devraient-elles être solutions des inégalités d'entropie

$$\frac{\partial}{\partial t}|u - k| + \frac{\partial}{\partial x}[(u^3 - k^3)\text{sign}(u - k)] \leq 0$$

pour tout  $k \in \mathbb{R}$ ? quelles sont les valeurs de  $k$  utiles ici?

b) Montrer que ces inégalités d'entropie déterminent  $u_{int}$  (et donnent donc une unique décomposition en deux ondes simples du problème de Riemann).

**Corrigé :**

1. Cette égalité est vraie pour les solutions  $C^1$  (voir le calcul d'un flux d'entropie dans le cours). D'autre part  $S(u) = 2u^2$  est convexe ce qui justifie l'inégalité (par la méthode de viscosité par exemple).

2. La relation de R.H donne  $\sigma = \frac{u_g^3 - u_d^3}{u_g - u_d} = u_d^2 + u_d u_g + u_g^2$ . De plus  $\sigma \geq u_d u_g$  et  $\sigma = (u_d + u_g)^2 - u_d u_g \geq -u_d u_g$ .

3. Pour l'inégalité d'entropie on écrit l'inégalité de R.H.

$$2\sigma(u_d^2 - u_g^2) \geq 3(u_d^4 - u_g^4) = 3(u_d^2 - u_g^2)(u_d^2 + u_g^2)$$

donc on doit avoir

$$2(u_d^2 + u_d u_g + u_g^2)(u_d^2 - u_g^2) \geq 3(u_d^2 - u_g^2)(u_d^2 + u_g^2),$$

ou encore

$$0 \geq (u_d^2 - u_g^2)(u_d^2 - 2u_d u_g + u_g^2) = (u_d^2 - u_g^2)(u_d - u_g)^2.$$

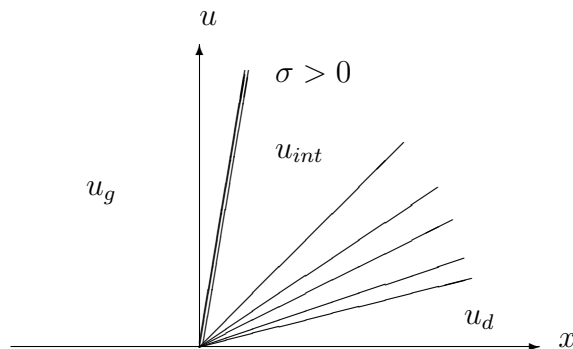
Ce qui équivaut à  $0 \geq u_d^2 - u_g^2$ .

4. Il est en effet montré dans le cours que de telles solutions vérifient

$$\forall \xi \quad \dot{u}(\xi) = 0 \quad \text{ou} \quad a(u(\xi)) = \xi.$$

Pour  $\xi \in ]-\infty, 3u_g^2]$  on a donc  $u(\xi) = u_g$ , pour  $\xi \in [3u_d^2, +\infty[$  on a  $u(\xi) = u_d$ , et on a enfin  $3u^2(\xi) = \xi$  pour  $\xi_g \leq \xi \leq \xi_d$ .

On peut construire une solution onde de détente dès que  $u_g^2 < u_d^2$  en choisissant  $u(\xi) = \sqrt{\frac{\xi}{3}}$  ou  $u(\xi) = -\sqrt{\frac{\xi}{3}}$  (on a bien  $\xi \geq \xi_g \geq 0$ ), et la continuité de  $u$  impose que  $u_g$  et  $u_d$  ont le même signe ( $u_g u_d \geq 0$ ).



5. Ici  $u_{int}$  remplace  $u_d$  pour la condition d'entropie (5),  $u_{int}$  remplace la valeur  $u_g$  pour la condition d'existence d'une onde de raréfaction  $u_{int}^2 < u_d^2$ ,  $u_{int} u_d \geq 0$ . Il faut enfin vérifier que  $\sigma < \xi_{int}$ , ce qui donne la dernière condition.

6. On cherche  $0 < u_{int} = \alpha |u_g|$ , avec  $\alpha > 0$ , pour réaliser les CNS ci-dessus. La première donne  $\alpha < 1$ , la deuxième est vérifiée par hypothèse, la troisième aussi, la dernière donne  $\alpha > \frac{1}{2}$ . Tous les

$\frac{1}{2} < \alpha < 1$  fournissent donc une solution.

7.a) On vérifie bien que  $|u - k|$  est une fonction convexe et

$$\frac{d}{du}[(u^3 - k^3)\text{sign}(u - k)] = 3u^2\text{sign}(u - k).$$

Cette inégalité n'est utile que sur le choc, donc pour  $k \in [u_g, u_{int}]$ .

7.b) On doit avoir la relation de (R.H)

$$\sigma(u_g + u_{int} - 2k) \geq u_{int}^3 + u_g^3 - 2k^3, \quad \forall k \in [u_g, u_{int}],$$

c'est-à-dire

$$(u_g^2 + u_{int}^2 + u_g u_{int})(u_g + u_{int} - 2k) \geq u_{int}^3 + u_g^3 - 2k^3,$$

ou encore

$$k^3 - k(u_g^2 + u_{int}^2 + u_g u_{int}) + (u_{int}^2 u_g + u_g^2 u_{int}) \geq 0.$$

Ce polynôme  $P(k)$  admet évidemment les racines  $k = u_g$  et  $k = u_{int}$ . On vérifie que  $P'(u_{int}) > 0$  pour tout  $\frac{1}{2}|u_g| \leq u_{int} \leq |u_g|$ , avec égalité ssi  $\frac{1}{2}u_g = u_{int}$ . Il donc s'agit du seul cas où  $P(k)$  reste positif pour tout  $k \in [u_g, u_{int}]$ .

## 2.9 Problème: flux non-convexes (2)

On considère une onde de choc entropique pour la loi de conservation scalaire

$$\frac{\partial}{\partial t}u + \frac{\partial}{\partial x}A(u) = 0,$$

avec  $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  non nécessairement convexe,  $a(\cdot) = A'(\cdot) \in C(\mathbb{R})$ . Soit  $\sigma$  la vitesse de l'onde,  $u_g$  et  $u_d$  les états droits et gauches.

1. Rappeler la formule donnant  $\sigma$ .

2. Pour les entropies  $S(u) = (u - k)_+$  (avec  $k \in \mathbb{R}$  paramètre), justifier l'inégalité

$$[A(u_d) - A(k)] \underset{+}{\text{sgn}}(u_d - k) - [A(u_g) - A(k)] \underset{+}{\text{sgn}}(u_g - k) \leq \sigma[(u_d - k)_+ - (u_g - k)_+].$$

3. On suppose  $u_g \leq u_d$ , et on considère les valeurs  $k$  telles que  $u_g \leq k \leq u_d$ ,

- faire un dessin de la fonction  $A$  et donner une interprétation de l'inégalité d'entropie,
- montrer que

$$a(u_d) \leq \sigma,$$

c) montrer que

$$\sigma \leq a(u_g).$$

4. Montrer qu'une onde de choc vérifie toujours  $a(u_d) \leq \sigma \leq a(u_g)$ .

5. En comparaison avec 4., que dire pour une onde de détente?

6. Est-il exact que la solution du problème de Riemann pour un flux non-convexe est toujours formée d'une onde de choc ou de détente suivant le signe de  $a(u_d) - a(u_g)$ ? (pourquoi?)

# Chapitre 3

## Méthode de viscosité pour les LCS

Les ondes de choc et ondes de raréfactions étudiées au chapitre précédent permettent de comprendre les limites que l'on peut espérer dans la dérivation d'estimations a priori que nous étudions dans ce chapitre. En particulier, pour être compatibles avec les discontinuités (chocs), les solutions ne peuvent appartenir qu'à des espaces de Sobolev d'ordre assez bas. On démontre ici des estimations  $BV$ , c'est-à-dire que les dérivées de la solution sont des mesures.

Une des difficultés provient de l'absence de régularité des solutions. On ne peut justifier ces estimations  $BV$  directement à partir des LCS elles-mêmes puisque les solutions ne sont pas dérivables. On peut plutôt passer par la méthode de *viscosité évanescence* qui consiste à approcher la loi hyperbolique par une loi parabolique

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u_\varepsilon + \sum_{i=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i} A_i(u_\varepsilon) = \varepsilon \Delta u_\varepsilon, \\ u_\varepsilon(t=0, x) = u^0(x). \end{cases} \quad (3.1)$$

On peut montrer que cette équation, pour  $\varepsilon > 0$  et  $u^0$  assez régulière, admet une unique solution régulière (voir le Théorème ci-dessous). On est alors amené à chercher des estimations uniformes dans le petit paramètre de viscosité.

**Théorème 3.1** *Soit  $u^0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ , alors il existe une unique solution  $u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d)$  et, pour tout  $t \geq 0$ ,  $u(t) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$  (uniformément).*

Nous ne démontrons pas ce théorème qui utilise des méthodes paraboliques très classiques.

### 3.1 Entropie et viscosité évanescence

Examinons d'abord comment se comporte l'entropie pour cette équation (3.1). On a, pour  $S(\cdot)$  convexe

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} S(u_\varepsilon) + \sum_{i=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i} \eta_i^S(u_\varepsilon) &= \varepsilon \Delta S(u_\varepsilon) - \varepsilon S'''(u_\varepsilon) (\nabla u_\varepsilon)^2 \\ &\leq \varepsilon \Delta S(u_\varepsilon), \end{aligned}$$

Si on suppose que  $u_\varepsilon$  converge (fortement) vers une limite  $u$ , alors  $\varepsilon \Delta S(u_\varepsilon)$  tend vers 0 au sens des distributions puisque, après multiplication par une fonction test et intégration par parties, on obtient

$$\varepsilon \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} S(u_\varepsilon) \Delta \varphi(t, x) \rightarrow 0, \quad \text{lorsque } \varepsilon \rightarrow 0.$$

On en déduit que l'inégalité (2.12) doit être réalisée à la limite par cette limite  $u$ .

Notons également que, supposant de plus que  $S(0) = 0$ , on peut intégrer l'équation sur la boule  $B(R)$  et on obtient (en utilisant le Théorème de dérivation d'une intégrale puisqu'ici  $u_\varepsilon$  est  $\mathcal{C}^1$ ),

$$\frac{d}{dt} \int_{B(R)} S(u_\varepsilon(t, x)) dx + \int_{\mathbb{S}(R)} \nu \cdot \eta^S(u_\varepsilon(t, \cdot)) \leq \varepsilon \int_{\mathbb{S}(R)} \nu \cdot \nabla S(u_\varepsilon(t, \cdot)).$$

Passant à la limite lorsque  $R \rightarrow \infty$ , on obtient

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^d} S(u_\varepsilon(t, x)) dx \leq 0, \quad \forall t \geq 0. \quad (3.2)$$

Cette inégalité est bien plus faible que la forme différentielle ci-dessus, néanmoins on peut déduire des bornes sur la solution  $u_\varepsilon$  à partir de cette inégalité :

**Théorème 3.2** *La solution  $u_\varepsilon$  vérifie les bornes uniformes*

$$\|u_\varepsilon(t)\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq \|u_\varepsilon^0\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \quad \forall p \in [1, \infty].$$

Ces bornes sont alors encore vraies à la limite pour la solution entropique des lois de conservation scalaires.

En fait on vérifie que les inégalités du Théorème 3.2 sont strictes, même à la limite  $\varepsilon \rightarrow 0$  dans les cas vraiment nonlinéaires. Dans la Figure (3.1) on montre la solution de l'équation de Burgers-Hopf à deux instants pour une donnée initiale formée d'une détente terminée par un choc.

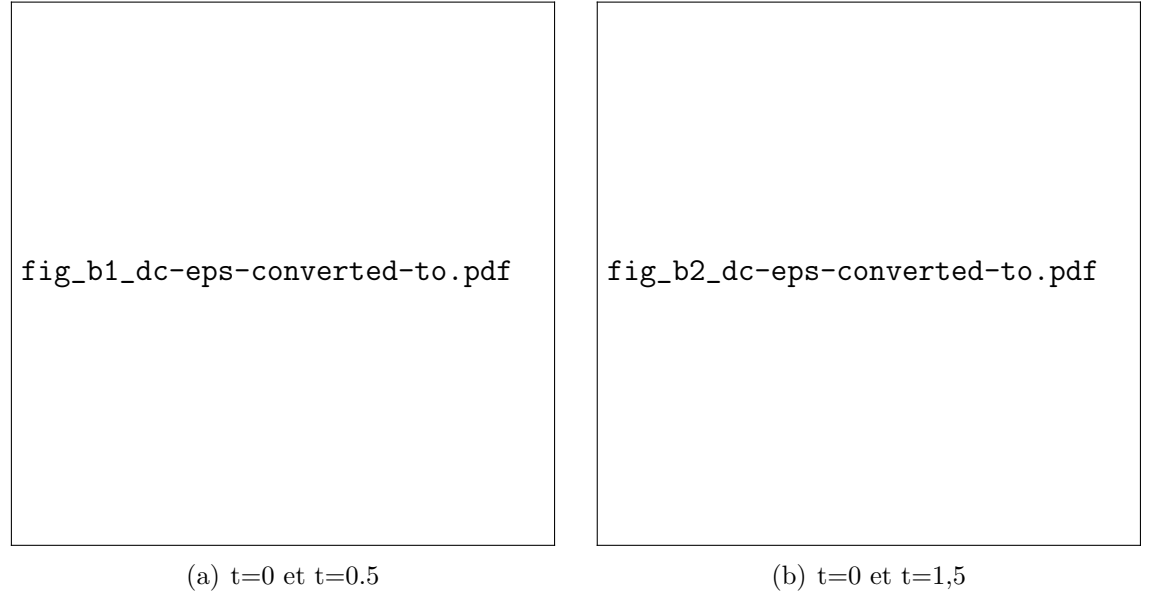


Figure 3.1: ÉQUATION DE BURGERS-HOPF, LA NORME  $L^\infty$  DÉCROÎT COMME LE MONTRE CES COMPARAISONS ENTRE LA DONNÉE INITIALE ET DEUX INSTANTS SUCCESSIFS.

**Démonstration :** Pour  $p = 1$ , le choix (limite comme on l'a fait dans la Proposition 2.2)  $S(u) = |u|$ , donne

$$\frac{\partial}{\partial t} |u_\varepsilon| + \sum_{i=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i} \eta_i^{| \cdot |}(u_\varepsilon) \leq \varepsilon \Delta |u_\varepsilon|,$$

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^d} |u_\varepsilon| dx \leq 0,$$

(pour les solutions tendant vers 0 à l'infini) et enfin

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u_\varepsilon(t, x)| dx \leq \int_{-\infty}^{\infty} |u_\varepsilon^0(x)| dx. \quad (3.3)$$

Pour  $1 < p < \infty$  on utilise  $S(u) = |u|^p$  dans (3.2).

Pour  $p = \infty$  on choisit  $M = \|u_\varepsilon^0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}$  et  $S(u) = (|u| - M)_+^2$  ce qui donne, utilisant à nouveau dans (3.2),

$$\int S(u_\varepsilon(t)) \leq \int S(u^0) = 0 \quad (\text{par le choix de } M).$$

Comme  $S(\cdot)$  est positive ou nulle, on en déduit donc que  $S(u_\varepsilon) = 0$ , donc que  $|u_\varepsilon| \leq M$ . ■

## 3.2 Estimations de la dérivée

Même si la solution d'une L.C.S. est naturellement discontinue, on peut donner deux types d'estimations sur sa dérivée. Pour des flux convexes, on peut montrer un effet régularisant "Lip+" (dans la terminologie de E. Tadmor) dû à Oleinik, qui montre aussi l'explosion des solutions  $\mathcal{C}^1$ . Par ailleurs, une estimation générale montre la décroissance de la "Variation Totale".

### 3.2.1 Explosion de la dérivée (1D)

Pour un flux  $A(\cdot)$  strictement convexe, on peut voir d'une autre façon qu'une singularité doit apparaître. Cela consiste à estimer la dérivée de la solution de la L.C.S (2.8). On pose  $w(t, x) = \frac{\partial}{\partial x} u(t, x)$  et on obtient, pour des solutions régulières

$$\frac{\partial}{\partial t} w + a(u(t, x)) \frac{\partial}{\partial x} w = 0,$$

donc en dérivant,

$$\frac{\partial}{\partial t} w + \frac{\partial}{\partial x} [a(u(t, x)) w(t, x)] = \frac{\partial}{\partial t} w + a(u(t, x)) \frac{\partial}{\partial x} w(t, x) + a'(u(t, x)) w^2 = 0.$$

On se place au long des caractéristiques et on pose  $\tilde{w} = w(t, X(t; y))$ . On obtient

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{w} + a'(\tilde{u}) \tilde{w}^2 = 0.$$

Puisque le flux est convexe  $a' > 0$ , et il s'agit d'une équation différentielle qui explose en temps fini dès que  $w^0(y)$  est strictement négative en au moins un point (cela correspond à l'hypothèse du Théorème 2.3).

### 3.2.2 Estimation Variation Totale Décroissante (multiD)

On peut par ailleurs estimer la Variation Totale de la solution, même avec une diffusion; estimation d'autant plus utile qu'elle est vraie en dimension  $d$  quelconque et on se place dans ce cadre. Pour cela on reprend (3.1) et on va montrer le

**Théorème 3.3** pour tout  $i = 1, 2, \dots, d$  et tout  $t \geq 0$ , on a

$$\int_{\mathbb{R}} \left| \frac{\partial}{\partial x_j} u_\varepsilon(t, x) \right| dx \leq \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{\partial}{\partial x_j} u^0(x) \right| dx.$$

**Démonstration du Théorème 3.3 :** On pose  $w_{\varepsilon,j}(t, x) = \frac{\partial}{\partial x_j} u_\varepsilon(t, x)$  pour un  $j \in \{1, 2, \dots, d\}$ . Comme ci-dessus on obtient successivement,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} u + \sum_{i=1}^d a_i(u_\varepsilon(t, x)) \frac{\partial}{\partial x_i} u &= \varepsilon \Delta u_\varepsilon, \\ \frac{\partial}{\partial t} w_{\varepsilon,j} + \sum_{i=1}^d \frac{\partial}{\partial x_j} [a_i(u_\varepsilon(t, x)) w_{\varepsilon,i}(t, x)] &= \varepsilon \Delta w_{\varepsilon,j}, \\ \frac{\partial}{\partial t} w_{\varepsilon,j} + \sum_{i=1}^d [a_i(u_\varepsilon(t, x)) \frac{\partial}{\partial x_j} w_{\varepsilon,i}(t, x) + a'_i(u_\varepsilon(t, x)) w_{\varepsilon,i}(t, x) w_{\varepsilon,j}(t, x)] &= \varepsilon \Delta w_{\varepsilon,j}, \\ \frac{\partial}{\partial t} w_{\varepsilon,j} + \sum_{i=1}^d [a_i(u_\varepsilon(t, x)) \frac{\partial}{\partial x_i} w_{\varepsilon,j}(t, x) + a'_i(u_\varepsilon(t, x)) w_{\varepsilon,i}(t, x) w_{\varepsilon,j}(t, x)] &= \varepsilon \Delta w_{\varepsilon,j}, \\ \frac{\partial}{\partial t} |w_{\varepsilon,j}| + \sum_{i=1}^d [a_i(u_\varepsilon(t, x)) \frac{\partial}{\partial x_i} |w_{\varepsilon,j}| + a'_i(u_\varepsilon(t, x)) w_{\varepsilon,i}(t, x) |w_{\varepsilon,j}(t, x)|] &\leq \varepsilon \Delta |w_{\varepsilon,j}|, \end{aligned}$$

ce qui est équivalent à

$$\frac{\partial}{\partial t} |w_{\varepsilon,j}| + \sum_{i=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i} [a_i(u_\varepsilon(t, x)) |w_{\varepsilon,j}|] \leq \varepsilon \Delta |w_{\varepsilon,j}|,$$

ce dont on déduit finalement

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} |w_{\varepsilon,j}(t, x)| dx \leq 0.$$

□

En sommant sur  $j \in \{1, 2, \dots, d\}$ , on obtient également (voir les notations de la section 3.4,

$$\|u_\varepsilon(t)\|_{TV} := \sum_{i=1}^d \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{\partial}{\partial x_i} u_\varepsilon(t, x) \right| dx \leq \sum_{i=1}^d \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{\partial}{\partial x_i} u^0(x) \right| dx = \|u^0\|_{TV}. \quad (3.4)$$

Ici  $u_\varepsilon$  est régulière et il s'agit bien de la norme  $L^1$  de la dérivée. Quand on passe à la limite, la même inégalité reste vraie mais la dérivée est simplement une mesure. On entend donc la masse totale de la mesure quand on écrit pour une LCS

$$\|u(t)\|_{TV} := \sum_{i=1}^d \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{\partial}{\partial x_i} u(t, x) \right| dx \leq \sum_{i=1}^d \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{\partial}{\partial x_i} u^0(x) \right| dx = \|u^0\|_{TV}. \quad (3.5)$$

**Exercice :** Montrer, grâce aux arguments ci-dessus, que l'on a aussi

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial}{\partial t} u_\varepsilon(t) \right\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} &\leq \left\| \frac{\partial}{\partial t} u^0 \right\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \\ &\leq \left\| \sum_{i=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i} A_i(u^0) \right\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} + \varepsilon \|\Delta u^0\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}. \end{aligned}$$

**Remarque :** En fait on peut montrer en dimension 1 une propriété plus forte, la propriété (TOD) Total Oscillation Decreasing, pour toute fonction  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$\left\| \frac{\partial}{\partial x} \phi(u_\varepsilon(t, x)) \right\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq \left\| \frac{\partial}{\partial x} \phi(u^0_\varepsilon) \right\|_{L^1(\mathbb{R})}.$$

Par contre il n'est pas vrai qu'il y ait une contraction sur  $\phi(u) - \phi(v)$ . Voir [19].



### 3.2.3 Estimation $Lip+$ d'Oleřnik (1D)

Revenons maintenant au cas d'une seule dimension pour un flux strictement convexe. L'inégalité d'Oleřnik est alors un résultat remarquable :

**Théorème 3.4** *Les solutions entropiques (limites de la méthode de viscosité évanescence) de (2.8), pour un flux  $A(\cdot)$  strictement convexe, vérifient l'inégalité*

$$\frac{\partial}{\partial x} u \leq \frac{1}{\alpha t}, \quad (3.6)$$

indépendamment de la donnée initiale, où  $\alpha = \min a'(u) > 0$  et  $a(\cdot) = A'(\cdot)$ .

Ce Théorème exprime un effet régularisant sur la dérivée de la solution (puisque la donnée initiale peut être quelconque). Il est bien compatible avec les solutions ayant un choc puisque l'on a vu dans la Proposition 2.4 que les chocs sont décroissants pour un flux convexe (ce qui montre aussi que l'hypothèse de convexité est nécessaire).

**Démonstration du Théorème 3.4 :** On reprend le calcul fait dans la Section 3.2.1 avec une diffusion pour montrer que cette nouvelle estimation est déjà vraie dans ce cas où les solutions sont régulières. Il donne, toujours pour  $w_\varepsilon = \frac{\partial}{\partial x} u_\varepsilon$ ,

$$\frac{\partial}{\partial t} w_\varepsilon + a(u_\varepsilon) \frac{\partial}{\partial x} w_\varepsilon + a'(u_\varepsilon) w_\varepsilon^2 = \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial x^2} w_\varepsilon,$$

et, toujours puisque  $a' \geq \alpha > 0$ , on peut également écrire pour tout  $\delta > 0$ ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{\alpha t + \delta} \right)_+ + a(u_\varepsilon) \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\alpha t + \delta} \right)_+ + a'(u_\varepsilon) \left( \frac{1}{\alpha t + \delta} \right)_+^2 \\ = f a'(u_\varepsilon) \alpha (\alpha t + \delta)^2 \\ \geq 0 = \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{1}{\alpha t + \delta} \right)_+, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( w_\varepsilon - \frac{1}{\alpha t + \delta} \right)_+ + a(u_\varepsilon) \frac{\partial}{\partial x} \left( w_\varepsilon - \frac{1}{\alpha t + \delta} \right)_+ + a'(u_\varepsilon) \left( w_\varepsilon - \frac{1}{\alpha t + \delta} \right)_+ \left( w_\varepsilon + \frac{1}{\alpha t + \delta} \right) \\ = \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( w_\varepsilon - \frac{1}{\alpha t + \delta} \right)_+, \end{aligned}$$

et puisque  $S(\cdot) = (\cdot)_+$  est convexe

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( w_\varepsilon - \frac{1}{\alpha t + \delta} \right)_+ + a(u_\varepsilon) \frac{\partial}{\partial x} \left( w_\varepsilon - \frac{1}{\alpha t + \delta} \right)_+ + a'(u_\varepsilon) \left( w_\varepsilon - \frac{1}{\alpha t + \delta} \right)_+ \left( w_\varepsilon + \frac{1}{\alpha t + \delta} \right) \\ \leq \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( w_\varepsilon - \frac{1}{\alpha t + \delta} \right)_+, \end{aligned}$$

ce qui s'écrit également

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( w_\varepsilon - \frac{1}{\alpha t + \delta} \right)_+ + \frac{\partial}{\partial x} [a(u_\varepsilon) \left( w_\varepsilon - \frac{1}{\alpha t + \delta} \right)_+] \\ + a'(u_\varepsilon) \left[ \left( w_\varepsilon - \frac{1}{\alpha t + \delta} \right)_+ \left( w_\varepsilon + \frac{1}{\alpha t + \delta} \right) - \left( w_\varepsilon - \frac{1}{\alpha t + \delta} \right)_+ w_\varepsilon \right] \leq \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( w_\varepsilon - \frac{1}{\alpha t + \delta} \right)_+, \end{aligned}$$

donc finalement

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( w_\varepsilon - \frac{1}{\alpha t + \delta} \right)_+ + \frac{\partial}{\partial x} [a(u_\varepsilon) \left( w_\varepsilon - \frac{1}{\alpha t + \delta} \right)_+] \leq \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( w_\varepsilon - \frac{1}{\alpha t + \delta} \right)_+.$$

Il reste à intégrer en espace pour arriver à

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} \left( w_\varepsilon - \frac{1}{\alpha t + \delta} \right)_+ dx \leq 0,$$

et en choisissant  $\delta > 0$  assez petit  $w_\varepsilon^0(x) - \frac{1}{\delta}$  et on obtient

$$\int_{\mathbb{R}} \left( w_\varepsilon(t, x) - \frac{1}{\alpha t + \delta} \right)_+ dx \leq \int_{\mathbb{R}} \left( w_\varepsilon^0(x) - \frac{1}{\delta} \right)_+ dx = 0,$$

dont on déduit que  $(w_\varepsilon(t, x) - \frac{1}{\alpha t + \delta})_+ = 0$  ou encore

$$w_\varepsilon(t, x) \leq \frac{1}{\alpha t + \delta} \leq \frac{1}{\alpha t}. \quad (3.7)$$

Cette inégalité étant uniforme, elle passe à la limite  $\varepsilon \rightarrow 0$  et montre donc le Théorème 3.4.  $\square$

**Exercice :** Se convaincre que le calcul ci-dessus n'est vrai qu'en une seule dimension d'espace.

**Exercice :** L'inégalité d'Oleřnik a été généralisée par Hoff [13] qui montre que

$$\left\| \frac{\partial}{\partial x} a(u) \right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \frac{1}{t}, \quad \forall t > 0, \quad (3.8)$$

avec  $a(u) := A'(u)$  la vitesse caractéristique. Montrer cette inégalité pour  $A''(u) > 0$  seulement. Clairement, (3.6) se déduit de (3.8) pour  $A''$  strictement positif.

### 3.3 Propriété de contraction

En fait la propriété de Variation Totale Décroissante est une conséquence de l'invariance par translation de la LCS (3.1) et de la propriété de contraction suivante

**Théorème 3.5** *Considérons deux solutions  $u$  et  $v$  de (3.1), alors*

$$\|u(t) - v(t)\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \leq \|u^0 - v^0\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}.$$

**Preuve du Théorème 3.5.** On écrit la différence des deux équations sur  $u$  et  $v$ ,

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}(u - v) + \sum_{i=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i} [A_i(u) - A_i(v)] = \varepsilon \Delta(u - v), \\ (u - v)(t = 0, x) = (u^0 - v^0)(x). \end{cases}$$

On multiplie alors par  $\text{sgn}(u - v)$  (après régularisation comme cela a été justifié dans la section 2.3). On obtient alors (puisque  $w \mapsto |w|$  est convexe)

$$\frac{\partial}{\partial t} |u - v| + \sum_{i=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i} [(A_i(u) - A_i(v)) \text{sgn}(u - v)] \leq \varepsilon \Delta |u - v|.$$

En effet, on a formellement

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} [(A_i(u) - A_i(v)) \operatorname{sgn}(u - v)] &= \frac{\partial}{\partial x_i} [(A_i(u) - A_i(v))] \operatorname{sgn}(u - v) \\ &\quad + (A_i(u) - A_i(v)) \delta(u - v) \frac{\partial}{\partial x_i} (u - v) \\ &= \frac{\partial}{\partial x_i} [(A_i(u) - A_i(v))] \operatorname{sgn}(u - v). \end{aligned}$$

Il reste à intégrer cette équation sur  $\mathbb{R}^d$  pour obtenir le résultat.  $\square$

Pour retrouver la propriété TVD, on considère  $v(t, x) = u(t, x + h)$  avec  $h \in \mathbb{R}^d$  donné. La propriété de contraction donne alors, en utilisant les caractérisations de la seminorme  $TV$  dans la section 3.4,

$$\|u(t, x) - u(t, x + h)\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \leq \|u^0(x) - u^0(x + h)\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \leq \|u^0\|_{TV(\mathbb{R}^d)} |h|,$$

et on en déduit que

$$\|u(t)\|_{TV(\mathbb{R}^d)} \leq \|u^0\|_{TV(\mathbb{R}^d)}.$$

### 3.4 Fonctions à variations bornées, espace $BV(\mathbb{R})$

L'espace  $BV$  des fonctions à variation bornée est très utilisé dans la théorie des lois de conservation. Nous donnons ici les premières définitions et propriétés de cet espace. Ils apparaissent également dans la théorie du traitement d'image et dans certains problèmes de minimisation (problèmes de surface minimale).

**Théorème 3.6** *Soit  $u \in L^1(\mathbb{R}^d)$ , et considérons un système de coordonnées  $(x_1, \dots, x_d)$  associé à une base orthonormale  $(e_1, \dots, e_d)$ . Alors pour tout  $i \in \{1, \dots, d\}$  il y a équivalence entre :*

(i) *il existe une constante  $C^{(1)}$  telle que pour  $h \in \mathbb{R}$  on ait*

$$\|u(x + he_i) - u(x)\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \leq C^{(1)} |h|,$$

(ii) *il existe une constante  $C^{(2)}$  telle que l'on ait*

$$\left\| \frac{\partial}{\partial x_i} u \right\|_{M^1(\mathbb{R}^d)} \leq C^{(2)} \quad \text{i.e.} \quad \int_{\mathbb{R}^d} u(x) \frac{\partial}{\partial x_i} \psi(x) dx \leq C^{(2)} \|\psi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}, \quad \forall \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d),$$

(iii) *il existe une constante  $C^{(3)}$  telle que pour tout noyau régularisant positif ou nul  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$  vérifiant  $\int_{\mathbb{R}^d} |\varphi(x)| dx = 1$ , on ait*

$$\left\| \frac{\partial}{\partial x_i} u * \varphi \right\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \leq C^{(3)}.$$

*Pour tout  $i$ , les meilleures constantes dans ces inégalités sont égales et, notant  $C$  leur maximum en  $i$ , on définit la seminorme Variation Totale de  $u$  par*

$$C = \|\nabla u\|_{M^1(\mathbb{R}^d)} := \|u\|_{TV(\mathbb{R}^d)}.$$

**Preuve du Théorème 3.6.** Nous prouvons successivement les implications (i)  $\implies$  (iii)  $\implies$  (ii)  $\implies$  (i).

Partant de (i), nous considérons un noyau régularisant  $\varphi$ . On a

$$\begin{aligned} \|u * \varphi(x + he_i) - u * \varphi(x)\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} &= \|[u(x + he_i) - u(x)] * \varphi(x)\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \\ &\leq \|u(x + he_i) - u(x)\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \leq C^{(1)} |h|. \end{aligned}$$

Par ailleurs, on a aussi, lorsque  $h \neq 0$  tend vers zéro,

$$\begin{aligned} \frac{1}{|h|} \|u * \varphi(x + he_i) - u * \varphi(x)\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} &= \frac{1}{|h|} \|u * [\varphi(x + he_i) - \varphi(x)]\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \\ &\rightarrow \|u * \frac{\partial}{\partial x_i} \varphi\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}. \end{aligned}$$

Ainsi (iii) est démontré avec  $C^{(3)} \leq C^{(1)}$ .

Ensuite nous supposons (iii). Choisissons un noyau régularisant

$$\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d), \quad \varphi \geq 0, \quad \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) dx = 1.$$

On définit alors  $\varphi_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon^d} \varphi(\frac{x}{\varepsilon})$  et posons  $u_\varepsilon = u * \varphi_\varepsilon$ . De (iii), on déduit que

$$\left\| \frac{\partial}{\partial x_i} u_\varepsilon \right\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \leq C^{(3)}.$$

Soit  $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ , alors

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} u_\varepsilon(x) \frac{\partial}{\partial x_i} \psi(x) dx &= - \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial}{\partial x_i} u_\varepsilon(x) \psi(x) dx \\ &\leq \left\| \frac{\partial}{\partial x_i} u_\varepsilon \right\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \|\psi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \\ &\leq C^{(3)} \|\psi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}. \end{aligned}$$

Passant à la limite lorsque  $\varepsilon$  tend vers zéro, on obtient (ii) avec  $C^{(2)} \leq C^{(3)}$ .

Finalement, nous supposons (ii). Alors, avec les mêmes notations que ci-dessus, on a

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} u_\varepsilon(y) \frac{\partial}{\partial y_i} \psi(y) dx &= \int_{\mathbb{R}^d} u(x) \varphi_\varepsilon(y - x) \frac{\partial}{\partial y_i} \psi(y) dx dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} u(x) \frac{\partial}{\partial x_i} \psi * \varphi_\varepsilon dx \\ &\leq C^{(2)} \|\psi * \varphi_\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \\ &\leq C^{(2)} \|\psi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}. \end{aligned}$$

On a donc prouvé que  $\left\| \frac{\partial}{\partial x_i} u_\varepsilon \right\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \leq C^{(2)}$ , qui implique que

$$\|u_\varepsilon(x + he_i) - u_\varepsilon(x)\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} = \left\| \int_0^h \frac{\partial}{\partial x_i} u_\varepsilon(x + se_i) ds \right\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \leq C^{(2)} |h|,$$

et, passant à la limite lorsque  $\varepsilon$  tend vers zéro, on obtient que (i) est réalisé avec  $C^{(1)} \leq C^{(2)}$ .  $\square$

L'espace des fonctions  $BV$  possède de nombreuses propriétés supplémentaires. D'autres espaces reliés jouent aussi des rôles importants en analyse. Voir [1].

### 3.5 Problème (propriété TOD)

Nous reprenons ici le résultat de [19].

On considère une solution, régulière et rapidement décroissante à l'infini ainsi que ses dérivées, de la loi de conservation scalaire avec diffusion

$$\frac{\partial}{\partial t} u + \frac{\partial}{\partial x} A(u) = \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial x^2} u,$$

avec  $A \in C^2(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ . On pose  $a(\cdot) = A'(\cdot) \in C(\mathbb{R})$ . On se donne également une fonction  $\Phi \in C^2(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ .

1. Écrire l'équation réalisée par  $\Phi(u)$  (sans manipuler le terme de droite).

2. Écrire l'équation réalisée par  $w(t, x) = \frac{\partial}{\partial x} \Phi(u)$ .

3. Soit maintenant une fonction  $G \in C^2(\mathbb{R}; \mathbb{R})$  telle que  $G(0) = 0$ . Montrer que

$$\frac{d}{dt} \int G(w) dx + \int R(t, x) \frac{\partial a(u)}{\partial x} = -\varepsilon \int G''(w) w \Phi''(u) \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \varepsilon \int G''(w) S(t, x),$$

et donner une expression de  $R$ ,  $S$  avec  $S \leq 0$ .

4. On considère maintenant une famille de fonctions convexes  $G_\delta$  telle que, en plus des propriétés de la question 3.,  $G \geq 0$ ,  $G(w) = |w| - \delta$  pour  $|w| \geq 2$  et  $G(w) = 0$  pour  $|w| \leq \delta$  et  $G''_\delta \leq \frac{C_G}{\delta}$ . Montrer que la quantité  $R$  ci-dessus (on la paramètre donc par  $\delta$ ) vérifie

$$R_\delta(t, x) \leq \delta,$$

et montrer que

$$\int R_\delta(t, x) \frac{\partial a(u)}{\partial x} \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0.$$

5. On suppose également que  $\Phi'(u) \geq \alpha > 0$ . Montrer que

$$\int G''_\delta(w) w \Phi''(u) \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \rightarrow 0, \quad \delta \rightarrow 0,$$

6. Montrer que l'on a, pour toute fonction  $\Phi \in C^2(\mathbb{R}; \mathbb{R})$  avec  $\Phi'(u) \geq \alpha > 0$ ,

$$\frac{d}{dt} \int |w| dx \leq 0.$$

Quelle autre propriété cela rappelle-t'il?

7. Montrer la même propriété qu'en 6. sous la seule hypothèse  $\Phi \in C^2(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ .

8. Montrer la propriété 'Total Oscillation Diminishing' pour les lois de conservation hyperboliques ( $\varepsilon = 0$ )

$$|\Phi(u(t))|_{TV(\mathbb{R})} \leq \liminf_{\delta \rightarrow 0} |\Phi(u_\delta^0)|_{TV(\mathbb{R})}, \quad \forall t > 0.$$

9. En considérant une onde de détente, montrer que le résultat de la question 8. est faux si l'on remplace le membre de droite par

$$|\Phi(u^0)|_{TV(\mathbb{R})}.$$

#### INDICATIONS

1. On a

$$\frac{\partial}{\partial t}\Phi(u) + a(u)\frac{\partial}{\partial x}\Phi(u) = \varepsilon\Phi'(u)\frac{\partial^2}{\partial x^2}u.$$

2. On trouve

$$\frac{\partial}{\partial t}w + \frac{\partial}{\partial x}[a(u)w] = \varepsilon\frac{\partial}{\partial x}[\Phi'(u)\frac{\partial^2}{\partial x^2}u].$$

3.  $R(t, x) = wG'(w) - G(w)$  et  $S(t, x) = [\Phi'(u)\frac{\partial^2}{\partial x^2}u]^2$ .

4. Pour l'inégalité sur  $R_\delta$  voir le paragraphe 2.3. Pour la limite, on a

$$\frac{\partial}{\partial x}a(u) = a'(u)\frac{\partial}{\partial x}u,$$

et  $a'(u)$  est borné car  $u$  l'est,  $\frac{\partial}{\partial x}u$  est intégrable. Donc la borne sur  $R_\delta$  permet de conclure.

5. L'intégrande est non nul seulement pour  $|w| = |\Phi'(u)\frac{\partial u}{\partial x}| \geq \delta$  et on peut donc l'écrire

$$\int G''_\delta(w)w^2 \frac{\Phi''(u)}{\Phi'(u)} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

et  $G''_\delta(w)w^2 \leq 4C_G\delta$ . On conclut donc comme en 4.

6. On passe donc à la limite  $\delta \rightarrow 0$ . Pour  $\Phi(u) = u$  on retrouve la propriété TVD habituelle.

7. On passe ensuite à la limite  $\varepsilon \rightarrow 0$  pour obtenir seulement  $\Phi' \geq 0$ . On décompose ensuite  $\Phi$  en partie croissante et décroissante,  $\Phi = \Phi_+ + \Phi_-$  avec  $\Phi'_+ \times \Phi'_- = 0$ . Donc

$$|w| = \Phi' \frac{\partial u}{\partial x} = [\Phi'_+(u) + \Phi'_-(u)] \frac{\partial u}{\partial x} = |\Phi'_+(u)\frac{\partial u}{\partial x}| + |\Phi'_-(u)\frac{\partial u}{\partial x}|.$$

On peut donc appliquer le résultat à  $\Phi_+$  et  $\Phi_-$  séparément.

Pour la suite on se réfère à [19].

# Chapitre 4

## Méthodes des volumes finis et décentrement (équations linéaires)

Dans ce chapitre nous présentons la méthode des volumes finis (V.F. en court) en dimension un pour des équations d'advection

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}u + \frac{\partial}{\partial x}[a(x)u] = 0, & t \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}, \\ u(t=0, x) = u^0(x) \in L^1(\mathbb{R}). \end{cases}$$

Ceci nous permettra d'introduire un certain nombre de difficultés nouvelles par rapport aux équations continues, en particulier quand on travaille avec des maillages peu réguliers (même en dimension un cela est utile car dans ce cas certaines difficultés sont très proches de la dimension deux sur des maillages non-structurés).

La méthode des volumes finis a pour objectif de garder au niveau discret les principales propriétés théoriques de l'équation (4) tout en permettant des extensions aux cas non-linéaires. On cherche en particulier à réaliser (voir la Proposition 2.2)

- (i)  $u^0 \geq 0 \implies u(t, x) \geq 0$ ,
- (ii)  $\int_{\mathbb{R}} u(t, x) dx = \int_{\mathbb{R}} u^0 dx, \quad \forall t > 0$ ,
- (iii) utiliser au plus  $u'(t) \in L^1$  (mais pas d'information de ce type sur  $u''$  car ce serait incompatible avec des discontinuités).

Les difficultés principales proviennent alors du manque de contrôle des dérivées, ce qui peut provoquer des oscillations. La solution est le décentrage.

Il est aussi difficile de combiner stabilité et ordre élevé (cela est même impossible en gardant la linéarité). Enfin, on veut capturer des discontinuités  $|u_{i+1} - u_i|$  d'ordre un (fronts, chocs pour les équations non-linéaires).

### 4.1 Notations et principe de la méthode des V.F.

**Notation 4.1** *On utilisera les notations suivantes :*

- $(x_{i+1/2})_{i \in \mathbb{Z}}$  noeuds du maillage,
- $\Delta t$  pas de temps,  $t^n = n\Delta t$ ,
- $\Delta x_i = x_{i+1/2} - x_{i-1/2}, \quad h = \max_{i \in \mathbb{Z}} \Delta x_i$ ,

- $u_i^n = \frac{1}{\Delta x_i} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u(t^n, x) dx$  (moyenne de la solution exacte sur une maille),
- $v_i^n$  désigne la solution approchée par une méthode numérique.

**Définition 4.1** on appelle nombre de Courant-Friedrichs-Levy.

$$CFL = \|a(\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \times \max_{i \in \mathbb{Z}} \frac{\Delta t}{\Delta x_i}.$$

En général on utilisera des pas de temps assez petits pour que  $CFL \leq 1$ . Ceci n'est pas très restrictif, contrairement aux équations de diffusion (chaleur) qui mènent à des pas de temps beaucoup plus petits car le CFL est alors défini par :  $\frac{\Delta t}{(\Delta x_i)^2} \leq 1$ .

**Définition 4.2** On dit qu'un maillage de  $\mathbb{R}$  est faiblement régulier si il existe deux constantes positives  $\alpha, \beta$  telles que

$$\alpha h \leq \Delta x_i \leq \beta h. \quad (4.1)$$

Le principe de la méthode des volumes finis consiste à écrire que la solution exacte vérifie une forme conservative discrète. Après intégration de l'équation (4) sur  $(t^n, t^{n+1}) \times (x_{i-1/2}, x_{i+1/2})$ , on obtient :

$$\begin{cases} u_i^{n+1} - u_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x_i} (A_{i+1/2}^n - A_{i-1/2}^n) = 0, \\ A_{i+1/2}^n = \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} [a(x_{i+1/2}) u(t^n + s, x_{i+1/2})] ds. \end{cases}$$

La difficulté est de trouver de bonnes "approximations" ou "interpolations" pour le calcul des valeurs  $\frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} u(t^n + s, x_{i+1/2})$ . On définit alors des méthodes numériques grâce à une formule imitant (4.1) mais où la valeur  $v_i^{n+1}$  est directement calculable à partir des valeurs  $v_j^n$  (on parle de schéma *explicite*) :

$$v_i^{n+1} - v_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x_i} [\langle a v \rangle_{i+1/2}^n - \langle a v \rangle_{i-1/2}^n] = 0.$$

Les choix spécifiques de ces quantités  $\langle a v \rangle_{i+1/2}^n$  sont appelés *flux numériques*.

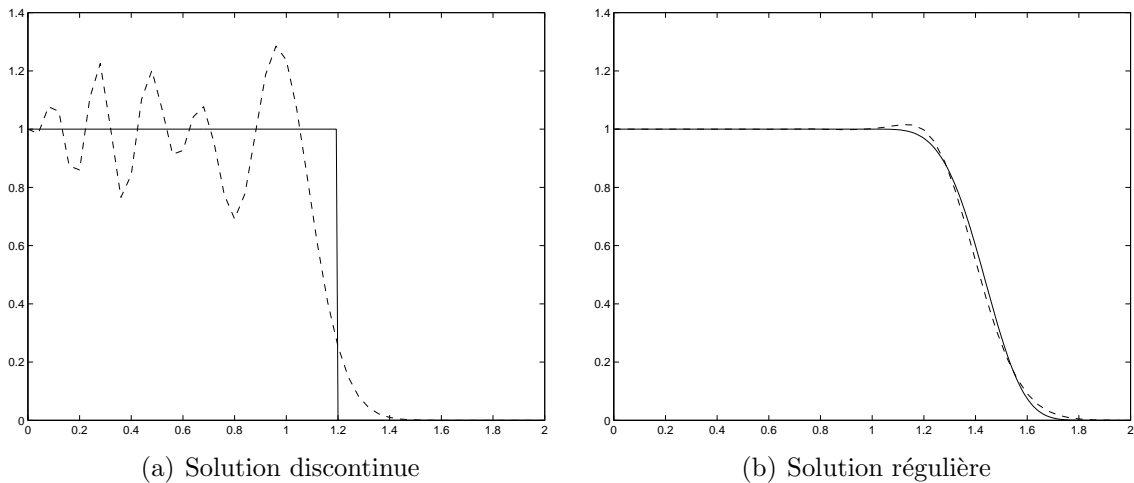


Figure 4.1: TRANSPORT D'UNE ONDE AVEC LE SCHÉMA CENTRÉ, 50 POINTS, CFL=0,01. SUR UNE DISCONTINUITÉ (FIGURE DE GAUCHE), ON OBSERVE DES OSCILLATIONS (QUI AUGMENTENT RAPIDEMENT LORSQUE LE CFL AUGMENTE). SUR UNE SOLUTION RÉGULIÈRE LA PRÉCISION EST BONNE (FIGURE DE DROITE).



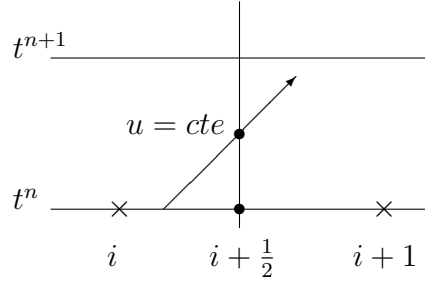


Figure 4.2: FLUX DÉCENTRÉ.

## 4.2 Flux centré

Le choix le plus naturel consiste à faire une moyenne centrée pour estimer le flux. On arrive alors à

$$\langle av \rangle_{i+1/2}^n = a(x_{i+1/2}) \frac{v_i^n + v_{i+1}^n}{2}.$$

Ce schéma mène à des résultats numériques catastrophiques (voir la Figure 4.1).

**Exercice** Montrer par un exemple que, quelquesoit le choix du pas de temps, pour  $v_j^n \geq 0 \forall j \in \mathbb{Z}$  on a pas forcément  $v_i^{n+1} \geq 0$ .

## 4.3 Flux décentré

Le flux décentré consiste à choisir une valeur gauche ou droite suivant le signe de la vitesse, suivant en cela la méthode des caractéristiques. On obtient :

$$\langle av \rangle_{i+1/2}^n = \begin{cases} a(x_{i+1/2}) v_i^n & \text{pour } a(x_{i+1/2}) \geq 0, \\ a(x_{i+1/2}) v_{i+1}^n & \text{pour } a(x_{i+1/2}) \leq 0. \end{cases}$$

**Proposition 4.1** *Le schéma décentré vérifie, sous la condition de CFL*

$$\|a(\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \frac{\Delta t}{\Delta x_i} \leq \frac{1}{2}, \quad \forall i \in \mathbb{Z},$$

*la propriété de positivité*

$$v_j^n \geq 0, \quad \forall j \in \mathbb{Z} \quad \implies \quad v_i^{n+1} \geq 0.$$

La Figure 4.3 montre les résultats obtenus avec ce schéma (peu précis mais stable).

Un point remarquable est qu'aucune régularité des vitesses  $a(x)$  n'est nécessaire ici hormis la borne  $L^\infty$ .

**Démonstration :** On pose  $a_{i+1/2} := a(x_{i+1/2})$  et  $a_+ = \max(a, 0)$ ,  $a_- = \max(0, -a)$ . On réécrit alors le schéma de façon directe

$$\begin{aligned} v_i^{n+1} &= v_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x_i} [(a_{i+1/2})_+ v_i^n - (a_{i+1/2})_- v_{i+1}^n - (a_{i-1/2})_+ v_{i-1}^n + (a_{i-1/2})_- v_i^n] \\ &= v_i^n [1 - \frac{\Delta t}{\Delta x_i} ((a_{i+1/2})_+ + (a_{i-1/2})_-)] + \frac{\Delta t}{\Delta x_i} [(a_{i+1/2})_- v_{i+1}^n + (a_{i-1/2})_+ v_{i-1}^n] \\ &\geq v_i^n [1 - \frac{\Delta t}{\Delta x_i} ((a_{i+1/2})_+ + (a_{i-1/2})_-)] \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

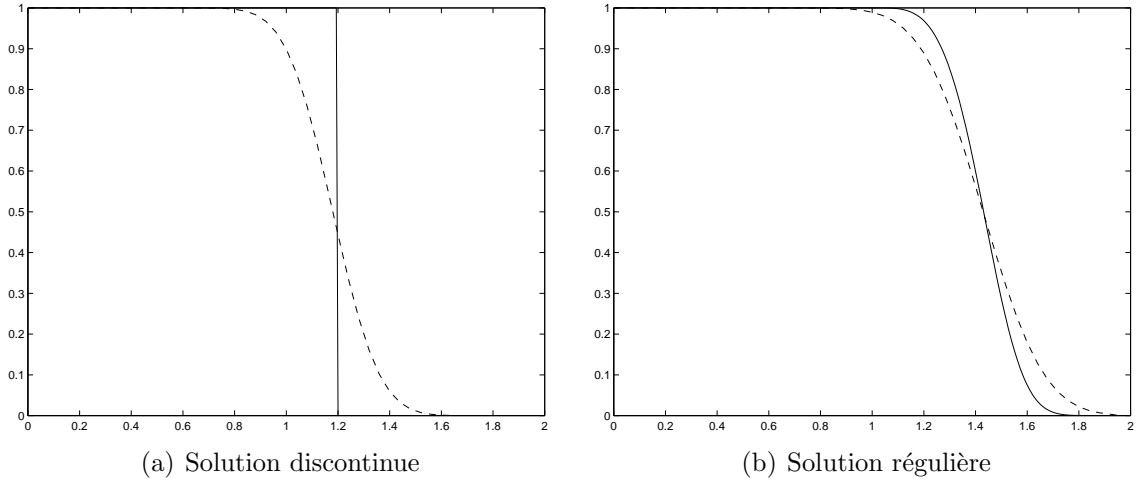


Figure 4.3: TRANSPORT D'UNE ONDE AVEC LE SCHÉMA DÉCENTRÉ, 50 POINTS, CFL=0,5. PLUS STABLE QUE LES SCHÉMA CENTRÉ SUR UNE SOLUTION DISCONTINUE, CE SCHÉMA EST PEU PRÉCIS.

en utilisant successivement la positivité de  $v_{i\pm 1}^n$  puis la condition de CFL.  $\square$

La démonstration montre que la condition  $CFL \leq 1/2$  est pessimiste car si les deux valeurs positives et négatives sont présentes, cela signifie que  $a(\cdot)$  s'annule entre  $x_{i+1/2}$  et  $x_{i-1/2}$ , et donc ces valeurs sont plutôt petites et ont peu de chance d'être atteintes dans le  $max$  définissant el CFL. Hormis que l'on s'intéresse en général à des vitesses peu régulières.

## 4.4 Convergence (maillage régulier)

On considère maintenant un maillage uniforme

$$\Delta x := h_i, \quad \forall i \in \mathbb{Z}.$$

On va aussi se placer dans le cas  $a > 0$  constant pour simplifier les preuves.

**Définition 4.3** On appelle *erreur de consistance*, pour le schéma décentré, la quantité  $e_i^n$  définie par :

$$u_i^{n+1} - u_i^n + \frac{a\Delta t}{h}[u_i^n - u_{i-1}^n] = \Delta t e_i^n,$$

où  $u(t, x)$  est la solution exacte de (4). Cette erreur s'écrit donc naturellement

$$e_i^n = \frac{\varepsilon_{i+1/2}^n - \varepsilon_{i-1/2}^n}{h}, \quad \varepsilon_{i+1/2}^n = \frac{a}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} u(t^n + s, x_{i+1/2}) ds - u_i^n.$$

**Exercice :** Montrer que le schéma centré est d'ordre 1 en temps et 2 en espace i.e. pour  $u$  régulière on a :

$$|e_i^n| \leq C[\Delta t + h^2].$$

Montrer que le schéma décentré est d'ordre 1 en temps et en espace.

**Théorème 4.1** Considérons le schéma décentré. Sous la condition de CFL

$$\sigma := a \frac{\Delta t}{h} \leq 1,$$

on a

$$\begin{aligned}
(i) \quad & \sum_{i \in \mathbb{Z}} h |e_i^n| \leq \frac{a}{2} h (1 - \sigma) \int_{\mathbb{R}} |u''(t^n, x)| dx, \\
(ii) \quad & \sum_{i \in \mathbb{Z}} h |u_i^n - v_i^n| \leq \sum_{i \in \mathbb{Z}} h |u_i^0 - v_i^0| + t^n \frac{a}{2} h (1 - \sigma) \int_{\mathbb{R}} |u''(t = 0, x)| dx, \\
(iii) \quad & \sum_{i \in \mathbb{Z}} h |u_i^n - v_i^n| \leq \sum_{i \in \mathbb{Z}} h |u_i^0 - v_i^0| + C \sqrt{a h t^n (1 - \sigma)} \int_{\mathbb{R}} |u'(t = 0, x)| dx.
\end{aligned}$$

Le résultat le plus intéressant de ce théorème est l'énoncé (iii) car il s'applique aux situations de suivi de front. On peut démontrer qu'il est optimal et que la convergence en  $h^{1/2}$  ne peut être améliorée pour de schéma. Il met aussi en évidence comment une absence de régularité suffisante pour que l'erreur de consistance converge peut être compensée par une perte sur le taux de convergence. C'est un phénomène général en analyse numérique.

**Démonstration :** On estime l'erreur en utilisant la formule de la méthodes des caractéristiques (voir le Théorème 2.1)

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{i+1/2}^n &= \frac{a}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} u(t^n + s, x_{i+1/2}) ds - a u_i^n \\
&= \frac{a}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} u(t^n, x_{i+1/2} - as) ds - \frac{a}{h} \int_0^h u(t^n, x_{i+1/2} - y) dy \\
&= \frac{a}{h} [\int_0^h u(t^n, x_{i+1/2} - \sigma y) dy - \int_0^h u(t^n, x_{i+1/2} - y) dy]
\end{aligned} \tag{4.2}$$

(en posant  $y = h \frac{s}{\Delta t}$  dans la première intégrale)

$$= \frac{a}{h} \int_{y=0}^h \int_{z=\sigma y}^y u'(t^n, x_{i+1/2} - z) dz dy.$$

Retournant à la définition de l'erreur, on trouve donc

$$\begin{aligned}
e_{i+1/2}^n &= \frac{\varepsilon_{i+1/2}^n - \varepsilon_{i-1/2}^n}{h} \\
&= \frac{a}{h^2} \int_{y=0}^h \int_{z=\sigma y}^y [u'(t^n, x_{i+1/2} - z) - u'(t^n, x_{i-1/2} - z)] dz dy \\
&= \frac{a}{h^2} \int_{y=0}^h \int_{z=\sigma y}^y \int_{x=x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u''(t^n, x - z) dx dz dy,
\end{aligned}$$

et enfin on peut estimer

$$\begin{aligned}
\sum_{i \in \mathbb{Z}} h |e_{i+1/2}^n| &\leq \frac{a}{h} \int_{y=0}^h \int_{z=\sigma y}^y \left[ \sum_{i \in \mathbb{Z}} \int_{x=x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} |u''(t^n, x - z)| dx \right] dz dy \\
&= \frac{a}{h} \int_{y=0}^h \int_{z=\sigma y}^y \int_{\mathbb{R}} |u''(t^n, x - z)| dx dy dz \\
&= \frac{a}{2} h (1 - \sigma) \int_{\mathbb{R}} |u''(t = 0, x)| dx,
\end{aligned}$$

et le résultat (i) est démontré.

L'estimation d'erreur (ii) s'en déduit simplement en remarquant que pour l'équation de transport à coefficient constant on a

$$\int_{\mathbb{R}} |u''(t, x)| dx = \int_{\mathbb{R}} |u''(t = 0, x)| dx \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

(car  $u''$  vérifie la même équation et on peut donc utiliser le point (ii) de la Proposition 2.2). Par linéarité, on sait que  $w_i^n = u_i^n - v_i^n$  satisfait la même égalité que  $u_i^n$  dans la définition de l'erreur de consistance 4.3 :

$$w_i^{n+1} - w_i^n + \frac{a\Delta t}{h}[w_i^n - w_{i-1}^n] = \Delta t e_i^n,$$

ou encore

$$w_i^{n+1} = w_i^n \left(1 - \frac{a\Delta t}{h}\right) + \frac{a\Delta t}{h} w_{i-1}^n + \Delta t e_i^n.$$

Ceci permet d'estimer

$$|w_i^{n+1}| \leq |w_i^n| \left(1 - \frac{a\Delta t}{h}\right) + \frac{a\Delta t}{h} |w_{i-1}^n| + \Delta t |e_i^n|,$$

et en sommant sur  $i \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} \sum_{i \in \mathbb{Z}} h |w_i^{n+1}| &\leq \sum_{i \in \mathbb{Z}} h \left[ |w_i^n| \left(1 - \frac{a\Delta t}{h}\right) + \frac{a\Delta t}{h} |w_{i-1}^n| \right] + \Delta t \sum_{i \in \mathbb{Z}} h |e_i^n| \\ &= \sum_{i \in \mathbb{Z}} h |w_i^n| + \Delta t \sum_{i \in \mathbb{Z}} h |e_i^n| \\ &\leq \sum_{i \in \mathbb{Z}} h |w_i^n| + \Delta t \frac{a}{2} h (1 - \sigma) \int_{\mathbb{R}} |u''(t=0, x)| dx. \end{aligned}$$

Enfin en sommant de  $n = 0$  jusqu'à l'instant final, on trouve le résultat annoncé dans (ii).

Pour prouver (iii), on se ramène au cas précédent par régularisation. On choisit un noyau de convolution régularisant  $\rho \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ ,  $\rho \geq 0$ ,  $\int_{\mathbb{R}} \rho(z) dz = 1$  et on pose  $\rho_\delta(z) = \frac{1}{\delta} \rho(\frac{z}{\delta})$ . Considérons alors la donnée régularisée  $u_\delta^0 = u^0 \star \rho_\delta$  où le paramètre  $\delta > 0$  sera choisi plus tard. Le résultat (ii) donne

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} h |u_{\delta,i}^n - v_i^n| \leq \sum_{i \in \mathbb{Z}} h |u_{\delta,i}^0 - v_i^0| + t^n \frac{a}{2} h (1 - \sigma) \int_{\mathbb{R}} |u_\delta''(t=0, x)| dx,$$

On utilise alors les estimations d'erreur de la Section 4.9 pour calculer :

$$\begin{aligned} \sum_{i \in \mathbb{Z}} h |u_i^n - v_i^n| &\leq \sum_{i \in \mathbb{Z}} h [ |u_{\delta,i}^n - u_i^n| + |u_{\delta,i}^n - v_i^n| ] \\ &\leq \sum_{i \in \mathbb{Z}} h |u_{\delta,i}^n - u_i^n| + \sum_{i \in \mathbb{Z}} h |u_{\delta,i}^0 - v_i^0| + t^n \frac{a}{2} h (1 - \sigma) \int_{\mathbb{R}} |u_\delta''(t=0, x)| dx \\ &\leq C \delta \int_{\mathbb{R}} |u'(t=0, x)| dx + \sum_{i \in \mathbb{Z}} h |u_i^0 - v_i^0| + t^n \frac{a}{2} h (1 - \sigma) \int_{\mathbb{R}} |u' \star \rho'_\delta(t=0, x)| dx \\ &\leq C \delta \int_{\mathbb{R}} |u'(t=0, x)| dx + \sum_{i \in \mathbb{Z}} h |u_i^0 - v_i^0| + t^n \frac{a}{2} h (1 - \sigma) \int_{\mathbb{R}} |u'(t=0, x)| dx \|\rho'_\delta(x)\|_{L^1(\mathbb{R})} \\ &\leq C \delta \int_{\mathbb{R}} |u'(t=0, x)| dx + \sum_{i \in \mathbb{Z}} h |u_i^0 - v_i^0| + C \delta t^n \frac{a}{2} h (1 - \sigma) \int_{\mathbb{R}} |u'(t=0, x)| dx \end{aligned}$$

(en notant à nouveau que  $\int_{\mathbb{R}} |u'(t=0, x)| dx = \int_{\mathbb{R}} |u'(t, x)| dx$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ). Il reste à choisir le paramètre  $\delta$  de façon optimale ( $\delta = \sqrt{t^n a h (1 - \sigma)}$ ) pour conclure (iii).  $\square$

## 4.5 Convergence (maillage irrégulier)

La situation est bien plus délicate pour des maillages irréguliers. En particulier, *l'erreur de consistance ne tend pas vers zéro*. Il faut mettre en oeuvre des méthodes d'estimation d'erreur plus complexes pour arriver à montrer une estimation d'erreur, ce que nous faisons dans un cadre continu seulement.

### 4.5.1 L'erreur de consistance ne tend pas vers zéro

**Lemme 4.1** *Soit  $w \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  et*

$$\varepsilon_{i+1/2} = \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} w(x_{i+1/2} - as) ds - \frac{1}{\Delta x_i} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} w(x) dx,$$

alors l'erreur de consistance

$$e_i = \frac{\varepsilon_{i+1/2} - \varepsilon_{i-1/2}}{\Delta x_i},$$

est d'ordre  $O(1)$  pour un maillage faiblement régulier (voir (4.1)) et d'ordre  $O(h)$  pour un maillage uniforme.

**Démonstration :** On utilise la démonstration du Théorème 4.1 (i), et en particulier l'estimation (4.2). Posant  $\sigma_i = \frac{a \Delta t}{\Delta x_i}$  on a alors :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{i+1/2} &= \frac{a}{\Delta x_i} \int_{x=0}^{\Delta x_i} \int_{y=\sigma_i x}^x w'(x_{i+1/2} - y) dy dx \\ &= \frac{a}{\Delta x_i} w'(x_{i+1/2}) \int_{x=0}^{\Delta x_i} \int_{y=\sigma_i x}^x dx dy + O(h^2) \\ &= a w'(x_{i+1/2}) \frac{1-\sigma_i}{2} \Delta x_i + O(h^2). \end{aligned}$$

On obtient alors

$$\begin{aligned} e_i &= a w'(x_{i+1/2}) \frac{1-\sigma_i}{2} - \frac{\Delta x_{i-1}}{\Delta x_i} w'(x_{i-1/2}) \frac{1-\sigma_{i-1}}{2} + O(h) \\ &= \frac{a}{2} [w'(x_{i+1/2}) - \frac{\Delta x_{i-1}}{\Delta x_i} w'(x_{i-1/2})] + O(h) \\ &= \frac{a}{2} w'(x_{i-1/2}) [1 - \frac{\Delta x_{i-1}}{\Delta x_i}] + O(h). \end{aligned}$$

Pour un maillage uniforme le premier terme du membre de droite disparaît et on obtient bien  $O(h)$  (ceci est aussi vrai pour un maillage fortement régulier i.e.  $\Delta x_i - \Delta x_{i-1} = O(h^2)$ ). Mais sous la seule hypothèse (4.1) ce terme reste d'ordre un.  $\square$

Ceci ne signifie pas que le schéma ne converge pas. Mais il faut utiliser des méthodes d'analyse plus élaborées qui utilisent en particulier la structure différentielle de l'erreur.

### 4.5.2 Retour vers le continu

considérons la structure générale suivante, dont on verra plus loin comment elle peut s'appliquer à des cas concrets. On désigne par  $u$  la solution d'une équation de transport et  $v$  une approximation de toutes les inégalités d'entropies

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u + \frac{\partial}{\partial x} u = 0, & t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}, \\ u(t = 0, x) = u^0(x), \end{cases} \quad (4.3)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}|v - k| + \frac{\partial}{\partial x}|v - k| \leq \frac{\partial}{\partial x}\varepsilon(k; t, x), & t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}, \\ v(t = 0, x) = v^0(x). \end{cases} \quad (4.4)$$

Alors on a

**Théorème 4.2** *Dans la situation (4.3)-(4.4), on suppose que  $v \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+; L^1(\mathbb{R}))$ . On a alors l'estimation*

$$\|u(t) - v(t)\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq \|u^0 - v^0\|_{L^1(\mathbb{R})} + C \sqrt{\|u^{0r}\|_{L^1(\mathbb{R})} \|\varepsilon[t]\|},$$

avec

$$\|\varepsilon[t]\| = \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \sup_{k \in \mathbb{R}} |\varepsilon(k; s, x)| dx ds.$$

L'utilisation d'entropies particulières comme  $S(u) =$  est dû à Kružkov [14] qui les a utilisé pour montrer l'unicité des L.C.S.. Ce type d'énoncé (estimation d'erreur) est dû à Kuznetsov [15]. La forme générale de l'erreur et la norme particulière sur  $\varepsilon$  sont dûs à Bouchut et Perthame [5]. Nous démontrons ci-dessous ce résultat même si la démonstration est valable dans un cadre bien plus général.

**Démonstration :** L'idée de la démonstration consiste à doubler les variables. On choisit  $k = u(s, y)$  dans (4.4) et  $k = v(t, x)$  dans l'égalité d'entropie

$$\frac{\partial}{\partial s}|u(s, y) - k| + \frac{\partial}{\partial y}|u(s, y) - k| = 0.$$

Ceci donne

$$\frac{\partial}{\partial s}|u(s, y) - v(t, x)| + \frac{\partial}{\partial y}|u(s, y) - v(t, x)| + \frac{\partial}{\partial t}|v(t, x) - u(s, y)| + \frac{\partial}{\partial x}|v(t, x) - u(s, y)| \leq \frac{\partial}{\partial x}\varepsilon(u(s, y); t, x).$$

Dans une *première étape*, multiplions par une fonction  $\rho_\delta(t - s) := \frac{1}{\delta}\rho(\frac{t-s}{\delta})$  avec  $\text{supp}\rho = [-1, 1]$ ,  $\rho \geq 0$ , paire. On obtient

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s}[\rho_\delta(t - s)|u(s, y) - v(t, x)|] &+ \frac{\partial}{\partial y}[\rho_\delta(t - s)|u(s, y) - v(t, x)|] + \frac{\partial}{\partial t}[\rho_\delta(t - s)|v(t, x) - u(s, y)|] \\ &+ \frac{\partial}{\partial x}[\rho_\delta(t - s)|v(t, x) - u(s, y)|] \leq \frac{\partial}{\partial x}[\rho_\delta(t - s)\varepsilon(u(s, y); t, x)]. \end{aligned}$$

Puis intégrant en  $s$  entre 0 et  $T$ , on trouve

$$\begin{aligned} [\rho_\delta(t - T)|u(T, y) - v(t, x)|] &- [\rho_\delta(t)|u^0(y) - v(t, x)|] + \frac{\partial}{\partial y} \int_0^T [\rho_\delta(t - s)|u(s, y) - v(t, x)| ds] \\ &+ \frac{\partial}{\partial t} \int_0^T [\rho_\delta(t - s)|v(t, x) - u(s, y)|] ds + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^T [\rho_\delta(t - s)|v(t, x) - u(s, y)|] ds \\ &\leq \frac{\partial}{\partial x} \int_0^T [\rho_\delta(t - s)\varepsilon(u(s, y); t, x)] ds. \end{aligned}$$

Pour  $t \in [2\delta, T - 2\delta]$  les deux premiers termes sont nuls et on passe alors à la limite  $\delta \rightarrow 0$ , pour obtenir

$$\frac{\partial}{\partial t}|u(t, y) - v(t, x)| + \frac{\partial}{\partial y}|u(t, y) - v(t, x)| + \frac{\partial}{\partial x}|v(t, x) - u(t, y)| \leq \frac{\partial}{\partial x}\varepsilon(u(t, y); t, x).$$

Dans une *deuxième étape*, multiplions par une fonction  $\rho_\delta(x-y) := \frac{1}{\delta}\rho(\frac{x-y}{\delta})$  avec  $\text{supp}\rho = [-1, 1]$ ,  $\rho \geq 0$ , paire. On obtient

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}[\rho_\delta(x-y)|v(t,x) - u(t,y)|] + \frac{\partial}{\partial y}[\rho_\delta(x-y)|u(t,y) - v(t,x)|] \\ + \frac{\partial}{\partial x}[\rho_\delta(x-y)|v(t,x) - u(t,y)|] \leq \rho_\delta(x-y) \frac{\partial}{\partial x}\varepsilon(u(t,y); t, x). \end{aligned}$$

Intégrons en  $x$  et  $y$ , on trouve

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} [\rho_\delta(x-y)|v(t,x) - u(t,y)|] dx dy &\leq - \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial x} \rho_\delta(x-y) \varepsilon(u(t,y); t, x) \\ &= \frac{1}{\delta} \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} \frac{1}{\delta} \rho'(\frac{x-y}{\delta}) \varepsilon(u(t,y); t, x) dx dy \\ &\leq \frac{1}{\delta} \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} \frac{1}{\delta} |\rho'(\frac{x-y}{\delta})| \sup_k |\varepsilon(k; t, x)| dx dy \\ &= \frac{C}{\delta} \int_{\mathbb{R}} \sup_k |\varepsilon(k; t, x)| dx. \end{aligned}$$

Enfin on intègre en  $t$  et on trouve

$$\int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} \rho_\delta(x-y)|v(t,x) - u(t,y)| dx dy \leq \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} \rho_\delta(x-y)|v^0(x) - u^0(y)| dx dy + \frac{C}{\delta} \|\varepsilon[t]\|,$$

donc

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |v(t,x) - u(t,x)| dx &\leq \int_{\mathbb{R}} |v^0(x) - u^0(x)| dx + \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} \rho_\delta(x-y)|u(t,x) - u(t,y)| dx \\ &\quad + \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} \rho_\delta(x-y)|u^0(x) - u^0(y)| dx + \frac{C}{\delta} \|\varepsilon[t]\| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} |v^0(x) - u^0(x)| dx + 2\delta \|u^{0'}\|_{L^1(\mathbb{R})} + \frac{C}{\delta} \|\varepsilon[t]\|. \end{aligned}$$

Il reste à optimiser le paramètre  $\delta$  pour obtenir le résultat du Théorème 4.2.

### 4.5.3 Estimation d'erreur pour la viscosité évanescence

Montrons comment appliquer ce résultat à la méthode de viscosité évanescence.

Pour la *méthode de viscosité évanescence*, on choisit  $v(t,x)$  solution de

$$\frac{\partial}{\partial t}v + \frac{\partial}{\partial x}v = \frac{\partial}{\partial x}[\alpha(x) \frac{\partial v}{\partial x}]. \quad (4.5)$$

Lorsque  $\alpha(x) = \alpha = Cste$ , on vérifie immédiatement (voir la méthode dans la section 3.2.2), que

$$\left\| \frac{\partial^2}{\partial x^2} v(t,x) \right\|_{L^1(\mathbb{R})} = \left\| \frac{\partial^2}{\partial x^2} v^0(x) \right\|_{L^1(\mathbb{R})}.$$

On en déduit que

**Théorème 4.3** *Pour  $\alpha(x) = \alpha > 0$ , on a*

$$(i) \quad \|u(t,x) - v(t,x)\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq \|u^0(x) - v^0(x)\|_{L^1(\mathbb{R})} + \alpha t \|u^{0''}(x)\|_{L^1(\mathbb{R})},$$

$$(ii) \quad \|u(t,x) - v(t,x)\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq \|u^0(x) - v^0(x)\|_{L^1(\mathbb{R})} + C\sqrt{\alpha t} \|u^{0'}(x)\|_{L^1(\mathbb{R})}.$$

Notons que la partie (ii) se déduit d'une régularisation par convolution comme dans la preuve du Théorème 4.1.

Par contre si  $\alpha(x)$  n'est que borné, cet argument ne marche plus: d'une part on ne peut pas montrer d'estimation sur la dérivée seconde, d'autre part on ne peut pas régulariser par convolution. On peut s'en sortir en utilisant la méthode de la section 4.5.2 et montrer le :

**Théorème 4.4** ( $\alpha(x) > 0$  non constant)

$$\|u(t, x) - v(t, x)\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq \|u^0(x) - v^0(x)\|_{L^1(\mathbb{R})} + C\sqrt{\|\alpha\|_{L^\infty}} t \|u^{0'}(x)\|_{L^1(\mathbb{R})}.$$

**Démonstration :** On a besoin alors de deux étapes

(i) On montre que

$$\left\| \frac{\partial}{\partial x} v(t, x) \right\|_{L^1(\mathbb{R})} = \left\| \frac{\partial}{\partial x} v^0(x) \right\|_{L^1(\mathbb{R})}.$$

En effet, dérivant en  $x$  l'équation (4.5) et posant  $w(t, x) = \frac{\partial}{\partial x} v(t, x)$  on a :

$$\frac{\partial}{\partial t} w + \frac{\partial}{\partial x} w = \frac{\partial}{\partial x} [\alpha'(x)w(t, x)] + \frac{\partial}{\partial x} [\alpha(x) \frac{\partial w}{\partial x}].$$

Comme dans le chapitre 2, on en déduit que

$$\frac{\partial}{\partial t} |w| + \frac{\partial}{\partial x} |w| \leq \frac{\partial}{\partial x} [\alpha'(x)|w|] + \frac{\partial}{\partial x} [\alpha(x) \frac{\partial |w|}{\partial x}],$$

et après intégration en  $x$ , on en déduit le résultat.

(ii) On a donc, pour toute fonction convexe  $S(\cdot)$ ,

$$\frac{\partial}{\partial t} S(v) + \frac{\partial}{\partial x} S(v) = \frac{\partial}{\partial x} [\alpha(x) \frac{\partial S(v)}{\partial x}] - \alpha(x) S''(v) \left( \frac{\partial}{\partial x} v \right)^2 \leq \frac{\partial}{\partial x} [\alpha(x) \frac{\partial S(v)}{\partial x}].$$

En particulier pour l'entropie de Kruřkov  $S(u) = |u - k|$ , on en déduit que (4.4) est vrai avec  $\varepsilon(k; t, x) = \alpha(x) \operatorname{sgn}(v - k) \frac{\partial}{\partial x} (v - k) = \alpha(x) \operatorname{sgn}(v - k) \frac{\partial v}{\partial x}$  et on a donc

$$\|\varepsilon(k; t, x)\| \leq \|\alpha\|_{L^\infty} t \|v^{0'}\|_{L^1(\mathbb{R})}.$$

On déduit du Théorème 4.2 que

$$\|u(t) - v(t)\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq \|u^0 - v^0\|_{L^1(\mathbb{R})} + C\sqrt{t} \|\alpha\|_{L^\infty} \|u^{0'}\|_{L^1(\mathbb{R})} \|v^{0'}\|_{L^1(\mathbb{R})}.$$

Ce résultat n'est pas celui annoncé qui est plus subtil et a été démontré dans [18] (on peut se contenter de l'estimation utilisant  $u^{0'}$  et  $v^{0'}$  en première lecture). ■

#### 4.5.4 Estimation d'erreur pour le schéma décentré

Pour simplifier l'analyse, nous allons considérer le schéma semi-discret (méthode des lignes)

$$h_i \frac{d}{dt} v_i(t) + v_i(t) - v_{i-1}(t) = 0. \quad (4.6)$$

Nous ne nous posons pas la question de l'existence d'une solution  $v \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+; l^1(\mathbb{Z}))$  à ce système (simple) d'EDO et montrons le



**Théorème 4.5** On appelle  $v_h(t, x)$  la fonction constante par maille

$$v_h(t, x) := v_i(t) \quad \text{pour} \quad x \in (x_{i-1/2}, x_{i+1/2}),$$

alors on a

$$\|u(t, x) - v_h(t, x)\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq \|u^0(x) - v_h^0(x)\|_{L^1(\mathbb{R})} + C\sqrt{h}t \left( |v_h^0(x)|_{TV(\mathbb{R})} \|u^{0'}(x)\|_{L^1(\mathbb{R})} \right)^{1/2}.$$

Notons que

$$|v_h^0(x)|_{TV(\mathbb{R})} = \sum_{i \in \mathbb{Z}} |v_{i+1} - v_i|.$$

**Démonstration :** On a, multipliant (4.6) par  $\text{sgn}(v_i - k)$

$$h_i \frac{d}{dt} |v_i(t) - k| + |v_i(t) - k| - |v_{i-1}(t) - k| \leq 0.$$

Ceci s'écrit encore

$$\frac{\partial}{\partial t} |v_h(t, x) - k| + \frac{\partial}{\partial x} L_k(t, x) \leq 0,$$

avec  $L_k(t, x)$  la fonction continue linéaire par maille, pour  $x \in (x_{i-1/2}, x_{i+1/2})$ ,

$$L_k(t, x) = |v_i(t) - k| + \frac{x - x_{i+1/2}}{h_i} [ |v_i(t) - k| - |v_{i-1}(t) - k| ].$$

On obtient donc

$$\frac{\partial}{\partial t} |v_h(t, x) - k| + \frac{\partial}{\partial x} |v_h(t, x) - k| \leq \varepsilon(k; t, x),$$

avec

$$\varepsilon(k; t, x) = |v_h(t, x) - k| - L_k(t, x)$$

et, pour  $x \in (x_{i-1/2}, x_{i+1/2})$

$$|\varepsilon(k; t, x)| = \frac{x_{i+1/2} - x}{h_i} \left| |v_i(t) - k| - |v_{i-1}(t) - k| \right| \leq |v_i(t) - v_{i-1}(t)|,$$

et

$$\|\varepsilon(k; t, x)\| \leq \int_0^t \sum_{i \in \mathbb{Z}} h_i |v_i(s) - v_{i-1}(s)| ds \leq t h |v^0|_{TV}.$$

Le résultat découle encore du Théorème 4.2 .

## 4.6 Théorie $L^2$ et méthode de Fourier

Les systèmes linéaires symétrisables ayant naturellement une structure  $L^2$  (voir le Théorème 1.1), il est naturel de se poser également la question d'analyser les méthodes numériques dans cette norme.

Nous considérons donc une équation d'advection à coefficients constants (pour avoir décroissance de la norme  $L^2$ ) et un schéma sous la forme 4.1 , que l'on écrit explicitement comme

$$\begin{cases} v_i^{n+1} - v_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} [\langle a v \rangle_{i+1/2}^n - \langle a v \rangle_{i-1/2}^n] = 0, \\ \langle a v \rangle_{i+1/2}^n = a_+ v_i^n + a_- v_{i+1}^n. \end{cases}$$

Afin d'appliquer la transformée de Fourier, nous allons considérer un maillage uniforme et passer au continu en écrivant

$$v^n(x) = \mathcal{I}_{\{x_{i-1/2} < x \leq x_{i+1/2}\}} v_i^n.$$

L'équation (4.6) s'écrit donc aussi

$$\begin{cases} v^{n+1}(x) = v^n(x) [1 - \sigma_+ + \sigma_-] + \sigma_+ v^n(x - \Delta x) - \sigma_- v^n(x + \Delta x), \\ \sigma_{\pm} = a_{\pm} \frac{\Delta t}{\Delta x}. \end{cases}$$

Ceci permet de passer en Fourier et d'obtenir avec les notations du paragraphe 1.4,

$$\begin{cases} \widehat{v^{n+1}}(k) = \widehat{v^n}(k) b(k), \\ b(k) = 1 - \sigma_+ (1 - e^{ik\Delta x}) + \sigma_- (1 - e^{-ik\Delta x}) \end{cases}$$

**Définition 4.4** La fonction  $b(k)$  est appelée coefficient d'amplification.

Elle permet d'énoncer le résultat suivant qui se déduit directement de l'égalité des normes  $\|v^n\|_{L^2(\mathbb{R})}$  et  $\|\widehat{v^n}\|_{L^2(\mathbb{R})}$ .

**Proposition 4.2** Avec les notations ci-dessus, on a l'estimation

$$\|v^{n+1}\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \|b\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \|v^n\|_{L^2(\mathbb{R})}.$$

Le schéma (4.6) est donc stable  $l^2$  si

$$\|b\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq 1.$$

Donnons quelques exemples

**Schéma centré :**  $a_+ = a_- = \frac{1}{2}$

On trouve alors

$$b(k) = 1 + \frac{\sigma}{2}(e^{ik\Delta x} - e^{-ik\Delta x}) = 1 + i\sigma \sin(\Delta x k).$$

Puisque  $1 \leq |b(k)| \leq (1 + \sigma^2)^{1/2}$  on en déduit que le schéma n'est que faiblement stable  $l^2$  sous la condition

$$(1 + \sigma^2)^{n/2} = e^{\frac{n}{2} \ln(1 + \sigma^2)} = e^{\frac{T}{2\Delta t} \ln(1 + \sigma^2)} \leq C(T),$$

ce qui mène à la condition de CFL très stricte

$$a^2 \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \leq C(T),$$

**Schéma décentré :**  $a_+ = a$ ,  $a_- = 0$  (pour  $a > 0$ )

On trouve alors

$$b(k) = 1 - \sigma(1 - e^{ik\Delta x}),$$

$$|b(k)|^2 = [1 - \sigma + \sigma \cos(k\Delta x)]^2 + \sigma^2 [\sin(k\Delta x)]^2 = 1 + 2\sigma(1 - \sigma)[\cos^2(k\Delta x) - 1],$$

et

$$|b(k)|^2 \leq 1 \iff 0 \leq \sigma \leq 1.$$

On retrouve donc la condition "CFL  $\leq 1$ " de la stabilité  $L^\infty$ .

Voir [11] p178 et suivantes pour plus d'information.

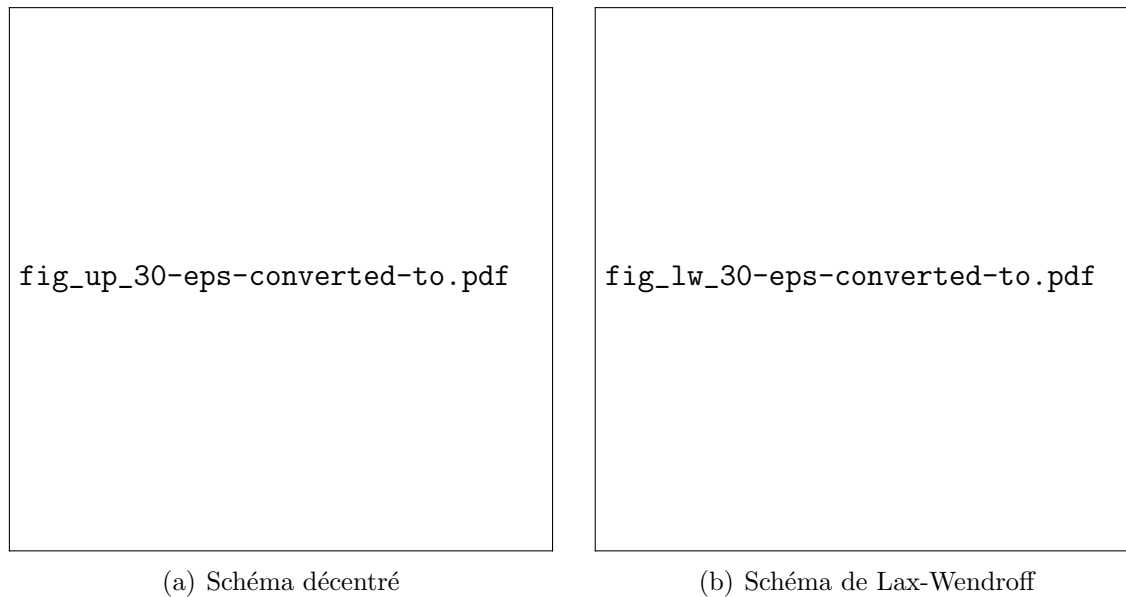


Figure 4.4: COMPARAISON DES SCHÉMAS DÉCENTRÉ ET DE LAX-WENDROFF, 30 POINTS, CFL=0,5.

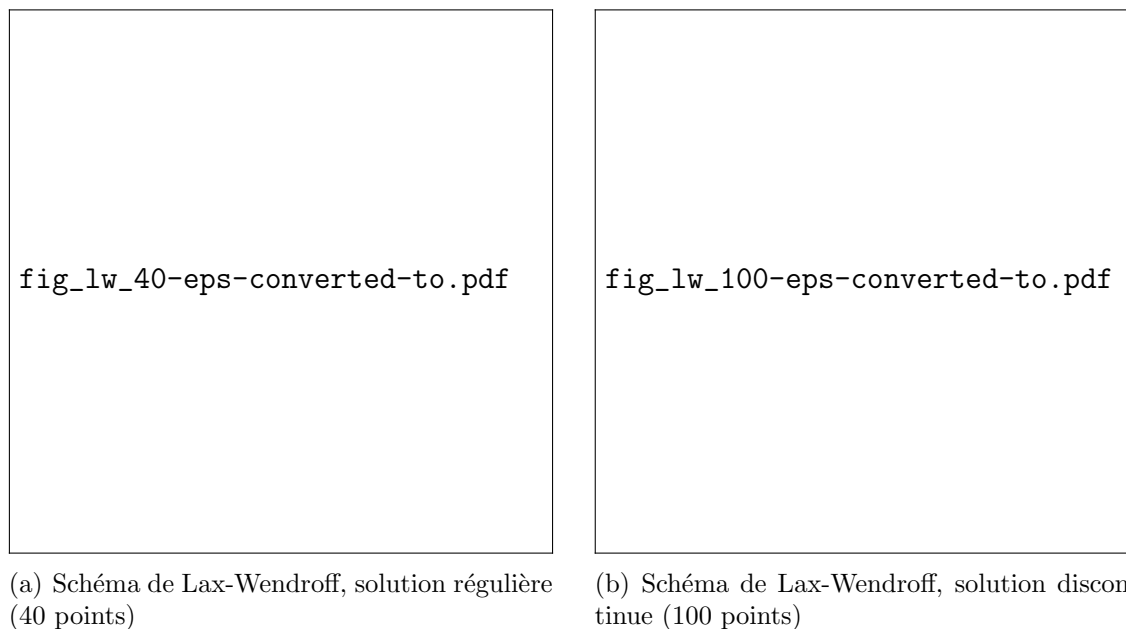


Figure 4.5: LE SCHÉMA DE LAX-WENDROFF, CFL=0,5. TRÈS PRÉCIS SUR LES SOLUTIONS RÉGULIÈRES, LE SCHÉMA DE L.-W. DONNE DES OSCILLATIONS LIMITÉES SUR LES SOLUTIONS RÉGULIÈRES. IL EST STABLE  $L^2$  MAIS PAS  $L^\infty$ .

## 4.7 Schéma de Lax-Wendroff et ordre deux

### 4.7.1 Le schéma de Lax-Wendroff

Le schéma centré (voir Section 4.2) n'est d'ordre 2 que dans la variable d'espace. Il apparaît que l'ordre 2 en temps ajoute de la diffusion et diminue donc les oscillations tout en augmentant la précision. Pour établir cette méthode d'ordre deux en espace et temps, due à Lax et Wendroff, on utilise la formule de Taylor. On calcule pour la solution de l'équation de transport dans le cas d'une

vitesse d'advection constante :

$$u(t^{n+1}, x) = u(t^n, x) + (t^{n+1} - t^n) \frac{\partial u}{\partial t}(t^n, x) + \frac{(t^{n+1} - t^n)^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t^n, x) + O(\Delta t^2)$$

ou encore

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t^n, x) = \frac{u(t^{n+1}, x) - u(t^n, x)}{\Delta t} + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t^n, x) + O(\Delta t^2)$$

or

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left( -a \frac{\partial u}{\partial x} \right) = -a \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right) = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Selon cette idée (qui se situe plutôt dans l'esprit différences finies que volumes finis), on obtient le schéma de Lax-Wendroff

$$\frac{v_i^{n+1} - v_i^n}{\Delta t} + a \frac{v_{i+1}^n - v_{i-1}^n}{2\Delta x} - \frac{a^2 \Delta t}{2\Delta x^2} (v_{i+1}^n + v_{i-1}^n - 2v_i^n) = 0.$$

### 4.7.2 Stabilité $\ell^2$

Ce terme de diffusion supplémentaire ne permet pas de prouver de la stabilité  $\ell^\infty$ , mais on peut réaliser une étude  $\ell^2$  par la méthode de Fourier par exemple. On trouve alors le :

**Théorème 4.6** *Sous la condition de stabilité  $CFL \leq 1$ , le coefficient d'amplification du schéma de Lax-Wendroff vérifie*

$$|b_{LW}(k)| \leq 1,$$

et le schéma est donc conditionnellement stable  $\ell^2$ .

**Démonstration :** On écrit

$$\begin{aligned} v_i^{n+1} &= v_i^n [1 - \sigma^2] + v_{i+1}^n \left( \frac{\sigma^2}{2} - \frac{\sigma}{2} \right) + v_{i-1}^n \left( \frac{\sigma^2}{2} + \frac{\sigma}{2} \right) \\ b_{LW}(k) &= 1 - \sigma^2 + \left( \frac{\sigma^2}{2} - \frac{\sigma}{2} \right) e^{ik\Delta x} + \left( \frac{\sigma^2}{2} + \frac{\sigma}{2} \right) e^{-ik\Delta x} \\ &= 1 - \sigma^2(1 - \cos k\Delta x) - i\sigma \sin k\Delta x. \end{aligned}$$

On obtient donc (puisque pour le schéma centré  $b_C = 1 - i\sigma \sin(k\Delta x)$ ) que

$$|b_{LW}(k)| \leq |b_C(k)|$$

et posant  $X = \cos(k\Delta x)$ ,  $X \in [-1, +1]$ ,

$$\begin{aligned} |b_{LW}(k)|^2 &= |1 - \sigma^2(1 - X)|^2 + \sigma^2(1 - X^2) \\ &= 1 + \sigma^4 + \sigma^2 X^2 - 2\sigma^2 + 2\sigma^2 X - 2\sigma^4 X + \sigma^2 - \sigma^2 X^2 \\ &= 1 - \sigma^2(1 - \sigma^2) + 2\sigma^2(1 - \sigma^2)X - \sigma^2 X^2(1 - \sigma^2) \\ &= 1 - \sigma^2(1 - \sigma^2)[1 - X]^2 \\ &\leq 1. \end{aligned}$$

■

## 4.8 Schémas d'ordre deux (reconstruction nonlinéaire)

Une idée plus récente consiste à réaliser des schémas d'ordre deux non-linéaires. Ceci explique aussi la réelle différence des méthodes de volumes finis comparés aux éléments finis. Dans les méthodes d'éléments finis, on monte en ordre en calculant des fonctions plus précises (ici on penserait à calculer des fonctions linéaires par maille plutôt que constante par maille), et ceci se réalise en utilisant les éléments d'ordre plus élevés. Par contre dans les méthodes de volumes finis on va reconstruire la fonction linéaire par maille à partir de ses valeurs moyennes. Cette idée est motivé par le système de la dynamique des gaz qui comporte 5 équations en dimension trois. Calculer des fonctions linéaires par mailles revient, pour chaque équation, à multiplier par trois le nombre d'inconnues, on en obtient donc 15. L'autre idée fondamentale consiste à réaliser cette opération de reconstruction de pente de façon non-linéaire.

On se donne des mailles  $(x_{i-1/2}, x_{i+1/2})$ , leur centre  $x_i = (x_{i-1/2} + x_{i+1/2})/2$  et une solution constante par maille  $v_i$ . Sur une maille on peut calculer deux pentes (à droite et à gauche)

$$p_{i+} = \frac{v_{i+1} - v_i}{x_{i+1} - x_i}, \quad p_{i-} = \frac{v_i - v_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}.$$

Centrer un schéma consiste à penser la pente de  $v$  comme la moyenne de ces quantités. Pour préserver la stabilité des schémas décentrés, on va plutôt poser

$$p_i = \text{minmod}(p_{i+}, p_{i-}), \quad (4.7)$$

où la fonction *minmod* est définie par

$$\text{minmod}(p, q) = \begin{cases} 0 & \text{si } \text{sgn}(p) \neq \text{sgn}(q) \\ \min(|p|, |q|) \text{sgn}(p) & \text{si } \text{sgn}(p) = \text{sgn}(q) \end{cases} \quad (4.8)$$

Posons alors pour les fonctions constante par maille (piecewise constant) ou linéaire par maille (piecewise linear)

$$\begin{cases} v_{\text{PC}}(x) = v_i & \text{pour } x_{i-1/2} < x < x_{i+1/2}, \\ v_{\text{PL}}(x) = v_i + p_i(x - x_i) & \text{pour } x_{i-1/2} < x < x_{i+1/2}. \end{cases}$$

Cette reconstruction linéaire par maille a les propriétés suivantes

### Lemme 4.2

$$\begin{aligned} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} v_{\text{PL}}(x) dx &= v_i, \\ \|v_{\text{PL}}\|_{L^\infty} &= \|v_{\text{PC}}\|_{L^\infty} = \sup_{i \in \mathbb{Z}} |v_i|, \\ \|v_{\text{PL}}\|_{TV} &= \|v_{\text{PC}}\|_{TV} = \sup_{i \in \mathbb{Z}} |v_{i+1} - v_i|. \end{aligned}$$

(Démonstration laissée en exercice).

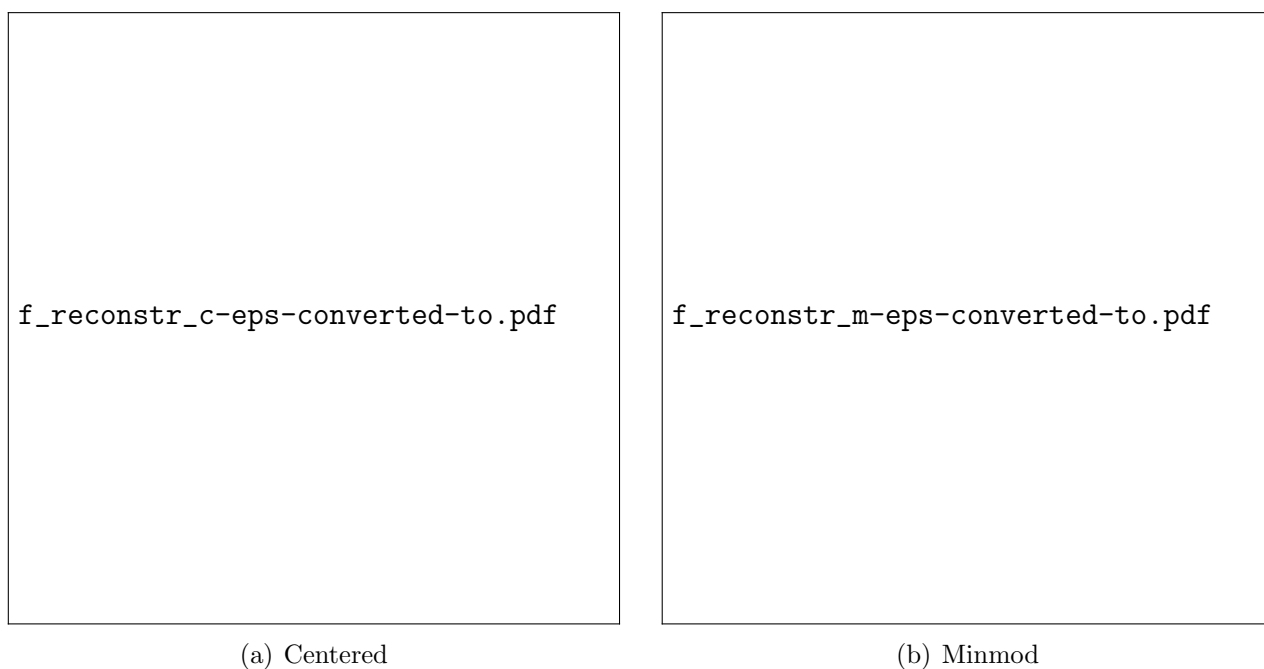


Figure 4.6: UNE FONCTION CUBIQUE CONSTANTE PAR MAILLE ET SES RECONSTRUCTIONS CENTRÉES OU 'MINMOD'.

Dans le cas où on se donne une fonction  $v(x) \in L^1$  avec  $v'' \in L^1$ , et où on utilise  $v_i = \frac{1}{h_i} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} v(x) dx$ , on peut aussi montrer que l'approximation linéaire par maille,  $v_{\text{PL}}$ , est une approximation d'ordre deux, i.e. en  $O(h^2)$ , de la fonction  $v(x)$ . Par contre, pour le cas de l'approximation constante par maille,  $v_{\text{PC}}$ , on montre dans la section 4.9 qu'il s'agit bien d'une approximation d'ordre 1).



Figure 4.7: COMPARAISON DES SOLUTIONS : EXACTE, DONNÉE PAR LE SCHÉMA DÉCENTRÉ ET PAR LE SCHÉMA D'ORDRE 2 EN ESPACE AVEC 100 MAILLES ET CFL=0,4 (GAUCHE) OU 0,7 (DROITE).

On construit alors un schéma décentré d'ordre deux (en espace) de la façon suivante :

$$v_i^{n+1} - v_i^n + \frac{\Delta t}{h_i} [A_{i+\frac{1}{2}}^n - A_{i-\frac{1}{2}}^n] = 0, \quad (4.9)$$

$$A_{i+\frac{1}{2}}^n = \begin{cases} a [v_i^n + \frac{h_i}{2} p_i] & \text{pour } a \geq 0, \\ a [v_{i+1}^n - \frac{h_{i+1}}{2} p_{i+1}] & \text{pour } a \leq 0. \end{cases} \quad (4.10)$$

Un exemple, pour l'advection à vitesse constante, est donnée dans la figure 4.7, qui montre le gain de précision par rapport au schéma décentré d'ordre 1. Le schéma (4.9)-(4.10) a toutefois tendance à osciller pour un CFL de plus que 0,5 et il convient alors de passer à l'ordre deux en temps.

**Exercice :** Le limiteur de Von Albada est défini par la formule (comparer à (4.8))

$$\text{slope}_{\text{valbd}}(p, q) = \begin{cases} 0 & \text{si } \text{sgn}(p) \neq \text{sgn}(q), \\ \frac{p(q^2 + \varepsilon^2) + q(p^2 + \varepsilon^2)}{p^2 + q^2 + \varepsilon^2} & \text{si } \text{sgn}(p) = \text{sgn}(q), \end{cases} \quad (4.11)$$

où  $\varepsilon > 0$  est un paramètre.

1. Que trouve-t'on pour  $p = q$  (cas des fonctions  $\mathcal{C}^1$ ), et  $\varepsilon$  petit?
2. Pour  $p > 0, q > 0$  montrer que  $\text{slope}_{\text{valbd}}(p, q) \geq \min\text{mod}(p, q)$ .
3. Examiner les propriétés du Lemme 4.2 pour ce limiteur.

## 4.9 Approximation par des fonctions constantes par maille

Nous avons utilisé un résultat d'approximation dans les démonstrations ci-dessus. Nous en donnons les énoncés et démonstrations ici. Nous utilisons toujours la notation  $\rho_\delta(z) = \frac{1}{\delta} \rho(\frac{z}{\delta})$  où le paramètre  $\delta$  est strictement positif et  $\rho$  désigne un noyau de convolution régularisant  $\rho \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \int_{\mathbb{R}} \rho(z) dz = 1$ .

**Lemme 4.3** Soit  $w_\delta = w \star \rho_\delta$  alors

$$\int_{\mathbb{R}} |w - w_\delta| dx \leq \delta \int_{\mathbb{R}} |w'(x)| dx \int_{\mathbb{R}} |y \rho(y)| dy. \quad (4.12)$$

**Démonstration :** Pour montrer cette inégalité, nous écrivons en utilisant le théorème de Fubini,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |w(x) - w_\delta(x)| dx &= \int_{\mathbb{R}} |w(x) - \int_{\mathbb{R}} w(x-y) \rho_\delta(y) dy| dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} | \int_{\mathbb{R}} (w(x) - w(x-y)) \rho_\delta(y) dy | dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} | \int_{\mathbb{R}} [\int_{z=0}^y w'(x-z) dz] \rho_\delta(y) dy | dx \\ &\leq \int_{y \in \mathbb{R}} \int_{z \in (0, y)} [ \int_{x \in \mathbb{R}} |w'(x-z)| dx ] |\rho_\delta(y)| dz dy \\ &= \int_{y \in \mathbb{R}} \int_{z \in (0, y)} |\rho_\delta(y)| dz dy [ \int_{\mathbb{R}} |w'(x)| dx ], \end{aligned}$$

et le résultat en découle. ■

**Exercice :** Soit  $w_h$  la fonction

$$w_h(x) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} w_i \mathcal{I}_{\{x_{i-1/2} \leq x \leq x_{i+1/2}\}}, \quad (4.13)$$

montrer l'inégalité

$$\|w - w_h\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq h \int_{\mathbb{R}} |w'(x)| dx. \quad (4.14)$$





# Chapitre 5

## Méthodes des volumes finis pour les L. C. S.

Revenons maintenant au cas nonlinéaire des lois de conservation scalaires :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u + \frac{\partial}{\partial x} A(u) = 0, \\ u(t = 0, x) = u^0(x), \end{cases} \quad (5.1)$$

avec un flux  $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  donné. On pose à nouveau  $a(u) = A'(u) \in \mathcal{C}^1$  (au moins) et il est utile de remarquer que  $a(\cdot)$  est la vitesse de transport pour les solutions régulières.

Nous proposons d'étudier les notions de décentrement dans ce cas nonlinéaire et nous utilisons à nouveau les notations discrètes de la Section 4.1.

### 5.1 Principe de la méthode des V.F.

Rappelons que le principe de la méthode des volumes finis consiste à écrire que la solution exacte vérifie une forme conservative discrète. Après intégration de l'équation (5.1) sur  $(t^n, t^{n+1}) \times (x_{i-1/2}, x_{i+1/2})$ , on obtient

$$\begin{cases} u_i^{n+1} - u_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x_i} (A_{i+1/2}^n - A_{i-1/2}^n) = 0, \\ A_{i+1/2}^n = \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} [a(x_{i+1/2})u(t^n + s, x_{i+1/2})] ds. \end{cases} \quad (5.2)$$

Cette équation exacte est approchée par un schéma explicite, qui dans les cas les plus simples sera de la forme

$$\begin{cases} v_i^{n+1} - v_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x_i} [A_{i+1/2}^n - A_{i-1/2}^n] = 0, \\ A_{i+1/2}^n = \mathcal{A}(v_i^n, v_{i+1}^n) \quad (\text{schéma à 3 points}). \end{cases}$$

**Définition 5.1** Nous utiliserons les notations suivantes :

- (i) la fonction  $\mathcal{A}(u, v)$  est appelée *flux numérique*,
- (ii) la méthode est dite *consistante* si  $\mathcal{A}(u, v) = A(u)$ ,
- (iii) on appelle *nombre de Courant-Friedrichs-Levy* le réel :

$$CFL = \max_{i \in \mathbb{Z}} a(v_i^n) \times \max_{i \in \mathbb{Z}} \frac{\Delta t}{\Delta x_i}.$$

La question consiste, comme dans le cas linéaire, à trouver des *flux numériques*  $\mathcal{A}(\cdot, \cdot)$  stables, capables de sélectionner la solution entropique et efficaces. C'est l'objet de la section suivante.

## 5.2 Les principaux flux numériques

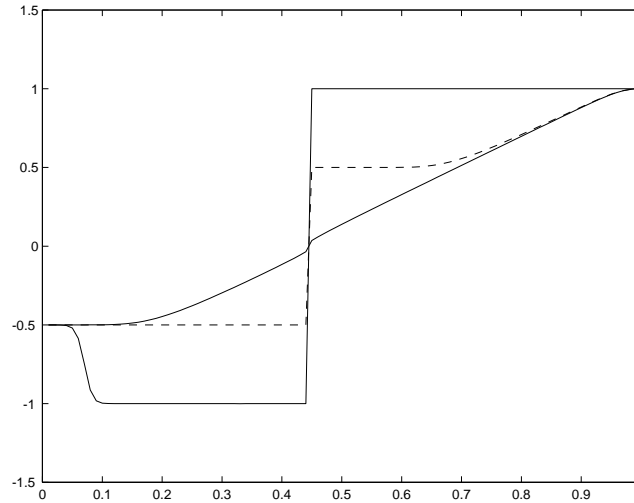


Figure 5.1: TROIS MÉTHODES DIFFÉRENTES DONNENT TROIS RÉSULTATS DIFFÉRENTS POUR UNE DÉTENTE DE L'ÉQUATION DE BURGERS-HOPF (ENGQUIST-OSHER, MURMAN-ROE, DÉCENTRÉ "CONTRE-COURANT").

### 5.2.1 Méthode centrée

Comme on l'a déjà vu dans la Section 4.2, le choix centré donne des résultats inacceptables. On rappelle simplement que ceci correspond aux choix très naturels

$$\mathcal{A}(u, v) = 1/2(A(u) + A(v)), \quad \text{ou} \quad \mathcal{A}(u, v) = A((u + v)/2).$$

Ces flux donnent des oscillations qui paraissent éronnées au premier coup d'oeil (voir le critère TVD dans le Théorème 5.4 ci-dessous).

Il faut donc décentrer les flux dans le 'sens du vent' et ceci n'est pas simple car l'équation (5.2) peut avoir des ondes de vitesse positive ( $a(u) > 0$ ) ou négative ( $a(u) < 0$ ). On arrive alors à des méthodes stables qui donnent des résultats raisonnables mais peuvent ne pas correspondre à la solution entropique (voir la non unicité dans la Section 2.7). Dans la Figure 5.1, on montre trois résultats différents obtenus pour trois méthodes différentes: l'onde de raréfaction est bien calculée avec le schémas de Engquist-Osher (ligne continue, résultat continu), le schéma de Murman-Roe crée un choc non-entropique suivi d'une onde de raréfaction (ligne discontinu) mais il est TVD, le schéma décentré "contre-courant" donne un choc non-entropique suivi d'un choc entropique (ligne continue, résultat discontinu). Dans le cas du schéma de Murman-Roe il suffira d'ajouter une légère diffusion numérique supplémentaire pour corriger le problème.

### 5.2.2 Méthode de Lax-Friedrichs

L'idée de la méthode de Lax-Friedrichs consiste à forcer, déjà au niveau continu, l'apparition de vitesses positives et négatives. Pour cela on écrit :

$$\frac{\partial}{\partial t} u + \frac{\partial}{\partial x} A(u) = \frac{\partial}{\partial t} u + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{A(u) + a_{\infty} u}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{A(u) - a_{\infty} u}{2} \right) = 0,$$

avec

$$a_\infty = \max_{|u| \leq \|u^0\|_{L^\infty(\mathbb{R})}} |a(u)|.$$

La partie  $\frac{A(u)+a_\infty u}{2}$  correspond à des vitesses positives car  $a(u) + a_\infty \geq 0$ . La partie  $\frac{\partial}{\partial x} \frac{A(u)-a_\infty u}{2}$  correspond à des vitesses négatives. On peut donc décentrer de façon très simple :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{A(u) + a_\infty u}{2} \right) &= \frac{A(u_i) + a_\infty u_i}{2} - (\dots)_{i-1} \\ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{A(u) - a_\infty u}{2} \right) &= \frac{A(u_{i+1}) - a_\infty u_{i+1}}{2} - (\dots)_i \end{aligned}$$

On obtient finalement le schéma :

$$v_i^{n+1} - v_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x_i} \frac{A(v_{i+1}^n) - A(v_{i-1}^n)}{2} - \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x_i} a_\infty [v_{i+1}^n - v_{i-1}^n - 2v_i^n] = 0.$$

Ceci peut s'interpréter comme une méthode centrée + diffusion avec un coefficient  $a_\infty \Delta x$ , où encore comme un flux numérique, dans (5.1), donné par

$$\mathcal{A}_{LF}(u, v) = \frac{A(u) + A(v)}{2} - \frac{1}{2} a_\infty (v - u).$$

Cette méthode de Lax-Friedrichs a un gros inconvénient. Dans une zone où  $A(u) = 0$  (disons pour  $u \in [u_-, u_+]$ ), alors on ne trouve pas  $u(t, x)$  indépendant du temps.

On peut donc améliorer en choisissant ce schéma en faisant un choix local de l'estimation de la vitesse maximale :

$$\mathcal{A}_{LFM}(u, v) = \frac{A(u) + A(v)}{2} - \frac{1}{2} (v - u) \max(|a(u)|, |a(v)|)$$

### 5.2.3 Méthode d'Engquist-Osher

On écrit, en choisissant  $A(0) = 0$  ce qui est toujours possible,

$$\begin{aligned} A_+(u) &= \int_0^u a_+(\xi) d\xi, & a_+ &= \max(0, a), \\ A_-(u) &= \int_0^u a_-(\xi) d\xi, & a_- &= \max(0, -a). \end{aligned}$$

Ceci fournit une autre décomposition du flux, sous la forme

$$A(u) = A_+(u) - A_-(u).$$

À nouveau, l'idée consiste à décentrer séparément  $A_+$  et  $A_-$

$$\mathcal{A}_{EO}(u, v) = A_+(u) - A_-(v).$$

En effet  $A'_+ \geq 0$ , et  $A'_- \leq 0$ .

**Remarque :** Une interprétation de la méthode de Engquist-Osher est que l'on résoud le problème de Riemann comme si on était en situation de détente (onde de raréfaction) constamment. Pour cela il faut accepter des détentes impossibles (voir le Théorème 2.5) que l'on peut interpréter naturellement dans un langage cinétique (voir [21]).

### 5.2.4 Méthode de Godunov

Ce schéma peut être présenté de deux points de vue. On commence par le point de vue "monotonie"

$$\mathcal{A}_G(u, v) = \begin{cases} \min_{u \leq \xi \leq v} A(\xi) & \text{pour } u \leq v, \\ \max_{v \leq \xi \leq u} A(\xi) & \text{pour } v \leq u. \end{cases}$$

Ce qui revient à une autre décomposition  $A = A_+^G - A_-^G$ .

Du point de vue "problème de Riemann", on peut aussi écrire (voir [11] pour ceci, ce n'est pas du tout évident)

$$\mathcal{A}_G(u, v) = \underline{u}(\xi = 0; u, v),$$

où  $\underline{u}(\xi = 0; u, v)$  désigne la solution (autosimilaire,  $\xi = x/t$ ) du problème de Riemann

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \underline{u} + \frac{\partial}{\partial x} A(\underline{u}) = 0, \\ \underline{u}^0(x < 0) = u, \\ \underline{u}^0(x > 0) = v. \end{cases} \quad (5.3)$$

**Exercice :** Rechercher la démonstration de l'égalité des deux formules pour  $\mathcal{A}_G$ .

La résolution du problème de Riemann exact peut-être compliquée (et coûteuse en temps calcul). On peut donc préférer une résolution approchée.

**Définition 5.2** On appelle problème de Riemann approché une solution se mettant sous la forme

$$\mathcal{A}(u, v) = A(u_{RA}(u, v)),$$

pour un certain choix de  $u_{RA}(u, v)$  interprété comme valeur en  $\xi = 0$  d'un problème du type (5.3).

**Exercice :** Montrer que la méthode de Engquist-Osher n'est pas un problème Riemann approché pour certains flux  $A$ .

### 5.2.5 Méthode de Murman-Roe

Une construction typique d'un problème Riemann approché est la suivante. On choisit

$$\mathcal{A}_{MR} = A(\underline{u}_{MR}(\xi = 0; u, v)),$$

en résolvant une équation linéaire à la place de la L.C.S :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \underline{u} + a_{MR}(u, v) \frac{\partial}{\partial x} \underline{u} = 0, \\ \underline{u}^0(x < 0) = u, \\ \underline{u}^0(x > 0) = v. \end{cases}$$

avec

$$a_{MR}(u, v) = \begin{cases} \frac{A(v) - A(u)}{v - u} & \text{pour } v \neq u, \\ a(u) & \text{pour } v = u. \end{cases}$$

Bien entendu on trouve, en utilisant la méthode des caractéristiques,

$$\underline{u}_{MR}(\xi = 0) = \begin{cases} u_g & \text{pour } a_{MR} > 0, \\ u_d & \text{pour } a_{MR} < 0. \end{cases} \quad (5.4)$$

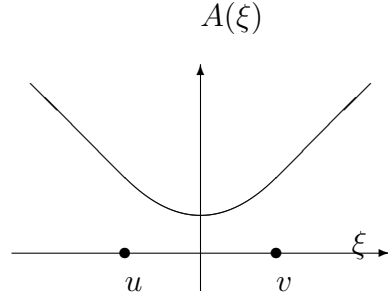


Figure 5.2: LES SCHÉMAS DÉCENTRÉS POUR L'ÉQUATION DE BURGERS-HOPF.

**Théorème 5.1** Grâce au choix spécifique de  $a_{MR}$ , l'application  $(u, v) \rightarrow \mathcal{A}_{MR}(u, v)$  est lipschitzienne. Mais  $(u, v) \rightarrow \underline{u}_{MR}(\xi = 0; u, v)$  est discontinue.

**Démonstration :** En utilisant la formule (5.4), une discontinuité de  $(u, v) \rightarrow \underline{u}_{MR}(\xi = 0; u, v)$  apparaît seulement lorsque  $a_{MR}(u, v)$  s'annule. Cela signifie que

$$A(v) = A(u) \quad (\text{ou bien } a(u) = 0 \text{ et } u = v).$$

Dans le second cas  $\underline{u}_{MR}(\xi = 0; u, v)$  est lipschitzien, mais dans le premier cas cette valeur est bien discontinue. Mais le flux  $A(\underline{u}_{MR}(\xi = 0; u, v)) = A(u) = A(v)$  est lui lipschitzien.  $\square$

**Remarque :** Une interprétation de la méthode de Murman-Roe est que l'on résoud le problème de Riemann comme si on était en situation de choc constamment puisque l'on a choisit dans (5.4) la vitesse de propagation d'un choc (en oubliant le critère d'entropie).

## 5.3 Consistance, structure des schémas

**Théorème 5.2** Tous les schémas de la Section 5.2 sont consistants.

**Démonstration :** Il faut juste vérifier que  $\mathcal{A}(u, u) = A(u)$ , ce qui se fait facilement.  $\square$

**Définition 5.3** Soit un flux discret  $\mathcal{A}(\cdot, \cdot)$  et posons  $A(u) = \mathcal{A}(u, u)$ . Alors

(i) Ce flux est dit montone si

$$\frac{\partial}{\partial u} \mathcal{A}(u, v) \geq 0, \quad \frac{\partial}{\partial v} \mathcal{A}(u, v) \leq 0.$$

(ii) Ce flux est appelé E-flux (flux discret entropique) si

$$\begin{cases} \mathcal{A}(u, v) \leq A(\xi) & \text{pour } u \leq \xi \leq v, \\ \mathcal{A}(u, v) \geq A(\xi) & \text{pour } v \leq \xi \leq u. \end{cases}$$

(iii) Ce flux est dit ordonné si

$$\begin{cases} \mathcal{A}(u, v) \leq \min(A(u), A(v)) & \text{pour } u \leq v, \\ \mathcal{A}(u, v) \geq \max(A(u), A(v)) & \text{pour } v \leq u. \end{cases}$$

**Proposition 5.1** *Les schémas de Lax-Friedrichs, Engquist-Osher et Godunov sont monotones. Le schéma de Murman-Roe n'est pas ordonné.*

**Exercice :** Trouver des schémas ordonnés non E-schémas; trouver des E-schémas non monotones.

**Proposition 5.2** *Un flux monotone est un E-flux. Un E-flux est un flux ordonné :*

$$\text{Monotone} \implies \text{E-flux} \implies \text{Ordonné.}$$

**Démonstration :** (i) Commençons par montrer que Monotone  $\implies$  E-flux. Considérons par exemple le cas  $u \leq \xi \leq v$ . On écrit :

$$\mathcal{A}(u, v) \leq \mathcal{A}(\xi, v) \quad \text{car } u \leq \xi,$$

$$\mathcal{A}(\xi, v) \leq \mathcal{A}(\xi, \xi) = A(\xi) \quad \text{car } \xi \leq v,$$

L'autre cas,  $v \leq \xi \leq u$ , est similaire.

(ii) Montrons maintenant que E-flux  $\implies$  Ordonné. Pour cela il suffit de choisir  $\xi = u$  ou  $\xi = v$ , suivant le cas, dans la définition du E-flux.  $\square$

## 5.4 Propriétés de contraction, d'entropie et de Variation Totale Décroissante

L'intérêt des propriétés énoncées ci-dessus pour les flux numériques se trouvent dans les conséquences sur les solutions discrètes qu'elles induisent. Celles-ci sont simples dans le cas semi-discret où le temps est continu (souvent appelé méthodes des lignes) et nous ne considérerons que ce cas ici.

**Définition 5.4** *Une méthode de volume fini semi-discrete est définie par*

$$\begin{cases} \Delta x_i \frac{d}{dt} v_i(t) + A_{i+1/2}(t) - A_{i-1/2}(t) = 0, \\ A_{i+1/2}(t) = \mathcal{A}(v_i(t), v_{i+1}(t)). \end{cases} \quad (5.5)$$

Ici  $\mathcal{A}(\cdot, \cdot)$  désigne à nouveau un flux numérique, comme dans la section précédente.

Remarquons que l'existence d'une solution  $v_i(t)$  à (5.5) n'est pas évidente. Il s'agit toutefois d'un système différentiel que l'on peut résoudre en utilisant une méthode de type Cauchy-Lipschitz, ou par troncature. Nous admettrons donc l'existence, pour une donnée initiale  $v^0 \in l^1(\mathbb{Z})$ , d'une unique solution vérifiant :

$$v_i \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+), \quad \forall i \in \mathbb{Z}, \quad v \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+; l^1(\mathbb{Z})).$$

**Théorème 5.3** *Un schéma semi-discret est monotone si et seulement si il est contractant c'est-à-dire que pour deux données initiales  $(v_i^0)_{i \in \mathbb{Z}}$  et  $(w_i^0)_{i \in \mathbb{Z}}$ , on a*

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} \Delta x_i |v_i(t) - w_i(t)| \leq \sum_{i \in \mathbb{Z}} \Delta x_i |v_i^0 - w_i^0| \quad \forall t \geq 0. \quad (5.6)$$

**Démonstration :** On soustrait les deux équations (5.5) pour  $v_i(t)$  et  $w_i(t)$  et on multiplie par la fonction indicatrice  $\mathcal{I}_{v_i \geq w_i}$ . On obtient :

$$\Delta x_i \frac{d}{dt} (v_i(t) - w_i(t))_+ + [\mathcal{A}(v_i, v_{i+1}) - \mathcal{A}(w_i, w_{i+1})] \mathcal{I}_{v_i \geq w_i} - [\mathcal{A}(v_{i-1}, v_i) - \mathcal{A}(w_{i-1}, w_i)] \mathcal{I}_{v_i \geq w_i} = 0,$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{d}{dt} \sum_{i \in \mathbb{Z}} \Delta x_i (v_i(t) - w_i(t))_+ + \sum_{i \in \mathbb{Z}} [\mathcal{A}(v_i, v_{i+1}) - \mathcal{A}(w_i, w_{i+1})] (\mathcal{I}_{v_i \geq w_i} - \mathcal{I}_{v_{i+1} \geq w_{i+1}}) = 0.$$

Et on remarque que la monotonie est équivalente à écrire

$$[\mathcal{A}(v_i, v_{i+1}) - \mathcal{A}(w_i, w_{i+1})] (\mathcal{I}_{v_i \geq w_i} - \mathcal{I}_{v_{i+1} \geq w_{i+1}}) \geq 0 \quad \forall v_i, v_{i+1}, w_i, w_{i+1}.$$

Pour cela, noter que ce crochet n'est pas nul que lorsque  $(v_i \geq w_i$  et  $v_{i+1} < w_{i+1})$  ou  $(v_i < w_i$  et  $v_{i+1} \geq w_{i+1})$ . Dans le premier cas par exemple, la monotonie du schémas est équivalente à

$$\mathcal{A}(v_i, v_{i+1}) \geq \mathcal{A}(w_i, v_{i+1}) \geq \mathcal{A}(w_i, w_{i+1}).$$

□

**Théorème 5.4** *Un schéma est ordonné si et seulement si il est à Variation Totale Décroissante (TVD en abrégé) c'est-à-dire que*

$$|v(t)|_{TV} := \sum_{i \in \mathbb{Z}} |v_i(t) - v_{i-1}(t)| \leq \sum_{i \in \mathbb{Z}} |v_i^0 - v_{i-1}^0|, \quad \forall t \geq 0.$$

**Démonstration :** On a

$$\frac{d}{dt} (v_i(t) - v_{i-1}(t)) + \frac{1}{\Delta x_i} [\mathcal{A}(v_i, v_{i+1}) - \mathcal{A}(v_{i-1}, v_i)] - \frac{1}{\Delta x_{i-1}} [\mathcal{A}(v_{i-1}, v_i) - \mathcal{A}(v_{i-2}, v_{i-1})] = 0.$$

Donc, avec une manipulation comme ci-dessus, et en réarrangeant les sommes,

$$\frac{d}{dt} \sum_{i \in \mathbb{Z}} (v_i(t) - v_{i-1}(t))_+ + \sum_{i \in \mathbb{Z}} \frac{1}{\Delta x_i} [[\mathcal{A}(v_i, v_{i+1}) - \mathcal{A}(v_{i-1}, v_i)] \mathcal{I}_{v_i \geq v_{i-1}} - [\mathcal{A}(v_i, v_{i+1}) - \mathcal{A}(v_{i-1}, v_i)] \mathcal{I}_{v_{i+1} \geq v_i}] = 0.$$

Et il suffit donc de vérifier que "ordonné" est équivalent à

$$[\mathcal{A}(v_i, v_{i+1}) - \mathcal{A}(v_{i-1}, v_i)] (\mathcal{I}_{v_i \geq v_{i-1}} - \mathcal{I}_{v_{i+1} \geq v_i}) \geq 0.$$

Encore une fois deux cas sont à considérer seulement. On considère par exemple le cas  $v_i \geq v_{i-1}$  et  $v_{i+1} < v_i$  et on remarque que l'on a bien, que la propriété d'être ordonné est équivalente à

$$\mathcal{A}(v_i, v_{i+1}) \geq \mathcal{A}(v_i) \geq \mathcal{A}(v_{i-1}, v_i),$$

ce qui donne le résultat recherché. □

**Théorème 5.5** *Un schéma est Entropique si et seulement si il satisfait toutes les inégalités discrètes d'entropie c'est-à-dire que pour toute fonction convexe,  $S(\cdot)$ , il existe un flux d'entropie numérique  $\eta^S(\cdot, \cdot)$  tel que*

$$\Delta x_i \frac{d}{dt} S(u_i(t)) + \eta^S(u_i, u_{i+1}) - \eta^S(u_{i-1}, u_i) \leq 0.$$

**Remarque :** Un tel flux  $\eta^S$  n'est pas unique. La formulation cinétique permet une sélection de l'application  $S \rightarrow \eta^S$  qui préserve la linearité mais cela ne suffit pas encore.

**Démonstration du Théorème 5.5 :** Puisque l'on a pour toute fonction  $S(\cdot)$  :

$$\Delta x_i \frac{d}{dt} S(u_i) + S'(u_i)[A_{i+1/2}(t) - A_{i-1/2}(t)] = 0,$$

il faut et il suffit donc de montrer qu'il existe  $\eta^S$  tel que (on note  $\eta^S(u) = \eta^S(u, u)$ )

$$\eta^S(u_i, u_{i+1}) - \eta^S(u_{i-1}, u_i) \leq S'(u_i)[\mathcal{A}(u_i, u_{i+1}) - \mathcal{A}(u_{i-1}, u_i)], \quad \forall u_i, u_{i\pm 1},$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} \eta^S(u_i, u_{i+1}) - \eta^S(u_i) & \leq S'(u_i)[\mathcal{A}(u_i, u_{i+1}) - A(u_i)], \\ \eta^S(u_i) - \eta^S(u_{i-1}, u_i) & \leq S'(u_i)[A(u_i) - \mathcal{A}(u_{i-1}, u_i)], \end{cases} \quad \forall u_i, u_{i\pm 1},$$

$$\Updownarrow$$

$$\eta^S(v) - S'(v)[A(v) - \mathcal{A}(u, v)] \leq \eta^S(u, v) \leq S'(u)[\mathcal{A}(u, v) - A(u)] + \eta^S(u) \quad \forall u, v,$$

$$\Updownarrow$$

$$\eta^S(v) - S'(v)[A(v) - \mathcal{A}(u, v)] \leq S'(u)[\mathcal{A}(u, v) - A(u)] + \eta^S(u),$$

(et on voit qu'alors  $\eta^S(u, v)$  n'est pas unique en général)

$$\Updownarrow$$

$$\eta^S(v) - \eta^S(u) + S'(u)A(u) - S'(v)A(v) \leq -\mathcal{A}(u, v)[S'(v) - S'(u)],$$

$$\Updownarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial u} \eta^S(u) = S'(u)a(u), \\ \int_u^v S'(\xi)a(\xi)d\xi + S'(u)A(u) - S'(v)A(v) = -\int_u^v S''(\eta)A(\eta)d\eta \leq -\mathcal{A}(u, v)[S'(v) - S'(u)]. \end{array} \right.$$

Il reste à choisir, pour  $\xi \in \mathbb{R}$  donné,  $S''(\eta) = \delta(\eta - \xi)$  (ce qui génère bien toutes les fonctions positives) pour obtenir que, d'une part  $\eta^S(u)$  est lui unique à une constante additive près, et d'autre part que l'inégalité précédente est équivalente à

$$-\text{sgn}(v - u)A(\xi) \leq -\mathcal{A}(u, v) \text{sgn}(v - u) \quad \forall \xi \in [u, v].$$

Ceci est bien la définition d'un E-schéma.  $\square$

On peut essayer de choisir un flux d'entropie particulièrement simple (pas la moyenne des deux termes). On suppose le flux monotone alors on a

$$\begin{aligned} \eta^S(v) - S'(v)[A(v) - \mathcal{A}(u, v)] &= \eta^S(v) - S'(v) \int_u^v \mathcal{A}_1(\xi, v)d\xi \leq \eta^S(v) - \int_u^v S'(\xi)\mathcal{A}_1(\xi, v)d\xi \\ &= \int_0^v S'(\xi)[\mathcal{A}_1(\xi, \xi) + \mathcal{A}_2(\xi, \xi)]d\xi - \int_u^v S'(\xi)\mathcal{A}_1(\xi, v)d\xi \\ &= \int_0^u S'(\xi)[\mathcal{A}_1(\xi, \xi)d\xi + \int_0^v \mathcal{A}_2(\xi, \xi)]d\xi - \int_u^v S'(\xi)[\mathcal{A}_1(\xi, v) - \mathcal{A}_1(\xi, \xi)]d\xi \end{aligned}$$

et aussi

$$S'(u)[\mathcal{A}(u, v) - A(u)] + \eta^S(u)???$$

Le cas discret en temps est plus difficile à analyser (mais les mêmes résultats peuvent s'établir). Nous renvoyons à [11, 9] pour cet aspect.



## 5.5 Exercices et tests numériques

**Exercice 1.** On considère la loi de conservation scalaire

$$\frac{\partial}{\partial t} u + \frac{\partial}{\partial x} \frac{u^4}{4} = 0,$$

1. Donner la forme explicite du flux numérique du schéma de Engquist-Osher.
2. Le flux numérique  $\mathcal{A}(u, v) = \frac{1}{4}(u_+ - v_-)^4$  est-il consistant? Dans quels sens le schéma semi-discret est-il stable? ( $u_+ = \max(u, 0)$ ,  $u_- = \max(-u, 0)$ ).
3. Soit le schéma

$$\mathcal{A}(u, v) = \begin{cases} \frac{u^4}{4} & \text{si } u + v \geq 0, \\ \frac{v^4}{4} & \text{si } u + v \leq 0, \end{cases}$$

Est-il consistant? Est-ce un schéma classique? Dans quels sens le schéma semi-discret est-il stable?

**Exercice 2.** On considère une loi de conservation scalaire générale en supposant qu'il existe un point au moins tel que  $a(u_0) = 0$ .

1. Montrer qu'il existe des chocs stationnaires.
2. Montrer que le schéma de Roe préserve les chocs stationnaires, i.e., si  $u_i = u_g$  pour  $i \leq 0$  et  $u_i = u_d$  pour  $i > 0$ , alors cet état est stationnaire.
3. Le schéma de Engquist-Osher a-t'il cette propriété?
4. Montrer que la variante de E.O.

$$\mathcal{A}(u, v) = \max(A_+(u), A_-(v)),$$

préserve les chocs stationnaires.

5. Montrer que cette variante est monotone est consistante.

**Tests numériques.** Pour l'équation d'advection ou l'équation de Burgers-Hopf, mettre en évidence par des simulations numériques les phénomènes suivants :

1. Violent la condition de CFL à des effets dramatiques,
2. Des CFL trop petits détériorent la précision,
3. La perte de précision sur les "fronts" ou "discontinuités de contact" est très importante pour des temps longs. Les chocs eux sont bien calculés.



# Chapitre 6

## Exemples de système $2 \times 2$ : élastodynamique et p-système

On considère le système

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0 & t \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial \sigma(u)}{\partial x} = 0, \end{cases} \quad (6.1)$$

et on suppose que la fonction  $\sigma \in C^1(\mathbb{R})$  vérifie

$$\sigma'(\cdot) > 0, \quad \sigma(0) = 0, \quad (6.2)$$

et soit la forme concave-convexe

$$u\sigma''(u) \geq 0 \quad (\text{élastodynamique}), \quad (6.3)$$

soit la forme convexe

$$\sigma''(u) \geq 0 \quad (\text{p-système}). \quad (6.4)$$

En élastodynamique, cette fonction  $\sigma$  représente la contrainte (force de rappel) d'un matériau soumis au déplacement  $u$ . En dynamique des gaz lagrangienne (p-système),  $\sigma$  représente la pression d'un fluide de vitesse  $v$  et de taux volumique  $u > 0$ .

### 6.1 Structure hyperbolique

**Lemme 6.1** *Sous l'hypothèse (6.2), le système (6.1) est strictement hyperbolique et ses valeurs propres sont*

$$\lambda_{\pm}(u) = \pm\lambda(u), \quad \lambda(u) = \sqrt{\sigma'(u)}$$

**Démonstration** On écrit

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -\sigma'(u) & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 0.$$

La matrice du système est donc

$$A(u, v) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -\sigma'(u) & 0 \end{pmatrix}$$

et les valeurs propres de  $A(u, v)$  sont  $\lambda^2 = \sigma'(u)$ .  $\square$

**Lemme 6.2** *Le système admet les deux "invariants de Riemann forts"*

$$w_{\pm} = v \pm \Lambda(u), \quad \Lambda(u) = \int_0^u \sqrt{\sigma'(\cdot)}$$

*c'est-à-dire*

$$\frac{\partial}{\partial t} w_{\pm} - \lambda_{\pm}(u) \frac{\partial}{\partial x} w_{\pm} = 0. \quad (6.5)$$

**Démonstration** Il suffit de calculer, par exemple

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} w_+ &= \frac{\partial}{\partial t} v + \lambda_+(u) \frac{\partial}{\partial t} u \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \sigma(u) + \lambda_+(u) \frac{\partial}{\partial x} v \\ &= \lambda_+(u) \left[ \sqrt{\sigma(u)} \frac{\partial}{\partial x} u + \frac{\partial}{\partial x} v \right] \\ &= \lambda_+(u) \frac{\partial}{\partial x} (\Lambda(u) + v) \end{aligned}$$

□

**Exercice** Montrer que  $R_{\pm}(u, v) = \nabla_{(u,v)} w_{\pm}$  est vecteur propre de la matrice  $A(u, v) - \lambda_{\pm} Id$ .

**Remarque** Le champ  $w_+$  est dit vraiment non-linéaire (genuinely non linear en anglais) si

$$\frac{\partial \lambda_+}{\partial w_+} \neq 0.$$

Pour le système de l'élastodynamique, comme on a

$$\frac{\partial \lambda_+}{\partial w_+} = \frac{\partial \lambda_+}{\partial u} \left( \frac{\partial w_+}{\partial u} \right)^{-1} = \frac{\sigma''(u)}{2},$$

on remarque que ceci signifie  $\sigma''(\cdot) \neq 0$ , ce qui contredit l'hypothèse (6.3).

## 6.2 Bornes a priori ( $L^\infty$ )

On va montrer des bornes uniformes  $L^\infty$  pour le système (6.1) avec diffusion

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u_\varepsilon - \frac{\partial}{\partial x} v_\varepsilon &= \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_\varepsilon, \\ \frac{\partial}{\partial t} v_\varepsilon - \frac{\partial}{\partial x} \sigma(u_\varepsilon) &= \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial x^2} v_\varepsilon. \end{cases} \quad (6.6)$$

En particulier on va voir que, contrairement à ce que l'on pourrait croire en considérant les équations de transport (6.5), les invariants de Riemann  $w_{\pm}$  ne vérifient pas un principe du maximum et du minimum séparément, mais une estimation équivalente mais couplée .

**Remarque** La viscosité introduite dans le système (6.6) n'est pas physique. En mécanique (voir [12] par exemple), on rencontre par contre les fluides *viscoélastiques* décrits par les équations

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u_\varepsilon - \frac{\partial}{\partial x} v_\varepsilon & = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} v_\varepsilon - \frac{\partial}{\partial x} \sigma(u_\varepsilon) & = \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial x^2} v_\varepsilon. \end{cases}$$

Notons tout d'abord que l'on a aussi (avec les notations du lemme 6.2)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} w_+ - \lambda_+(u_\varepsilon) \frac{\partial}{\partial x} w_+ &= \varepsilon \lambda(u_\varepsilon) \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_\varepsilon + \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial x^2} v_\varepsilon \\ &= \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial x^2} w_+ - \varepsilon \lambda'(u_\varepsilon) \left( \frac{\partial}{\partial x} u_\varepsilon \right)^2 \\ \frac{\partial}{\partial t} w_- - \lambda_-(u_\varepsilon) \frac{\partial}{\partial x} w_- &= \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial x^2} w_- + \varepsilon \lambda'(u_\varepsilon) \left( \frac{\partial}{\partial x} u_\varepsilon \right)^2. \end{aligned}$$

Le principe du maximum formel pour les équations (6.5) sur les invariants de Riemann n'est donc pas vrai car au niveau visqueux, il faut prendre en compte les termes  $\pm \varepsilon \lambda'(\partial_x u)^2$ . Ceci mène au

**Théorème 6.1** (*Élastodynamique*) *Dans le cas des hypothèses (6.2)–(6.3), les solutions du système avec viscosité (6.6) vérifient*

$$\begin{aligned} w_{\varepsilon\pm}(t, x) &\leq \max_{y \in \mathbb{R}} (\max(w_{\varepsilon+}^0(y), w_{\varepsilon-}^0(y))), \\ \min_{y \in \mathbb{R}} (\min(w_{\varepsilon-}^0(y), w_{\varepsilon+}^0(y))) &\leq w_{\varepsilon\pm}(t, x). \end{aligned}$$

**Démonstration** (1) Considérons le point  $x_0$  où  $\max_x (\max(w_{\varepsilon+}(t, x), w_{\varepsilon-}(t, x)))$  est atteint (en admettant que, comme d'habitude pour ces problèmes, que ce maximum est atteint). Le maximum est atteint pour  $w_{\varepsilon+}(t, x)$  ou  $w_{\varepsilon-}(t, x)$ . Commençons par le cas où il est atteint par l'invariant " + " :

$$w_{\varepsilon-}(t, x) \leq w_{\varepsilon+}(t, x_0), \quad \forall x,$$

alors en ce point  $(t, x_0)$  on a

$$\lambda'(u_\varepsilon) = \frac{1}{2} \frac{\sigma''(u_\varepsilon)}{\sigma'(u_\varepsilon)^{3/4}} \geq 0 \quad \text{car } u_\varepsilon(t, x_0) \geq 0$$

en effet

$$w_{\varepsilon-}(t, x_0) \leq w_{\varepsilon+}(t, x_0) \implies -\Lambda(u_\varepsilon(t, x_0)) \leq \Lambda(u_\varepsilon(t, x_0)) \implies u_\varepsilon(t, x_0) \geq 0.$$

On a donc, utilisant l'équation sur  $w_{\varepsilon+}$ , que

$$\frac{\partial}{\partial t} w_{\varepsilon+}(t, x_0) \leq 0$$

donc

$$\frac{d}{dt} \max_x (\max(w_{\varepsilon+}(t, x), w_{\varepsilon-}(t, x))) \leq 0. \quad (6.7)$$

Si le maximum est atteint par  $w_{\varepsilon-}(t, x_0)$  alors on trouve  $u_\varepsilon(t, x_0) \leq 0$  et l'équation sur  $w_{\varepsilon-}(t, x)$  permet encore de dériver (6.7).

La borne inférieure se démontre de façon similaire.  $\square$

**Démonstration** (2) Plus rigoureusement, on pose  $K = \max_x (\max(w_{\varepsilon+}^0(x), w_{\varepsilon-}^0(x)))$ . Multipliant les équations sur  $w_+$  et  $w_-$  par  $(w_+ - K)_+$  et  $(w_- - K)_-$  respectivement, et en intégrant par partie, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int [(w_{\varepsilon+} - K)_+^2 + (w_{\varepsilon-} - K)_+^2] &\leq \int [(w_{\varepsilon+} - K)_+^2 + (w_{\varepsilon-} - K)_+^2] \|\nabla \lambda_\varepsilon\|_{L^\infty} \\ &+ \varepsilon \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \lambda'(u_\varepsilon) [(w_{\varepsilon+} - K)_+ - (w_{\varepsilon-} - K)_+] \end{aligned}$$

et on remarque, comme ci-dessus, que

$$\lambda'(u_\varepsilon) [(w_{\varepsilon+} - K)_+ - (w_{\varepsilon-} - K)_+] \geq 0.$$

On en déduit que

$$\int [(w_{\varepsilon+}(t) - K)_+^2 - (w_{\varepsilon-}(t) - K)_+^2] \leq \int [(w_{\varepsilon+}^0 - K)_+^2 - (w_{\varepsilon-}^0 - K)_+^2] = 0$$

car cette quantité est nulle à  $t = 0$ . Ceci prouve que  $w_{\varepsilon+}(t) \leq K$  pour tout  $t > 0$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .  $\square$

La même méthode s'applique au p-système (la démonstration, plus simple que pour l'élastodynamique, est laissée en exercice) et on obtient le

**Théorème 6.2** (*P-système*) Dans le cas des hypothèses (6.2)–(6.4), les solutions du système avec viscosité (6.6) vérifient

$$w_{\varepsilon+}(t, x) \leq \max_{y \in \mathbb{R}} w_{\varepsilon-}^0(y),$$

$$\min_{y \in \mathbb{R}} w_{\varepsilon-}^0(y) \leq w_{\varepsilon-}(t, x).$$

Par conséquent, on a aussi :

$$\Lambda(u_\varepsilon) \leq \frac{1}{2} [\max_{y \in \mathbb{R}} w_{\varepsilon-}^0(y) - \min_{y \in \mathbb{R}} w_{\varepsilon-}^0(y)].$$

### 6.3 Entropies

On cherche maintenant des paires entropie-flux d'entropie  $(S(\cdot), \eta(\cdot))$  c'est-à-dire les fonctions non-linéaires permettant de retrouver des lois de conservation supplémentaires

$$\frac{\partial}{\partial t} S(u, v) + \frac{\partial}{\partial x} \eta(u, v) = 0, \quad (6.8)$$

pour tout  $(u, v)$  solution régulière du système de l'élastodynamique (6.1).

**Lemme 6.3** Les entropies du système (6.1) sont les solutions  $S(u, v)$  de l'équation de type onde non-homogène :

$$\frac{\partial^2 S}{\partial u^2} - \sigma'(u) \frac{\partial^2 S}{\partial v^2} = 0.$$

**Démonstration** Pour les solution régulières, on calcule :

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} S &= \frac{\partial S}{\partial u} \partial_t u + \frac{\partial S}{\partial v} \partial_t v \\ &= \frac{\partial S}{\partial u} \partial_t v + \frac{\partial S}{\partial v} \sigma'(u) \frac{\partial u}{\partial x} \\ &= \frac{\partial \eta}{\partial v} \partial_x v + \frac{\partial \eta}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x},\end{aligned}$$

c'est-à-dire :

$$\frac{\partial \eta}{\partial v} = \frac{\partial S}{\partial u}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial u} = \frac{\partial S}{\partial v} \sigma'(u),$$

ou encore, utilisant le lemme de Schwarz,

$$\frac{\partial^2 S}{\partial u^2} = \frac{\partial^2 \eta}{\partial v \partial u} = \frac{\partial^2 \eta}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 S}{\partial v^2} \sigma'(u).$$

□

L'entropie "physique" de ce système est l'énergie

$$E(u, v) = \frac{1}{2} v^2 + \Sigma(u), \quad \Sigma' = \sigma,$$

qui vérifie bien l'équation ci-dessus. Notons qu'avec la normalisation  $\Sigma(0) = 0$ , on a  $\Sigma(u) \geq 0$  pour le système de l'élasticité compte de l'hypothèse (6.3).

Pour le système avec viscosité on obtient

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} E_\varepsilon + \frac{\partial}{\partial x} (\sigma(u_\varepsilon) v_\varepsilon) &= \varepsilon \left[ \frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x^2} \sigma(u_\varepsilon) + v_\varepsilon \frac{\partial^2 v_\varepsilon}{\partial x^2} \right] \\ &= \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{v_\varepsilon^2}{2} + \Sigma(u_\varepsilon) \right) - \varepsilon \left[ \sigma'(u_\varepsilon) \left( \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x} \right)^2 \right].\end{aligned}$$

On en déduit que, pour tout  $t \geq 0$ ,

$$\int_{\mathbb{R}} E_\varepsilon(t, x) dx + \varepsilon \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \left[ \sigma'(u_\varepsilon) \left( \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x} \right)^2 \right] = \int E_\varepsilon^0(x) dx.$$

Quand on considère le système de l'élasticité, comme  $E_\varepsilon(t, x) \geq 0$  et  $\sigma' \geq 0$ , cette inégalité fournit une borne " $L^2$ " uniforme sur la solution et une borne de type :

$$\varepsilon \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} (|\nabla v_\varepsilon|^2 + |\nabla u_\varepsilon|^2) < \infty.$$





# Bibliographie

- [1] Ambrosio, Luigi; Fusco, Nicola; Pallara, Diego Functions of bounded variation and free discontinuity problems. Oxford Mathematical Monographs. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 2000.
- [2] A. Aw et M. Rascle, Resurrection of "second order" models of car traffic? *SIAM J. Appl. Math.*, 2000, 60, 3, 916-938.
- [3] Francois Baccelli, David R. McDonald and Julien Reynier, A mean field model for multiple TCP connections through a buffer implementing RED, rapport de Recherche INRIA No 4449 et *Performance Evaluation* Vol. 11, (2002) pp. 77-97. Elsevier Science.
- [4] F. Bouchut *Nonlinear stability of finite volume methods for hyperbolic conservation laws and well-balanced schemes for sources*. Series 'Frontiers in Mathematics', Birkhauser, 2004.
- [5] F. Bouchut et B. Perthame, Kruřkov 's estimates for scalar consevation laws revisited, *Trans. Amer. Math. Soc.* **350**(7), (1998) 2847–2870.
- [6] H. Brézis, *Analyse fonctionnelle, théorie et applications*. Masson, Paris (1983).
- [7] C. Dafermos, *Hyperbolic conservation laws in continuum physics*. Springer, Berlin (2000).
- [8] Evans, L. C. *Partial Differential Equations*, Graduate Studies in Mathematics Vol. 19, American Mathematical Society (1998).
- [9] R. Eymard , Th. Gallouet, R. Herbin, Finite volume method. Handbook of numerical analysis, North-Holland, Amsterdam (2002).
- [10] E. Godlewski , P. A.Raviart, Hyperbolic systems of conservation laws. Coll. SMAI Vol. 3/4, Ellipses, Paris (1991).
- [11] E. Godlewski , P. A.Raviart, Numerical approximation of hyperbolic systems of conservation laws. Springer (1996).
- [12] M. E. Gurtin, *An introduction to continuum mechanics*. Mathematics in Science and Engineering, 158. Academic Press, Inc., New York-London, 1981.
- [13] D. Hoff. The sharp form of Oleinik's entropy condition in several space variables. *Trans. AMS* **276** (1983), 707–714.
- [14] S.N. Kruřkov , First order quasilinear equations in several independent variables, *Math. USSR Sb.* **10** (1970) 217–243.
- [15] N.N. Kuznetsov, Accuracy of some approximate methods for computing the weak solutions of a first order quasilinear equation, *USSR Comp. Math. and Math. Phys.* **16** (1976) 105–119.

- [16] P. Lascaux, numerical methods for time dependent equations- applications to fluid flow problems. Tata Institute of Fundamental Research, Bombay (1976).
- [17] R.J. LeVeque, *Numerical Methods for Conservation Laws, Lectures in Mathematics*, ETH Zurich, Birkhauser (1992).
- [18] C. Makridakis et B. Perthame, Optimal rate of convergence for anisotropic vanishing viscosity limit of a scalar balance law. *SIAM J. Math. Anal.* (2003).
- [19] B. Perthame et M. Westdickenberg, Total Oscillation property of scalar conservation laws. En préparation.
- [20] R.J. LeVeque, *Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems*, Cambridge Textbooks in Applied Mathematics (2002).
- [21] B. Perthame, Kinetic formulations of conservation laws. Oxford University Press (2002).
- [22] D. Serre, Systèmes de lois de conservation. Diderot, Paris (1996).