Exercice 1

A partir de l'équation de Van der Pol avec courant, retrouver l'équation de FHN avec courant.

Exercice 2

On considère le système de FHN avec une équation plus générale sur w. Pour $I^* \in \mathbb{R}$ donné, on commence par

$$\frac{dw(t)}{dt} = v + aw - I^*.$$

1. Donner une condition sur a pour avoir un seul point fixe (faire un dessin et donner une condition analytique).
2. Donner une condition sur a pour garder la propriété de stabilité du système avec $a = 0$.
3. Etudier le cas d'une équation

$$\frac{dw(t)}{dt} = G(v(t)) - w(t) - I^*.$$

Exercice 3

Soit $A > 0$. On considère le système

$$\begin{cases} \varepsilon \dfrac{dx_\varepsilon(t)}{dt} = A - y_\varepsilon(t) - x_\varepsilon(t), \qquad x_\varepsilon(0) = 0, \\ \dfrac{dy_\varepsilon(t)}{dt} = A - y_\varepsilon(t), \qquad y_\varepsilon(0) = 0. \end{cases}$$

1. Calculer la solution explicite.
2. Calculer la limite $\varepsilon \to 0$.
3. Mettre ce résultat en relation avec le cours.

Exercice 4

On propose une façon de réduire la dynamique de Morris-Lecar à celle de FHN. On part de

$$\begin{cases} \dfrac{dv(t)}{dt} = G_L(V_L - v(t)) + G_1(v(t))\,(V_1 - v(t)) + g(t)\,(V_2 - v(t)), \qquad v(0) = v^0 < V_2, \\ \dfrac{dg(t)}{dt} = G_2(v(t)) - g(t), \qquad g(0) = g^0 > 0. \end{cases}$$

On suppose que $V_2 < V_L < V_1$. On rappelle que $V_2 < v(t) < V_1$ pour tout $t > 0$.

1. On pose $x(t) = \ln(v(t) - V_2)$, écrire l'équation sur le système $(x(t), g(t))$. On gardera la forme $\dot{x}(t) = F(v(t)) - g(t)$.
2. Donner des conditions sur G_1 pour que l'équation sur $x(t)$ ait les propriétés de celles de FHN (sur $v(t)$), c'est-à-dire stabilité aux estrémité et une zone instable intermédiaire.
3. Rapprocher ces conditions des données physique du cours.
4. Donner des conditions sur G_2 pour qu'il y ait un point fixe unique avec les propriétés de celui de FHN.

Correction succinte.
1. $\dfrac{dx(t)}{dt} = G_L \dfrac{V_L - v(t)}{v(t) - V_2} + G_1(v(t)) \dfrac{V_1 - v(t)}{v(t) - V_2} - g(t).$
2. On reconnaît que g joue le rôle de w dans FHN. On pose $F(x) := H(v) := G_L \frac{V_L - v}{v - V_2} + G_1(v) \frac{V_1 - v}{v - V_2}$ avec $x = \ln(v - V_2)$. On calcule

$$F'(x) = (v - V_2)H'(v) = (v - V_2)\Big[- G_L \frac{V_L - V_2}{(v - V_2)^2} + G_1'(v) \frac{V_1 - v}{v - V_2} - G_1(v) \frac{V_1 - V_2}{(v - V_2)^2}\Big]$$

$$F'(x) = \frac{1}{v - V_2}\Big[- G_L(V_L - V_2) + G_1'(v)\,(V_1 - v)(v - V_2) - G_1(v)(V_1 - V_2).\Big]$$

On doit avoir stabilité ($F'(x) < 0$) pour $x \to \pm\infty$, i.e ., $v \approx V_2$ ou $v \approx V_1$). Rappelons ici que le signe positif de g permet des bornes sur v et donc sur x que l'on n'a pas pour le système de FHN général. On doit aussi avoir une zone instable ($F'(x) > 0$).
La stabilité aux extrémités V_1 et V_2 est assurée, le terme contenant G_1' s'y annule. Pour une zone instable autour d'un point $V_2 < V_{1/2} < V_1$ il faut supposer $G_1'(V_{1/2}) \gg 1$.
3. On peut ainsi comprendre les données physiques de la section 3.1. Ils correspondent à $V_2 = V_K$, $V_1 = V_{\mathrm{Na}}$. Le paramètre $V_{1/2}$ vérifie bien les inégalités demandées et $k = 15mV$ doit être assez petit car en ce point $G_{\mathrm{Na}}' = \bar{G}_{\mathrm{Na}}/(4k)$.
4. Un point fixe est donné par $g^* = G_2(v^*)$ et

$$0 = K(v^*) := G_L(V_L - v^*) + G_1(v^*)\,(V_1 - v^*) + G_2(v^*)\,(V_2 - v^*).$$

On a $K(V_2) > 0$, $K(V_1) < 0$ et on a donc toujours un point fixe grâce au théorème des valeurs intermédiaires. L'unicité est assurée si $K'(v^*) < 0$ pour tout point fixe. Ceci nécessite d'avoir $G_2'(v^*)$ sufisamment grand par rapport à $G_1'(v^*)$ puisque

$$K'(v^*) = \underbrace{-(G_L + G_1(v^*) + G_2(v^*))}_{<0} + \underbrace{G_1'(v^*)\,(V_1 - v^*)}_{>0} + \underbrace{G_2'(v^*)\,(V_2 - v^*)}_{<0}.$$

Exercice 5

Dans le cas monostable, sous l'hypothèse $A^s \leq -\nu I$, montrer l'unicité du point d'équilibre $X(y)$ tel que $f(X(y), y) = 0$.

Exercice 6

On considère le modèle de neurone

$$\begin{cases} \dfrac{dv_\varepsilon(t)}{dt} = G_1(v_\varepsilon(t))\,(V_1 - v_\varepsilon(t)) + g_\varepsilon(t)\,(V_2 - v_\varepsilon(t)), \qquad v_\varepsilon(0) = v^0, \\ \varepsilon \dfrac{dg_\varepsilon(t)}{dt} = G_2(v_\varepsilon(t)) - g_\varepsilon(t), \qquad g_\varepsilon(0) = g^0 > 0 \end{cases}$$

et on suppose que $G_i \in C^2(\mathbb{R})$, $0 < G_i(\cdot) < \overline{G}_i$ et $\min(V_1, V_2) \leq v^0 \leq \max(V_1, V_2)$.
1. Montrer que $0 < g_\varepsilon(t) < \overline{G}_2$ pour tout $t \geq 0$.
2. Montrer que $\min(V_1, V_2) \leq v_\varepsilon(t) \leq \max(V_1, V_2)$ pour tout $t \geq 0$.
3. Donner une borne sur $\frac{dv_\varepsilon(t)}{dt}$.
4. Donner une borne pour $\frac{dg_\varepsilon(t)}{dt}$.
5. Conclure sur la limite $\varepsilon \to 0$.

Éléments de correction. Les questions 1. er 2. sont issues du TD No 1.

Les questions 3., 4. et 5. suivent exactement le cours, Chapitre Systèmes lent-Rapide, cas monostable, section 4.1. Le rôle de $x_\varepsilon(t)$ est joué par $g_\varepsilon(t)$ et celui de $y_\varepsilon(t)$ par $v_\varepsilon(t)$.