Année Universitaire 2016-17 — M1 : Mathématiques et Applications

Feuille d'exercice No 3 — UE : Modèles mathématiques en neurosciences

Problème

On considère le système fondamental de la dynamique en dimension 1

$$\ddot{x}(t) = -V'(x(t)), \qquad x(0) = x^0 > 0, \quad \dot{x}(0) = 0.$$

On suppose que le potentiel $V \in C^2(\mathbb{R};\mathbb{R})$ satisfait

$$V(0) = 0, \quad V'(0) = 0, \qquad V'(x) > 0 \text{ pour } x > 0.$$

1. Montrer que pour tout $t > 0$ on a

$$|\dot{x}(t)|^2 + V(x(t)) = V(x^0).$$

2. Montrer que la trajectoire décroit de x^0 à 0 et que le temps mis est

$$T(x^0) = \int_0^{x^0} \frac{dy}{\sqrt{V(x^0) - V(y)}}.$$

On désire calculer la dérivée $T'(x)$ de cette fonction.

3. Pourquoi une approche directe ne fonctionne-t'elle pas ?

On change de variable $y \mapsto \theta = \frac{V(y)}{V(x)}$, $0 \leq y \leq x$ et on définit la fonction inverse $Y(\theta, x)$.

4. Calculer $\frac{\partial Y(\theta,x)}{\partial x}$ en fonction de θ, $V'(x)$ et $V'(Y)$.

5. Exprimer $T(x)$ comme une intégrale en θ, en utilisant la question 4.

6. En déduire une expression de $T'(x)$.

7. Montrer la formule

$$T'(x) = \frac{1}{2}\frac{V'(x)}{V(x)}T(x) - \frac{V'(x)}{V(x)} \int_0^x \frac{V''(y)V(y)}{V'(y)^2} \frac{dy}{\sqrt{V(x) - V(y)}}.$$

1. On a bien la relation à $t = 0$ et par ailleurs, en dérivant en t on trouve que l'expression est constante.
2. Puisque $\ddot{x}(0) < 0$ et $\dot{x}(0) = 0$, on a $\dot{x}(t) < 0$ pour t petit, donc on extrait la racine négative

$$\dot{x}(t) = -\sqrt{V(x^0) - V(x(t))} < 0$$

et $\dot{x}(t)$ reste strictement négatif jusqu'à atteindre $x(t^1) = 0$. On peut inverser $x(t)$ en $\tau(x)$ et

$$\frac{d\tau(x)}{dx} = \frac{-1}{\sqrt{V(x^0) - V(x)}}.$$

La formule s'ensuit.
3. La dérivée composée donne deux termes infinis.
4. On a $V(x)\theta = V(Y(\theta, x))$, donc $V'(x)\theta = V'(Y(\theta, x))\frac{\partial Y}{\partial x}$ et finalement

$$V'(x)\frac{V(Y(\theta, x))}{V(x)} = V'(Y(\theta, x))\frac{\partial Y}{\partial x}.$$

5.

$$T(x) = \frac{1}{\sqrt{V(x)}} \int_0^1 \frac{V(x)}{V'(Y)} \frac{d\theta}{\sqrt{1-\theta}} = \sqrt{V(x)} \int_0^1 \frac{1}{V'(Y)} \frac{d\theta}{\sqrt{1-\theta}}.$$

6. et 7.

$$T'(x) = \frac{1}{2}\frac{V'(x)}{\sqrt{V(x)}} \int_0^1 \frac{1}{V'(Y)} \frac{d\theta}{\sqrt{1-\theta}} - \sqrt{V(x)} \int_0^1 \frac{V''(Y)}{V'(Y)^2} \frac{\partial Y}{\partial x} \frac{d\theta}{\sqrt{1-\theta}}$$

$$T'(x) = \frac{1}{2}\frac{V'(x)}{V(x)} T(x) - \frac{V'(x)}{\sqrt{V(x)}} \int_0^1 \frac{V''(Y)V(Y)}{V'(Y)^3} \frac{d\theta}{\sqrt{1-\theta}}$$

$$T'(x) = \frac{1}{2}\frac{V'(x)}{V(x)} T(x) - \frac{V'(x)}{V(x)} \int_0^x \frac{V''(y)V(y)}{V'(y)^2} \frac{dy}{\sqrt{V(x) - V(y)}}$$