Année Universitaire 2019-20 — M1 : Mathématiques et Applications

Feuille d'exercice No 2 — UE : Modèles mathématiques en neurosciences

Exercice 1

1. Soit $u : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ lipschitzienne telle que

$$\int_0^{+\infty} |u(t)|dt < +\infty.$$

Montrer que $\lim_{t\to+\infty} u(t) = 0$.
2. Soit u une fonction telle que

$$\int_0^{+\infty} |u(t)|dt < +\infty.$$

A-t-on forcément $\lim_{t\to+\infty} u(t) = 0$?
3. Supposons maintenant que u est uniformément continue. Montrer que $\lim_{t\to+\infty} u(t) = 0$.

Exercice 2

On considère le système en dimension 2

$$\dot{x}(t) = A(t).x(t),$$

et on choisit la matrice

$$A(t) := \begin{pmatrix} -1 + \frac{3}{2}\cos^2(t) & 1 - \frac{3}{2}\cos(t)\,\sin(t) \\ -1 - \frac{3}{2}\cos(t)\,\sin(t) & -1 + \frac{3}{2}\sin^2(t) \end{pmatrix}$$

1. Calculer les valeurs propres $\lambda_\pm(t)$ de la matrice $A(t)$.
2. Calculer la solution sous la forme $x(t) = e^{at}\begin{pmatrix} -\cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$ et calculer a.
3. Pourquoi est-ce contre-intuitif ? Calculer les valeurs propres de la matrice symétrisée.

Réponse : $\lambda_\pm(t) = \frac{-1\pm i\sqrt{7}}{2}$, $a = \frac{1}{2}$.
Possible extension : remplacer 3/2 par un paramètre. Pour a assez petit 0 devient stable.

Exercice 3 (Le flot gradient est stable par perturbation)

On considère le système de dimension d

$$\dot{x}(t) = -\nabla V(x(t)) + f(x(t)), \qquad x(0) = x^0 \in \mathbb{R}^d.$$

Supposons qu'il existe $a > 0$ et $\alpha > 0$ tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$,

$$|\nabla V(x)| \geq a|x|^\alpha.$$

Donner une condition sur le champs de vecteur $f(\cdot)$ pour que $x(t) \to 0$ lorsque $t \to \infty$.

Exercice 4 (Morris-Lecar)

On considère le système de Morris-Lecar avec $V_E > 0$, $G \in C^1(\mathbb{R}^+;]0, \infty[)$

$$\begin{cases} \frac{dv(t)}{dt} = -g_L v(t) + g(t)\big(V_E - v(t)\big), \\ \dfrac{dg(t)}{dt} = \dfrac{G\big(v(t)\big) - g(t)}{\tau}, \qquad g(0) \geq 0. \end{cases}$$

On suppose que, pour tout $v \in [0, V_E]$,

$$(V_E - v)G'(v) - G'(v) < g_L.$$

1. Est-ce un système gradient ? Un flot hamiltonien ?
2. Montrer que ce système admet un unique point stationnaire (v_{st}, g_{st}).
3. Calculer la matrice dérivée $A \in M_{2\times 2}$ en ce point et montrer que ses valeurs propres sont de parties rélles négatives.
4. Peut-on utiliser directement le théorème de stabilité asymptotique non-linéaire ?
5. Soit $a > 0$. On pose $w = \frac{v}{a}$. Écrire le système en (w, g). Calculer la matrice dérivée $B \in M_{2\times 2}$ au point stationnaire ainsi que la matrice symmétrisée. Calculer la valeur de a qui maximiise le déterminant et montrer qu'alors ses valeurs propres sont négatives. Conclure.

Exercice 5 (Relation entre flots gradient et hamiltonien)

Soit un potentiel $\mathcal{U}(x)$ qui est défini à partir d'une fonction $S \in C^2(\mathbb{R}^d; \mathbb{R})$ et un réel E par la relation

$$|\nabla S(x)|^2 + \mathcal{U}(x) = E.$$

On considère le système PFD

$$\dot{x}(t) = v(t), \qquad \dot{v} = -\frac{1}{2}\nabla\mathcal{U}(x(t)), \qquad v(0) = 0.$$

1. Montrer que $|x'(t)|^2 + \mathcal{U}(x(t)) = E$ et identifier la constante E. On suppose qu'il s'agit de celle de l'hypothèse.
2. Monter que des solutions de $\dot{x}(t) = \nabla S(x(t))$ ou de $\dot{x}(t) = -\nabla S(x(t))$ sont aussi solutions du système PFD.

Exercice 6 (Le flot gradient, variantes)

Soit un potentiel tel que $V(0) = 0$, $V(x) > 0$ et coercif. Montrer la convergence d'un flot gradient en changeant les hypothèses sur le potentiel.
1. Supposer que $|\nabla V(x)|^2 \geq aV(x)$, $V(0) = 0$ et $V(x) > 0$ pour $x \neq 0$.
2. Supposer que $x.\nabla V(x) \geq a|x|^2$.
3. Supposer que $DV.D^2V.DV \geq a|DV|^2$ et que $\nabla V(x) \neq 0$ pour $x \neq 0$.

Exercice 7 (Consensus)

On considère le système, pour $i = 1, ..., I$

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = \sum_{j=1}^{I} a\big(x_j(t) - x_i(t)\big)\big(x_j(t) - x_i(t)\big)$$

où $a \in C^1(R;R)$ vérifie $a(y) = a(-y)$, et il existe α tel que $0 < \alpha \leq a(y)$. On suppose que les données initiales vérifient $0 \leq x_i^0 \leq 1$.

1. Montrer que $0 \leq x_i(t) \leq 1$ pout tout $t \geq 0$ et $i = 1, ..., I$ et que les solutions sont globales.
2. On pose $\bar{x} := \frac{1}{I}\sum_{i=1}^{I} x_i(t)$. Montrer que $\bar{x}$ ne dépend pas de t.
3. Montrer que $\sum_{i=1}^{I} |x_i(t)|^2$ de croît et que $\int_0^{\infty} \sum_{i,j=1}^{I} |x_j - x_i(t)|^2 dt < \infty$.
4. Montrer que $x_i(t)$ est lipschitzienne, que $\sum_{i,j=1}^{I} |x_j - x_i(t)|^2 = 2I \sum_{i=,j1}^{I} |\bar{x} - x_i(t)|^2$.
5. En déduire que $x_i(t) \to \bar{x}$ pour $t \to \infty$.

Exercice 8

Le PFD avec frottement.

Exercice 9 (Lotka-Volterra avec compétition)

On considère le système

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}u &= u(t)(1 - \chi u - v), \\ \frac{d}{dt}v &= \alpha v(u-1), \end{cases}$$

1. Calculer la dérivée en t de la quantité

$$S = \alpha[u - ln(u) - 1] + [v - (1-\chi)ln(\frac{v}{1-\chi}) - (1-\chi)]$$

2. Conclure sur le comportement asymptotique.

Exercice 10 (Van der Pol avec courant)

Trouver l'équation de FizHugh-Nagumo associée